

51

НБ МИФИ

519

H23

РДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. В. Налимов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЭКСПЕРИМЕНТА

МОСКВА 1982

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.В. Налимов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ЭКСПЕРИМЕНТА

*Утверждено
редсоветом института
в качестве текста лекции*

Москва 1982

В. В. Налимов

Налимов В. В. Математическая теория эксперимента. — М.:
Изд. МИФИ, 1982, 28 с.

Рассматриваются вопросы математической теории научного эксперимента, проводятся методы формализации представлений о статистическом эксперименте.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА^{1/}

Планирование эксперимента для моделей линейных и нелинейных по параметрам

1. Анализ понятия "эксперимент"

Наши лекции мы должны были бы начать с того, чтобы дать определение понятия "научный эксперимент". Но здесь нужно признать, что сделать это сколько-нибудь удовлетворительно нельзя. Это определение должно было бы содержать ответ на вопрос, как возможен научный эксперимент? Ответить на этот вопрос в достаточно общей и к тому же краткой форме просто невозможно. Но все же мы приведем здесь несколько определений понятия "эксперимент", заимствованных из изданий главным образом справочного характера, где, надо думать, делалась попытка обобщить имеющиеся по этому поводу высказывания.

1. Эксперимент (от латинского *experimentum* — проба, опыт) — чувственно-предметная деятельность в науке, осуществляемая теоретически познанными средствами. В научном языке термин "эксперимент" обычно используется интуитивно в значении, общем для целого ряда сопряженных понятий: опыт, целенаправленное наблюдение, воспроизведение объекта познания, организация особых условий его существования, проверка предсказания и т.п. (Философская энциклопедия. Т. 5. М., "Советская энциклопедия", 1970).

2. Эксперимент (латинский *experimentum* — проба, опыт)¹ — научно поставленный опыт, наблюдение исследуемо-

1/ По материалам книги В. В. Налимова, Т. И. Голикова — Логические основания планирования эксперимента, "Металлургия", 1976, 128 с, второе, расширенное издание там же, 1980 г.

го явления в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явлений и воссоздать его при повторении этих условий; 2) опыт, попытка (Словарь иностранных слов. М., "Советская энциклопедия", 1964).

3. Эксперимент — систематическое изменение условий необходимого явления и связи его с другими с целью выяснения его природы, его происхождения и методов сознательного овладения данным процессом. Блестящий экспериментатор и крупный ученый Кювье так определяет задачи эксперимента: "Наблюдатель слушает природу, экспериментатор вопрошают и при нуждает ее разоблачаться" (БСЭ, 1-е изд., т. 63, 1933).

4. Эксперимент — научно-поставленный опыт, наблюдение исследуемого явления в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и воссоздать его каждый раз при повторении этих условий (БСЭ, 2-е изд., т. 48, 1957).

5. Эксперимент — операция, пред назначенная для обнаружения истины, принципа или эффекта или, после их обнаружения, для уточнения или иллюстрации. Он отличается от наблюдения тем, что наблюдаемые явления в большей или меньшей степени контролируются человеком (*Encyclopedie Americana*, т. 10, 1944).

6. Эксперимент: 1) испытывать или подвергать испытанию, испытание, проверка; 2) средство или лекарство, пред назначенное для испытания; 3) действие или операция, предпринятые с целью обнаружения нового или проверки гипотезы, или иллюстрации известной истины; 4) подробная процедура, метод, система явлений или последовательность действий, принятые в состоянии неуверенности относительно того, отвечают ли они цели (*Oxford English Dictionary*, 1958).

7. Само по себе понятие "эксперимент" в физике означает действие, направленное на искусственное создание условий для осуществления того или иного физического явления и для наблюдения этого явления в условиях, по возможности наиболее чистых, т.е. не осложненных другими физическими явлениями (Жданов Г. Б. — в кн.: "Современный детерминизм". Законы природы. М., "Мысль", 1973).

Мы видим, что даже в этой, совсем краткой подборке высказываний о смысле понятия "эксперимент" нет согласованности, и ни одно из этих высказываний не отвечает удовлетворительно на вопрос о том, как возможен научный эксперимент.

Как можно всерьез воспринимать утверждение о том, что эксперимент есть предметно-чувственная деятельность, осуществляемая познанными средствами? Если, скажем, исследователь в процессе эксперимента имеет дело с рентгеновскими лучами, то что он предметно чувствует? Разве рентгеновский спектрограф и процесс фотографирования и проявления пленки являются теоретически познанными средствами? Вся особенность экспериментальной деятельности, в том числе и научной, заключается как раз в том, что мы, осуществляя ее, узнаем что-то новое об изучаемых явлениях, хотя и пользуемся при этом средствами, механизм действия которых остается всегда не понятным до конца.

Разве можно говорить о создании точно учитываемых условий для воспроизведения изучаемого явления? Математическая теория эксперимента как раз и возникла из понимания того, что принципиально невозможно создать точно учитываемые условия для проведения эксперимента; результат любого эксперимента всегда связан с некоторой неопределенностью, и задача хорошей организации исследования заключается только в том, чтобы эту неопределенность минимизировать, но отнюдь не в том, чтобы ее полностью устранить.

И уж совсем странно говорить о физическом эксперименте, как о деятельности, направленной на наблюдение изолированного физического явления. Тогда взаимодействие явлений совсем снимается с рассмотрения, и теряется понятие о математической модели в физике и ее экспериментальной проверке.

Может быть лучше всего об эксперименте говорить, пользуясь метафорами так, как это и сделал Кювье, когда сказал, что экспериментатор принуждает природу разоблачаться. А еще лучше, может быть, вовсе не пытаться давать определения того, что есть эксперимент, полагая, что это понятие не поддается компактному определению. Смысл его может стать ясным только после того, как о нем будет много сказано. Задача этой небольшой статьи как раз и заключается в том, чтобы попытаться ответить на пресловутый вопрос, как возможен научный эксперимент.

