

Федеральное агентство по образованию
Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

**О.В. Нагорнов, С.А. Тюфлин,
Ю.В. Коновалов, А.Б. Костин**

Обратные задачи палеотермометрии

*Рекомендовано УМО “Ядерные физика и технологии”
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 517.9 (075)
ББК 22.311я7
О-23

Обратные задачи палеотермометрии / О.В. Нагорнов, С.А.Тюфлин, Ю.В. Коновалов, А.Б. Костин. М: МИФИ, 2008. – 176 с.

Учебное пособие рассчитано на студентов, специализирующихся по направлению «Прикладная математика и информатика». В книге рассматриваются методы решения обратных задач математической физики в приложении к задачам определения краевого условия для уравнений параболического типа. Основное внимание уделяется задаче определения прошлых температур поверхности Земли по данным скважинных измерений температуры и геохимического состава извлеченных ледниковых кернов, представляющих собой условия переопределения.

Пособие предназначено для студентов старших курсов, а также для аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математического моделирования и решения обратных задач в научных исследованиях.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент доктор физ.-мат. наук, профессор Н.А. Кудряшов

ISBN 978-5-7262-1092-6

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	4
2. Измерения температурного профиля в скважине. Температуры поверхности и температуры приземного слоя воздуха.....	9
3. Распространение тепла в горных породах и ледниках.....	15
4. Математическая постановка задачи распространения тепла в горных породах	18
5. Численное решение задачи распространения тепла в горных породах	70
6. Решение задачи распространения тепла в горных породах с постоянными свойствами среды.....	75
7. Альтернативная постановка задачи распространения тепла в горных породах с постоянными свойствами среды.....	78
8. Оценка глубины проникновения температурных колебаний различных периодов	81
9. Математическая постановка задачи распространения тепла в ледниках	83
10. Численное решение задачи распространения тепла в ледниках .	87
11. Математическая постановка задачи распространения тепла в ледниках с постоянными свойствами среды и линейным профилем адвекции	90
12. Математическая постановка обратной задачи для ледников и горных пород.....	94
13. Методы реконструкции температуры поверхности по данным измерений температурного профиля в скважинах для ледников и горных пород с переменными свойствами среды	106
14. Методы реконструкции температуры поверхности по данным измерений температурного профиля в скважинах для ледников и горных пород с постоянными свойствами среды.....	156
Список литературы.....	163

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы решения обратных задач позволяют определить прошлые температуры Земли. Возможно, самое раннее утверждение, что изменения климата влияют на подземные температуры, было сделано Lane (1923) в контексте оценки влияния оледенения в Плейстоцене и таяния в Голоцене на измерения температуры в шахтах около южного края Верхнего Озера (Lake Superior). Позже Hotchkiss и Ingersoll (1934) проанализировали эти температуры, пытаясь установить дату завершения последнего оледенения. Впервые детальная реконструкция климата на нескольких промежутках времени была проведена Cermak (1971). Анализ геотермических данных, полученных с севера Аляски [Lachenbruch and Marshall, 1986] поставил исследования скважинных температур в контекст обсуждений глобального потепления и послужил толчком к дальнейшему изучению климата в этом направлении.

С тех пор как Cermak (1971) провел первую реконструкцию климата по данным измерений температуры в скважине для небольшого региона в Канаде, было проведено множество различных реконструкций на всех континентах. Проводя реконструкции, исследователи применяли различные подходы, методы, временную параметризацию, сглаживание и стабилизирующие параметры. Наиболее интересные единичные реконструкции для отдельно взятой скважины – это реконструкции по данным из трех ледниковых скважин в Гренландии [Dahl-Jensen et al., 1998; Clow, 1998; Clow and Waddington, 1999] и реконструкции по данным Арктических ледников, подверженных летнему таянию [Nagornov et al., 2005]. Также интересны глобальные реконструкции по большому количеству скважин, для всего Земного шара и каждого полушария в отдельности [Huang et al., 2000].