Интересно обратить внимание на то, что составители многих словарей, видимо, поняли тщетность попытки определить понятие "эксперимент". Ничего не сказано об этом понятии в таких хорошо известных изданиях справочного характера, как энциклопедический словарь Брокгауза и Ефона, энциклопедический словарь Граната, *Encyclopedie Britannica*, *Chamber's*

Encyclopedie, словарь *Larousse* и даже в нашей физической энциклопедии.

2. Примеры хороших и плохих экспериментов

Несмотря на все трудности, связанные с пониманием того, что есть научный эксперимент, все же легко привести примеры как хорошо поставленных экспериментов, так и экспериментов в каком-то смысле явно плохих. Эти примеры, как нам кажется, сразу покажут, что проблема логического анализа структуры эксперимента существует реально и что она может быть сформулирована на некотором весьма абстрактном уровне вне зависимости от того конкретно-содержательного значения, которое тот или иной эксперимент имеет в каждом отдельном его использовании.

Начнем с самого простого и многократно описанного примера – взвешивания трех объектов **a**, **b**, **c** на аналитических весах. Традиционно экспериментатор стал бы взвешивать эти объекты по схеме, приведенной в табл. 1. Вначале он делает холостое взвешивание, определяя нулевую точку весов, затем по очереди взвешивает каждый из объектов. Это пример традиционно используемого однофакторного эксперимента. Здесь исследователь изучает поведение каждого фактора в отдельности. Масса каждого объекта оценивается только по результатам двух опытов: того опыта, в котором на весы был положен изучаемый объект, и холостого опыта. Например, масса объекта равна

$$A = y_1 - y_0$$

Дисперсия результатов взвешивания запишется в виде:

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2\{y_1 - y_0\} = 2\sigma^2\{y\},$$

где $\sigma\{y\}$ – ошибка взвешивания.

Проведем теперь тот же эксперимент по несколько иной схеме задаваемой матрицей планирования, приведенной в табл. 2. Здесь, как и в предыдущем случае, каждая строка задает условия проведения одного опыта.

В первых трех опытах последовательно взвешиваются объекты, в последнем опыте взвешиваются все три объекта вместе – "холостое" взвешивание не производится. Легко видеть, что масса каждого объекта будет задаваться формулами:

$$A = \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2}, \quad B = \frac{-y_1 + y_2 - y_3 + y_4}{2},$$

$$C = \frac{-y_1 - y_2 + y_3 + y_4}{2}$$

Таблица 1
Традиционная схема взвешивания трех объектов

Номер опыта	a	b	c	Результат взвешивания
1	-1	-1	-1	y_0
2	+1	-1	-1	y_1
3	-1	+1	+1	y_2
4	-1	-1	+1	y_3

1/ Здесь и в табл. 2 обозначение +1 указывает, что объект взвешиванияложен на весы, обозначенные -1 указывает на отсутствие объекта на весах.

Таблица 2
Планирование эксперимента при взвешивании трех объектов

Номер опыта	a	b	c	Результат взвешивания
1	+1	-1	-1	y_1
2	-1	+1	-1	y_2
3	-1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4

Здесь числители получены путем умножения элементов последнего столбца на элементы столбцов **a**, **b**, **c**. Мы видим, что при вычислении, скажем, массы объекта она входит в числитель два раза, и потому в знаменателе стоит число 2. Масса объекта **a** вычисленная по приведенной выше формуле, оказывается неискаженной массами объектов **b** и **c**, так

как масса каждого из них входит в формулу для массы дважды и с разными знаками.

Найдем теперь дисперсию, связанную с ошибкой взвешивания при новой схеме постановки экспериментов. Она равна

$$\sigma^2\{A\} = \sigma^2 \left\{ \frac{y_1 - y_2 - y_3 + y_4}{2} \right\} = \frac{4\sigma^2\{y\}}{4} = \sigma^2\{y\}$$

Аналогичным образом находим

$$\sigma^2\{B\} = \sigma^2\{y\} \quad \text{и} \quad \sigma^2\{C\} = \sigma^2\{y\}$$

Мы видим, что при новой схеме дисперсия взвешивания получается вдвое меньше, чем при традиционном методе, хотя в обоих случаях на взвешивание трех объектов затрачивалось по четыре опыта. При традиционном взвешивании мы должны будем все четыре опыта повторить дважды, для того чтобы получить результаты с такой же точностью, как и в первом опыте. В результате чего происходит увеличение точности эксперимента в два раза? В первом случае эксперимент был поставлен так, что каждую массу мы получали лишь из двух опытов. При новой схеме эксперимента каждая масса вычислялась уже из результатов всех четырех опытов. Вторую схему эксперимента можно назвать многофакторной. Здесь оперируют всеми факторами (объектами взвешивания), так, чтобы каждая масса вычислялась по результатам всех опытов, проведенных в данной серии экспериментов. Рассмотренная задача взвешивания решается с помощью слишком простой процедуры, и вряд ли здесь нужно применять сложные схемы планирования эксперимента.

Пример со взвешиванием показывает, что даже в простых задачах можно с удивительной отчетливостью противопоставить плохой эксперимент хорошему.

Преимущество многофакторного эксперимента можно продемонстрировать и на более сложных задачах. Пусть, например, нам известно, что выход некоторого продукта y линейно зависит от трех переменных (факторов) x_1, x_2, x_3 . В частном случае это может быть температура, давление и содержание некоторого компонента. Нам нужно оценить значения коэффициентов регрессии линейного уравнения

$$E\{y\} = \xi = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3,$$

где E — знак математического ожидания.

Каждую из переменных будем варьировать только на двух уровнях и обозначать эти уровни знаками -1 и $+1$. Если температура в наших опытах принимает два значения, скажем, 100 и 120°C , то нижний уровень температуры обозначим через -1 , а верхний через $+1$. Воспользуемся для постановки опытов матрицей планирования, приведенной в табл. 3*. Здесь та же схема планирования, что и в табл. 2, только факторы a, b, c заменены независимыми переменными x_1, x_2, x_3 и добавлен столбец "фиктивной" переменной для оценки свободного члена θ_0 .

В соответствии с этой таблицей эксперименты выполняются следующим образом: в первом опыте переменные x_1 и x_3 находятся на нижних уровнях, x_1 — на верхнем уровне; во втором опыте переменная x_1 находится на верхнем уровне, а переменные x_2 и x_3 на нижних уровнях и т.д. Здесь мы имеем дело с насыщенным планом. Число наблюдений равно числу оцениваемых параметров. Обозначим через θ вектор оценок параметров.

Таблица 3
Планирование эксперимента для линейной модели с тремя независимыми переменными

Номер опыта	Матрица коэффициентов				Результаты эксперимента
	План эксперимента				
	x_0	x_1	x_2	x_3	
1	+1	+1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

*Здесь мы имеем дело с так называемой матрицей Адамара. Матрицы Адамара H — это квадратные матрицы, размера $N \times N$ (в нашем случае N — число опытов), состоящие из элементов $+1$ и -1 , удовлетворяющие условию $H^T H = N I$, где I — единичная матрица; T — знак транспонирования. Матрицы Адамара можно построить только для $N=2$ и далее для N , кратного четырем. Сейчас известны методы построения таких матриц вплоть до $N = 200$ за небольшим исключением).

План приведенный в табл. 3, обладает следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^N x_{iu} = 0, \quad \sum_{i=1}^N x_{iu}^2 = N, \quad \sum_{i=1}^N x_{iu} x_{ju} = 0 \quad (i=j)$$

Первое из этих условий – условие ортогональности к столбцу из единиц, второе – условие нормировки, третье – условие попарной ортогональности столбцов (скалярные произведения всех векторов-столбцов равны нулю). Это значит, что матрица независимых переменных X , называемая также матрицей коэффициентов (см. табл. 3), устроена так, что матрица ковариаций $(X^T X)^{-1}$ для вектора параметров уравнения регрессии оказывается диагональной^{1/}, т.е. все ковариации $\text{cov}\{\theta_i \theta_j\}$ равны нулю и, следовательно, все коэффициенты регрессии определяются независимо друг от друга. Из второго условия следует, что все диагональные элементы матрицы $(X^T X)^{-1}$ равны $1/N$. Система нормальных уравнений распадается на $n+1$ независимых уравнений. В этом случае коэффициенты регрессии определяются формулами:

$$\hat{\theta}_i = \frac{\sum_{u=1}^N x_{iu} y_u}{N} \quad (i=0, \dots, n)$$

с дисперсией

$$\sigma^2 \{\hat{\theta}_i\} = \frac{\sigma^2 \{y\}}{N}.$$

^{1/} Напомним, что в матричных обозначениях вектор-столбец коэффициентов регрессии задается соотношением

$$\theta = X^T X^{-1} X^T Y,$$

причем

$$\sigma^2 \{\hat{\theta}_i\} = C_{ii} \sigma^2 \{y\}, \quad \text{cov}\{\hat{\theta}_i \hat{\theta}_j\} = C_{ij} \sigma^2 \{y\}$$

и коэффициент корреляции

$$P\{\hat{\theta}_i \hat{\theta}_j\} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii} C_{jj}}}$$

Здесь C_{ii} и C_{jj} диагональные и соответственно внедиагональные элементы матрицы $X^T X^{-1}$, поэтому последняя называется ковариационной матрицей уравнения регрессии или просто матрицей ошибок; матрица $X^T X$ называется информационной матрицей.

Из этих двух формул следует, что коэффициенты регрессии оцениваются по всем N опытам и соответственно в N раз уменьшается дисперсия в их оценке по сравнению с дисперсией единичного опыта. Последнее обстоятельство является весьма примечательным. Представьте себе, что мы имеем дело с последовательностью N независимых наблюдений Y_1, Y_2, \dots, Y_N , тогда среднее арифметическое этого ряда наблюдений будет оцениваться с дисперсией $\sigma^2 \{y\}/N$. В рассмотренном выше случае все N коэффициентов регрессии оцениваются по N опытам с дисперсией $\sigma^2 \{y\}/N$. Отсюда становится очевидным, хотя бы на интуитивном уровне, что нельзя придумать такого расположения точек (внутри области, ограниченной единичным кубом), которое дало бы возможность получить лучшие по точности оценки коэффициентов регрессии. Это утверждение может быть и строго доказано^{1/}.

Интересующие нас четыре коэффициента регрессии можно было бы оценить и с помощью традиционного однофакторного эксперимента. В этом случае мы действовали бы следующим образом: один эксперимент поставили бы так, чтобы все независимые переменные были на нижнем уровне, а дальше следовали бы три опыта, в каждом из которых одна переменная на верхнем уровне, а две другие на нижнем. Всего было бы опять поставлено четыре опыта. Но каждый коэффициент регрессии определялся бы только по двум опытам как тангенс угла наклона прямой, проведенной через точки, абсциссы которых соответственно равны -1 и +1.

В этом случае

$$\hat{\theta}_i = \frac{y_i - y_0}{2}$$

$$\sigma^2 \{\hat{\theta}_i\} = \frac{\sigma^2 \{y\}}{N}$$

^{1/} Обратим внимание на то, что здесь мы имеем дело с необычайно высокой эффективностью математического метода. Напомним для сравнения, что применение эффективных оценок при обработке результатов наблюдений в лучшем случае, когда выборки не загрязнены, дает возможность выиграть несколько десятков процентов. Применение линейного или динамического программирования дает выигрыш в 5 – 7% и то только в случае, когда исходные данные не имеют ошибок.

В нашем случае с тремя независимыми переменными, ставя многофакторный опыт, мы выигрываем в дисперсии в два раза. Если бы нашей целью было, скажем, определение 15 коэффициентов регрессии, то поставив эксперименты по схеме, аналогичной приведенной в табл. 3, мы получили бы выигрыш уже в 8 раз! Однофакторный эксперимент оказывается явно плохим, хотя в этом случае мы имеем дело с созданием условий для изучения явления, не осложненного другими физическими явлениями, и согласно высказыванию, приведенному на с. 2-3 (определение 7), именно такое действие должно соответствовать представлению о физическом эксперименте. Следует ли отсюда, что физики должны ставить только плохие в метрологическом смысле эксперименты?

Можно показать, что эксперимент, проведенный по схеме, заданной в табл. 3, обладает и еще рядом приятных свойств, одно из которых называется ротатабельностью. Оно означает, что получаемое с помощью этого плана уравнение регрессии обладает тем свойством, что дисперсия оценки модели зависит только от длины радиуса, проведенного из центра эксперимента, но не от угла, под которым этот радиус проведен^{1/}.

Если принять за меру информации величину $1/\sigma^2 \{ \hat{\xi} \}$, то можно утверждать, что информация, содержащаяся в уравнении регрессии, полученном для ротатабельного плана, равномерно "размазана" по сфере (в общем случае гиперсфере) с радиусом γ . Исследователь не знает заранее той области факторного пространства, где находится интересующий его участок, поэтому представляется вполне разумным стремиться к такому планированию эксперимента, при котором количество информации, содержащейся в уравнении регрессии, одинаково для всех эквидистантных точек.

^{1/} Это свойство следует из того, что все коэффициенты регрессии оцениваются с одной и той же дисперсией, равной $\sigma^2 \{ y \}$. Применяя закон накопления ошибок к уравнению регрессии

$$\hat{\xi} = \hat{\theta}_0 + \hat{\theta}_1 x_1 + \dots + \hat{\theta}_n x_n,$$

$$\text{получаем } \sigma^2 \{ \hat{\xi} \} = \frac{\sigma^2 \{ y \}}{N} \{ 1 + \gamma^2 \}$$

$$\text{где } \gamma^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

Другое приятное свойство эксперимента, заданного табл.3, это упоминавшееся уже свойство ортогональности. В этом случае коэффициенты регрессии оцениваются независимо друг от друга. Тогда независимыми друг от друга оказываются и доверительные границы для оценок коэффициентов регрессии. Это обстоятельство имеет очень важное значение при представлении, хранении и интерпретации результатов исследования. Чтобы пояснить эту мысль, рассмотрим трудности, связанные с интерпретацией неортогонального эксперимента, т.е. такого эксперимента, для которого векторы-столбцы матрицы независимых переменных не ортогональных друг другу и, следовательно, $\text{cov} \{ \hat{\theta}_i \hat{\theta}_j \} \neq 0$. В этом случае при представлении результатов исследования приходится строить совместную доверительную область для всех коэффициентов регрессии и, задаваемую многомерным эллипсоидом рассеяния. В простейшем случае, когда мы имеем дело с уравнением регрессии для одной независимой переменной и оцениваем, следовательно, два коэффициента регрессии θ_0 и θ_1 , совместная доверительная область будет задаваться эллипсом рассеяния. Допустим теперь, что мы хотим для θ_0 выбрать не значение $\hat{\theta}_0$, оцененное методом наименьших квадратов, а какое-то другое, близкое к нему, т.е. попадающее в область доверительных границ, заданных эллипсом. Тогда этот выбор немедленно определит и доверительные границы для второго параметра. Легко представить себе, насколько эта процедура усложняется в многомерном случае. Представьте себе теперь еще, что мы хотим данные, полученные по многопараметрической задаче, занести в память ЭВМ. Как это сделать — заносить туда параметры многомерного эллипса рассеяния? Можно, конечно, вокруг эллипса описать параллелепипед. Тогда запись доверительных границ упростится, но они будут далеки от реальных границ, к тому же с ростом размерности резко увеличивается грубость такой аппроксимации.

Рассмотрим еще одну трудность, связанную с неортогональностью планов. Допустим, что один исследователь построил некую модель кинетики химического процесса, отразив в ней какое-то множество гипотетически возможных промежуточных реакций, а другой построил для описания того же процесса несколько отличную модель, введя в нее иные, также гипотетически возможные реакции. Тогда оценки параметров, сделанные по неортогональным планам, дадут несовпадающие результаты для параметров и тех основных реакций, которые остава-

лись неизменными в обеих моделях. Короче говоря, если в наших представлениях о механизме реакции изменяются хотя бы какие-то, может быть, и не очень существенные детали, то немедленно должны будут измениться и оценки параметров, задающих основные составляющие химического процесса.

Каждый раз, когда мы рассматриваем ту или иную математическую модель, параметры которой оценены по экспериментальным данным методом наименьших квадратов, нам надо иметь перед собой и ковариационную матрицу $(X^T X)^{-1}$. Без нее наше понимание модели будет неполным, а порой просто неверным. При этом коррелированность параметров в модели, доставляющая столь много неприятностей при интерпретации результатов исследования, это отнюдь не свойство, присущее самому изучаемому процессу, а только следствие того, как устроена матрица X . Координационность параметров определяется, с одной стороны, структурой выбранной модели (а модели для описания одного и того же процесса можно выбирать по-разному), и, с другой стороны, расположением экспериментальных точек.

Математическая статистика позволяет не только оценить некоторым наилучшим, в каком-то смысле, образом параметры модели, но и получить некоторые метапредставления о качестве оценок. Из этих метапредставлений рождается, как это детально будет показано дальше, возможность планирования, т.е. улучшения эксперимента.

И, наконец, последнее. Представьте себе, что исследовательставил эксперимент так, что не очень нарушал естественно текущий ход событий в лаборатории. Тогда может оказаться, что наряду с независимыми переменными X_1, \dots, X_n на результат эксперимента могут оказать влияние еще не регистрируемые, но спонтанно изменяющиеся переменные Z_1, \dots, Z_n . При этом переменные Z могут оказаться сильно закоррелированы с переменными X и тогда все оценки (если даже они сделаны по методу наименьших квадратов) окажутся смещеными. Чаще всего с такими неприятностями приходится сталкиваться в биологических исследованиях. Представьте себе, скажем, что исследователь изучает действие некоторых условий на поведение крыс. При этом опыты ставятся так, что ежедневно некоторое количество крыс подвергается воздействию одних и тех же условий: условия воздействия меняются только при переходе от одного дня к другому. В результате такого исследования обнаружено, что средний результат для всех крыс,

испытанных за этот день, во много раз превосходит квадратичную ошибку, которой характеризуется разброс испытаний по отдельным крысам. Исследователь приходит к заключению, что он обнаружил некий бесспорный биологический феномен. Но затем, много времени спустя, кто-то вдруг вздумал повторить этот опыт и ничего похожего не получил. Одно из возможных объяснений такое: в тот злополучный день, когда был получен высокий эффект, лаборантка поссорилась дома с мужем, и, приди на работу, выместила свою обиду на крысах — существах очень нервных.

Такого смещения в оценках не происходит, если эксперимент рандомизирован относительно неконтролированных условий. В рассматриваемом случае надо было бы все способы воздействия испытывать на разных крысах в течение каждого дня. Но технически это совсем не просто осуществить — удобнее в течение одного дня поставить все испытания в одних и тех условиях. Иногда возникает здесь еще и дополнительная трудность: объектов, предназначенных для ежедневного испытания, может быть меньше, чем вариантов испытаний, и тогда возникает другая задача — рандомизация с наложенными ограничениями.

Планирование эксперимента и возникло в 20—30-х годах нашего века из потребности устраниить или хотя бы уменьшить систематические ошибки в сельскохозяйственных исследованиях путем рандомизации условий проведения эксперимента. И сейчас многие книги, особенно издаваемые за рубежом, излагают представления о планировании эксперимента исходя из концепции рандомизации.

Рандомизация условий проведения эксперимента — это основное требование при постановке всякого грамотного исследования не только в биологии, но и в любой другой области знаний. И в химических или металлургических лабораториях мы можем столкнуться с тем, что отсутствие надлежащим образом проведенной рандомизации может привести к смещенным оценкам из-за неучтенной неоднородности исходного материала из-за неконтролируемого изменения во времени экспериментальных установок и тех или иных реагентов. Известен случай, когда в весьма высококвалифицированном собрании докторантам при защите диссертации был задан недоуменный вопрос: как могло получиться, что при оценке параметров по двумя сериям испытаний, одна из которых проводилась с планированием эксперимента, а другая без него — расхождение получилось столь большим, что вероятность его появления должна быть оценена

примерно в 10^{-5} . Ответ здесь простой: процедура планирования оказалась направленной не только на уменьшение дисперсии оцениваемых параметров, но также и на рандомизацию относительно сопутствующих, спонтанно изменяющихся и неконтролируемых переменных. В результате удалось избавиться от смещения в оценках.

Рассмотрим здесь еще пример, заимствованные из практики работы одного металлургического завода. В маркеновском процессе очень важно, чтобы содержание углерода в момент расплавления колебалось в достаточно узких пределах. Естественным было бы стремление организовать процесс плавки так, чтобы содержание углерода в момент расплавления стало регулируемой величиной. Статистический анализ результатов наблюдений показал, что содержание углерода в момент расплавления линейно зависит от основности шлака $\text{U} = \frac{\text{CaO}}{\text{SiO}_2}$. Если бы мы захотели воспользоваться этой связью для интерполяции, определяя, скажем, содержание углерода по основности, то все было бы хорошо. Но попытка воспользоваться таким соотношением для регулирования технологического процесса, оказалась неудачной. Причину этого легко удалось объяснить. Как содержание углерода (в момент расплавления), так и основность определяются одной и той же причиной — содержанием чугуна в завалке. Но эта переменная не поддается непосредственному измерению, и поэтому она не включается в уравнение регрессии. В результате в линейном уравнении, связывающем содержание углерода с основностью, коэффициент регрессии оказывается смещенным. Используя это линейное уравнение для интерполяции, мы не нарушаем внутренних связей в системе, и поэтому, несмотря на смещенную оценку, получаем правильные результаты. Однако как только будет сделана попытка использовать наше уравнение для управления процессом, так сразу же будут нарушены внутренние связи между измеряемыми и неизмеряемыми переменными в системе, и смещенность оценки приведет к бессмысленным результатам.

Коварство рассмотренного выше примера заключается в том, что здесь мы имеем дело с ситуацией, где действует скрытая переменная. Она не входит в матрицу независимых переменных \mathbf{X} и анализ ковариационной матрицы $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$ не дает нам никаких оснований для беспокойства. Дефектность нашей модели остается скрытой. Такого рода ситуации являются типичными при изучении сложных систем — большая часть действующих там факторов (независимых переменных) остается не-

доступной для непосредственного наблюдения. Постановка любого активного эксперимента неизбежно нарушает в той или иной степени внутренние связи в системе и таким образом спасает нас в какой-то мере от смещенных оценок. Но именно поэтому активный эксперимент труден — отсюда и понятно стремление исследователя наблюдать, насыщенно эти некоторым установленнымся процессом, а не экспериментировать активно. Рандомизированный эксперимент, если процедура рандомизации хорошо продумана, должен полностью избавить результаты исследования от влияния скрытых переменных.

И все же мы хотим рассмотреть вопрос о логических основаниях планирования эксперимента не только с позиции рандомизации, а во всей доступной сейчас нам полноте.

3. Как могут быть formalizованы некоторые наши представления о хорошем эксперименте

Несмотря на наше неумение определить, что есть научный эксперимент, мы все же можем достаточно четко, хотя бы на отдельных примерах, провести разграничение между хорошо и плохо поставленными экспериментами. И если мы теперь хотим пойти дальше — построить теорию эксперимента, нам надо попытаться формализовать наши представления о хорошем эксперименте.

Попытаемся разбить все мысленно возможные эксперименты на две группы. К одной из них отнесем те задачи, в которых нужно решить вопрос о том, как наилучшим образом расположить экспериментальные точки в пространстве независимых переменных. Такие задачи будем несколько условно называть пространственно локализованными, или статическими. К динамическим отнесем те задачи, в которых приходится заботиться о стратегии исследования в целом, полагая, что в этом случае исследование распадается на серию последовательно проводимых локальных экспериментов.

Начнем наше изложение с попытки формализовать представления о хорошем статическом эксперименте. Чтобы сделать это, мы должны иметь возможность рассмотреть в некотором достаточно общем виде свойства всех возможных матриц планирования эксперимента в некоторой заранее заданной области пространства независимых переменных. Этому, естественно, должно предшествовать задание той модели, ради оценки параметров которой ставится эксперимент.

Таким образом, формализация наших представлений о хорошем эксперименте начинается с записи модели. На стр. мы записали модель в виде полинома первой степени для трех независимых переменных и предложили для оценки ее параметров матрицу планирования эксперимента, представленную в табл. 3. Запишем теперь модель в виде неполного полинома второй степени для двух независимых переменных

$$\xi = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_{12} x_1 x_2$$

Для оценки параметров здесь можно предложить план эксперимента, представленный в табл. 4. Сама матрица здесь выглядит так же, как и матрица, приведенная в табл. 3: по строкам и столбцам в одном и том же порядке расположены одни и те же элементы. Но во втором случае над последним столбцом указано, что он относится к произведению $x_1 x_2$, т.е. служит для оценки параметра. Если же мы пользуемся первой моделью в случае, когда коэффициенты регрессии для эффектов взаимодействия не равны нулю, то оценки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3$, полученные методом наименьших квадратов, должны будут интерпретироваться так:

$$\hat{\theta}_1 \rightarrow \theta_1 + \theta_{23}, \hat{\theta}_2 \rightarrow \hat{\theta}_2 + \theta_{13}, \hat{\theta}_3 \rightarrow \theta_3 + \theta_{12}$$

Таблица 4

Планирование эксперимента для модели с двумя независимыми переменными, включающей эффект взаимодействия между переменными

Номер опыта	Матрица коэффициентов				Результаты эксперимента
	x_0	x_1	x_2	$x_1 x_2$	
1	+1	+1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	+1	-1	y_2
3	+1	-1	-1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

т.е. они являются оценками для сумм некоторых параметров. Здесь мы имеем дело уже со смешанными оценками: четыре опыта не дают нам возможности сделать чего-то большего, чем оценить раздельно четыре коэффициента регрессии: $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$

Таким образом, матрица X приобретает истолкование в терминах эксперимента тогда, когда она связывается с какой-либо моделью.

Выше мы рассмотрели план хорошего эксперимента для взвешивания трех объектов a, b, c , не приводя при этом модели. На самом деле такой план можно было построить, только имея, хотя бы в уме, модель процесса взвешивания. Она в данном случае должна была бы быть записана так:

$$\xi = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3,$$

где x_i — переменные, принимающие только два значения +1 и -1 в зависимости от того, помещен или не помещен взвешиваемый объект на весы. Смысл этой записи заключается в том, что мы признаем аддитивность процедуры взвешивания, не допуская в ней существования эффектов взаимодействия. При интерпретации этой модели мы, естественно, принимаем, что

$$\theta_1 \rightarrow \frac{A}{2}, \quad \theta_2 \rightarrow \frac{B}{2}, \quad \theta_3 \rightarrow \frac{C}{2},$$

$$\theta_0 \rightarrow \frac{A+B+C}{2} + M_0,$$

где M_0 — возможное смещение нулевой точки. Коэффициент θ_0 при процедуре взвешивания нам практически вычислять не нужно (в матрице приведенной в табл. 2, мы даже не записали столбец, состоящий только из +1, но в модели коэффициент θ_0 должен быть записан, чтобы она адекватно отражала результаты взвешивания по каждой строке^{1/}).

1/ Естественно было бы записать модель взвешивания трех объектов следующим образом:

$\xi = M_0 + Ax_1 + Bx_2 + Cx_3$ полагая, что x_i могут принимать только значения 0 (когда на весы лежит предмет не положен) и +1, когда на весы положен соответствующий объект. Такого рода модели используются в том разделе планирования эксперимента, который называется "Планы взвешивания".

Допустим, что мы имеем дело с моделью, нелинейной по параметрам, скажем, с экспонентой или суммой экспонент, к которым так привыкли все, кто имеет дело с задачами физической химии. В общем виде запишем модели такого типа следующим образом:

$$\xi = \Phi(x, \theta)$$

где x – вектор независимых переменных; θ – вектор параметров модели.

Если мы хотим оценить методом наименьших квадратов параметры θ по результатам наблюдений, то нам надо будет линеаризовать нелинейную по параметрам функцию, разлагая ее в ряд Тейлора в окрестности некоторой точки θ_0 . В результате мы приходим к рассмотрению информационной матрицы $X^T X$, полученной из матрицы независимых переменных X размера $N \times K$:

$$X = \{x_{2i}\},$$

где элемент матрицы

$$x_{2i} = \left[\frac{\partial \Phi(x_i, \theta)}{\partial \theta_j} \right], \theta = \hat{\theta}_0$$

есть частная производная по параметру θ_j в точке $\theta = \hat{\theta}_0$ при значениях $x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}$ соответствующих условиям некоторого i -го опыта.

Мы видим, что если модель задана нелинейно, то для оценки ее параметров нам надо опять находить матрицу $(X^T X)^{-1}$. Однако это мы можем сделать только в том случае, если нам известен не только вид функции, но еще и какие-то, хотя бы очень грубые оценки ее параметров. Оценки параметров в процессе эксперимента улучшаются, и в соответствии с этим, естественно, должен изменяться оптимальный план эксперимента. В этой ситуации исследование разбивается на ряд последовательных шагов. На каждом шаге ставится некоторое число опытов и после этого происходит переоценка коэффициентов и изменение плана. Такая стратегия планирования называется последовательной.

Итак, мы видим, что как только оказывается заданной модель изучаемого явления и план, сразу же появляется возможность написать матрицу независимых переменных X , а затем и ковариационную матрицу $(X^T X)^{-1}$. Последняя позволяет нам высказывать суждения о качестве оценок параметров изу-

чаемой модели по результатам эксперимента. Если мы хотим изменить в том или ином направлении качество оценок параметров или модели в целом, то мы должны каким-то специальным образом задавать матрицу X .

Теперь мы можем ответить на вопрос о том, когда возможно планирование эксперимента. Ответ оказывается простым – планирование локального эксперимента безусловно, возможно во всех тех случаях, когда еще перед началом исследования можно сформулировать предварительные знания в виде математической модели. Практически это, наверное, возможно сделать, во всех случаях, когда исследователь изучает что-то, о чем он имеет хотя бы весьма смутное представление обще-теоретического характера. Даже работы вспомогательного, чисто препараторского характера, требующие прежде всего необычного искусства от исследователя, могут быть представлены моделями хотя бы такого типа, как рассмотренная выше модель взвешивания. Для этого надо уметь выделить те факторы, которыми исследователь реально может управлять, и записать предполагаемые взаимоотношения. Конечно, явно невозможно записать модели для открытых, скажем, для открытия такого типа, каким было открытие радиоактивности, сделанное Беккерелем. Но ведь это открытие и появилось как нечто неожиданное и непредвиденное, а не как результат некоторого сознательного поиска.

Таким образом, мы видим, что логически продуманная постановка исследования включает в себя выбор модели, с одной стороны, и выбор плана эксперимента, оптимального в каком-то смысле для этой модели, с другой стороны. Решение первой из этих задач связано с глубоким знанием объекта исследования: решение второй задачи совершенно не зависит от объекта исследования.

Запись изучаемой проблемы в виде математической модели позволяет достигнуть такого уровня формализации, при котором мы можем полностью абстрагироваться от физического содержания задачи. К миру физической реальности исследователь должен возвращаться только на последнем этапе своего исследования – при интерпретации модели.

Мы будем рассматривать только вторую из поставленных выше двух задач. Это позволит вести изложение в достаточно абстрактном плане, отвлекаясь почти полностью от обсуждения физического смысла при постановке задач в той или иной конкретной области знания. Вопрос о том, как выбирать матема-

тические модели и как интерпретировать полученные с их помощью результаты исследования, надо рассматривать в книгах, посвященных отдельным отраслям знаний. Наша задача — рассмотреть логику планирования эксперимента на том его этапе, который уже доведен до формулировки модели.

Итак, допустим, что дана модель изучаемого явления. Задача построения оптимальных планов эксперимента сводится к тому, что нужно (сначала на чисто логическом уровне) рассмотреть те требования, которые могут характеризоваться "хорошая оценка модели", далее необходимо связать эти требования со свойствами ковариационной матрицы или информационной матрицы и в соответствии с этим найти отвечающую этим требованиям матрицу плана эксперимента. При этом, конечно, заранее должна быть задана та область пространства независимых переменных, где будет ставиться эксперимент. Это может быть многомерный куб, шар, правильный симплекс или какая-нибудь совсем несимметричная область.

Во многих случаях задача сводится просто к заданию свойств матриц некоторыми скалярными характеристиками и попытке найти связь между этими характеристиками и статистическими свойствами моделей. Так, скажем, естественно потребовать минимизации объема эллипсоида рассеяния^{1/} оценок параметров уравнения регрессии. Это требование будет выполнено, если мы найдем на множестве планов с заданным числом измерений план с такой матрицей независимых переменных X , что детерминант матрицы $(X^T X)$ будет максимальен или, что тоже — минимальен детерминант ковариационной матрицы $(X^T X)^{-1}$. Такие планы называются D -оптимальными.

^{1/} Это требование, как и некоторые другие, является естественным обобщением критерия совместных эффектных оценок, введенным в математическую статистику еще Р.Фишером. Если раньше требовалось построить алгоритм для вычисления параметров уравнения регрессии так, чтобы при заданном плане эллипсоид рассеяния оценок параметров был минимальным, то теперь подобное требование предъявляется к построению плана при заданном способе обработки результатов наблюдений.

Таким образом, одно из важнейших статистических свойств модели задается всего одним числом — детерминантом матрицы. Однако оно полностью не определяет поведения рассеяния оценок коэффициентов регрессии — объем эллипсоида рассеяния может быть минимальен, но сам эллипсоид может оказаться слишком вытянутым по одной из своих осей. Если исследователь хочет минимизировать максимальную ось эллипса рассеяния, то он должен суметь построить такую матрицу плана, которой бы соответствовала ковариационная матрица с минимальным значением максимального характеристического числа. Это будет так называемый E — оптимальный план. Исследователь может потребовать, чтобы минимальной была средняя дисперсия оценок коэффициентов регрессии. Этому требованию соответствуют эллипсоиды рассеяния с наименьшей суммой квадратов длин осей. Соответствующие планы называются A — оптимальными; им соответствуют ковариационные матрицы, с наименьшим значением следа.

Мы не будем здесь перечислять все те требования, которые можно предъявить к планам эксперимента, отвечающим нашим представлениям о том, что такое хороший эксперимент. Подробно об этом сказано в книге, указанной на стр. 1. Здесь важно отметить только, что как правило (за исключением некоторых очень простых моделей), нельзя предложить плана, который бы отвечал одновременно всем или хотя бы важнейшим критериям оптимальности. Нужно искать компромиссное решение. В этом сейчас важнейшая задача планирования эксперимента. Чтобы выполнить ее, приходится пользоваться численными методами, строить планы, соответствующие какому-нибудь одному критерию, а затем оценивать для этих планов численные характеристики, соответствующие другим критериям, и в завершение — выбирать на множестве всех планов наилучшее компромиссное решение.

Эту задачу оказалось возможным решить только частично. Трудность здесь состоит в том, что далеко не все желательные нам свойства планов можно хорошо оценить численно. Если мы, например, имеем дело с D оптимальностью, то здесь все обстоит вполне благополучно. Достаточно нам найти для некоторых заданных условий D оптимальный план и тогда для любого другого плана, построенного в той же области значений независимых переменных, мы можем оценить отклонение от D оптимальности (отклонение от минимального значения определителя $(X^T X)^{-1} W$), и эта оценка даст нам вполне четкое пред-

ставление о том, насколько увеличился объем эллипсоида рас-
сеяния. У нас появляется возможность оценивать с позиций оптимальности планы, построенные в соответствии с какими-нибудь другими требованиями.

Ничего подобного нельзя сделать с критерием ортогональности. Для ортогонального плана мы можем задать четкую числовую меру: отношение $\frac{\text{Пси}}{\text{I}(\mathbf{X}'\mathbf{X})}$, где \mathbf{C}_{ii} - диагональные элементы матрицы $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, должно быть равно единице. Но вот отклонение значения этого отношения от единицы для неортогональных планов мало что нам говорит, ибо здесь одно и то же числовое значение отклонения может характеризовать планы, в которых один раз какой-нибудь один коэффициент регрессии (скажем θ_{0i}) будет сильно закоррелирован только со всеми коэффициентами типа θ_{ij} , в другой раз - план, в котором все коэффициенты регрессии, хотя и в меньшей степени, будут закоррелированы друг с другом.

Ясно, что при интерпретации модели мы будем иметь дело с существенно различными ситуациями. Удается придумать такую компактную меру неортогональности, которая бы отчетливо характеризовала степень коррелированности различных параметров в модели.

И еще одно замечание. Выше мы уже много раз говорили о том, что матрица независимых переменных \mathbf{X} у нас появляется только после того, как оказывается заданной модель. Ясно, что для описания одного и того же явления можно задать несколько моделей, но вот что здесь парадоксально: не для всех моделей, описывающих одинаково хорошо одно и то же явление, можно построить планы, дающие достаточно слабую коррелированность параметров. Рассмотрим здесь в качестве примера хорошо известное уравнение Аррениуса

$$k = k_0 e^{-E/RT},$$

где k - зависимая переменная - константа скорости реакции; R - универсальная газовая постоянная; T - температура; k_0 и E - параметры модели, подлежащие оценке из экспериментальных данных.

Поскольку обычно переменная T изменяется не более чем на 10 - 15% от среднего, в интервале возможного изменения информационная матрица для линеаризованной модели всегда оказывается близкой к вырожденной. Это многократно отмечалось в ряде работ. Наиболее подробный анализ создающейся

здесь ситуации дан в книге Д. Химмельблау. Вырожденный, или точнее почти вырожденный характер матрицы $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ приводит к овражному характеру поверхности для сумм квадратов отклонений, что, конечно, значительно усложняет поиск оценок параметров. С этими трудностями встречался всякий, кто занимался оцениванием параметров в моделях подобного типа. Числовые значения коэффициентов корреляции оценок этих параметров могут доходить до 0,97 и 0,98.

Возникающие при этом трудности в интерпретации модели мы уже рассматривали выше.

В этом случае рекомендуется репараметризация, т.е. переход к новой модели:

$$k = k_0(\tilde{T}) e^{-\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{\tilde{T}}\right)},$$

где \tilde{T} - некоторое среднее значение температуры; $k_0(\tilde{T})$ - "средняя" константа, т.е. новый параметр

$$k_0(\tilde{T}) = k_0 e^{-E/RT}.$$

Параметры $k_0(\tilde{T})$ и E оказываются закоррелированными слабее, коэффициент корреляции при подходящем выборе плана удается снизить до 0,5 и в соответствии с этим резко сужаются совместные доверительные границы. Но экспериментаторам часто все же не нравится введение новой непривычной константы - это затрудняет привычную интерпретацию и, кроме того, новые результаты оказываются несовместимыми со старыми.

Таким образом, даже при изучении одного и того же явления возможности построения хорошего плана эксперимента определяются выбором модели. Планирование эксперимента само по себе не может улучшить физический смысл модели, оно улучшает только ее статистические свойства. Если, скажем, исследователь при изучении кинетики химического процесса неверно записал промежуточные, непосредственно не измеряемые реакции, то планирование даст ему только возможность оценить некоторым образом параметры этой неверно записанной модели. Эта модель может даже оказаться в статистическом смысле очень хорошей, если использовать для целей интерполяции. Дефектность может выявиться только при экстраполяции. Но ведь во многих случаях модели только и строятся для того, чтобы знать то направление в пространстве

ве независимых переменных, куда нужно двигаться дальше, чтобы получить наиболее благоприятные результаты.

Планирование эксперимента может использоваться для дискриминации конкурирующих гипотез, т.е. для выбора лучшей из нескольких, предложенных априори. И здесь, если даже и говориться о том, что ведется поиск модели, задающей механизм явления, на самом деле с помощью планирования эксперимента отбирается только та модель, которая обладает наилучшей интерполяционной силой в области, отведенной для исследования. Формализация наших представлений об эксперименте и введение в обиход таких понятий, как "эффективность плана", "выбор оптимальной модели", не должны затуманивать реального физического смысла того, что мы при этом имеем в виду.

Несколько слов об общей постановке задачи при втором подходе, когда речь идет о стратегии в целом. К сожалению, здесь вряд ли можно сформулировать какие-либо достаточно общие высказывания. При первой постановке задачи, когда мы рассматривали статистические оптимальные планы, все было достаточно ясно: перед нами была модель — цель нашего исследования и мы могли составить матрицы X и соответственно $(X^T X)/N$ и $(X^T X)^{-1} N$. После этого сразу становилось ясно, в каких терминах можно вести разговор о том, что есть хороший эксперимент. Высказывания сразу приобрели достаточно общий характер. Когда же речь идет о динамических задачах — о стратегии всего исследования, таких возможностей у нас нет. Приходится каждый раз придумывать какую-то свою, подходящую для данного конкретного случая систему действий, записывать ее на математическом языке. И все же сейчас накопилось много хорошо продуманных высказываний о стратегиях исследования в широкой постановке задачи, идеальное содержание которых изложено в гл. У нашей книги, упоминавшись на стр. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Налимов В.В., Чернова Н.А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов.—М., Наука, 1965.
2. Налимов В.В. Теория эксперимента.—М., Наука, 1971, 207 с.
3. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента.—М., Наука, 1971, 312 с. с ил.

4. Голикова Т.И., Панченко Л.А., Фридман М.З. Каталог планов второго порядка. М., Изд-во МГУ, 1975, ч. 1 387 с. с ил.; ч. II 384 с. с ил.

5. Химмелльбау Д. Анализ процессов статистическими методами. Пер. с англ. — М.: Мир, 1973, 957 с. с ил.

Налимов Василий Васильевич

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА

Ответственный за выпуск В.С. Фетисов

Л. 97916

Формат 60x84 1/16
Тираж 300 экз.

Подписано в печать 2/4н - 1982 г.
Объем 1,75 пл. Уч.-изд.л. 1,5
Цена 10 коп. Заказ 1677

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31