Три ледниковые скважины в Гренландии – это GRIP и GISP2 в центральной Гренландии и Dye 3 на юге Гренландии. Из этих скважин были получены точные измерения температуры на достаточно больших глубинах. Скважина GRIP, к примеру, достигает глубины порядка 3 км. Скважины были пробурены в однородной среде без гидрологических возмущений на равнинных поверхностях, не имеющих каких-либо особенностей. Таким образом, эти скважины позволяют провести очень хорошие реконструкции историй тем-

пературы поверхности. Эти реконструкции [Dahl-Jensen et al., 1998; Clow, 1998; Clow and Waddington, 1999], проведенные методом Монте-Карло, показывают, что во время последнего ледникового максимума, т.е. примерно 25 тысяч лет назад, температура в центре Гренландии была примерно на 20-25⁰С ниже, чем сейчас. От последнего ледникового максимума до 8 тысяч лет назад температура монотонно увеличивалась. Затем последовал так называемый климатический оптимум от 8 до 4 тысяч лет назад, когда температура была примерно на 1,5-2,5⁰С выше, чем сейчас. Также имеет смысл отметить резкое потепление, начавшееся в середине девятнадцатого столетия и закончившееся лишь несколько десятилетий назад. Реконструкции истории температуры поверхности для скважин GRIP и Dye 3 на двух промежутках времени (последние восемь тысячелетий и два тысячелетия) можно видеть на рис. 1.1.

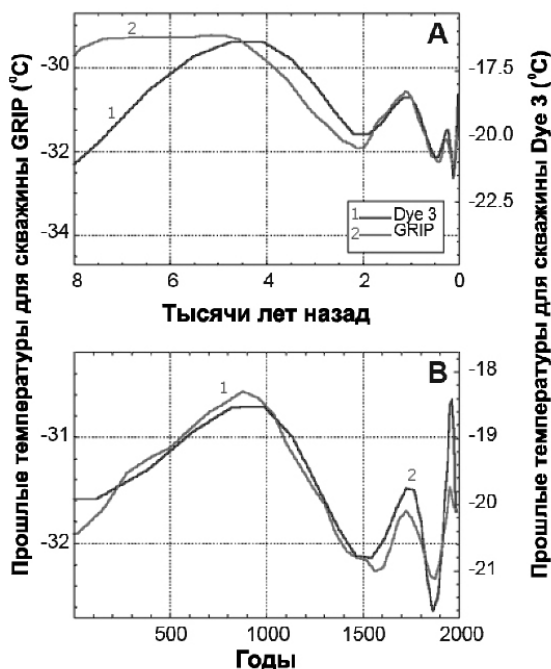


Рис. 1.1. Восстановленные истории изменения температуры для скважин Dye 3 (1) и GRIP (2) [Dahl-Jensen et al., 1998]

Арктические ледники, подверженные летнему таянию, это ледниковые шапки Академия Наук и Аустфонна. Скважины на этих ледниках были пробурены в 1986/87 гг., в местах 80.50⁰ с.ш., 94.83⁰ в.д. и 79.85⁰ с.ш., 24.14⁰ в.д., для ледников Академия Наук и Аустфонна соответственно [Zagorodnov, 1988; Arkhipov, 1999]. По данным температурного профиля и относительной концентрации изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$ для этих скважин были проведены реконструкции температуры на поверхности и на глубине 10 м методом регуляризации по Тихонову [Nagornov et al., 2005]. Обе реконструкции (рис. 1.2, 1.3) показывают значительное резкое потепление, наступившее в начале 19-го века.

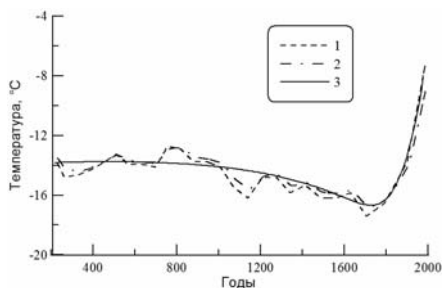


Рис. 1.2. Реконструкции температур для ледникового купола Академия Наук: 1 и 2 – на поверхности и на глубине 10 м, основанные на калибровке относительной концентрации изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$, 3 – на глубине 10 м, проведенные методом регуляризации по Тихонову [Nagornov et al., 2005]

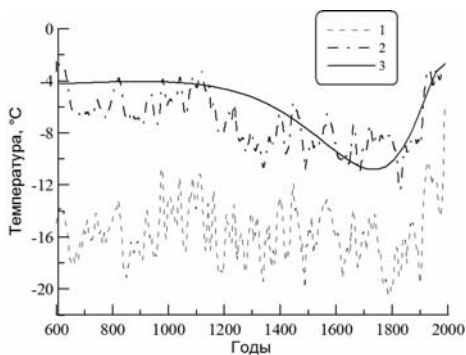


Рис. 1.3. Реконструкции температур для ледникового купола Аустфонна: 1 и 2 – на поверхности и на глубине 10 м, основанные на калибровке относительной концентрации изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$, 3 – на глубине 10 м, проведенные методом регуляризации по Тихонову [Nagornov et al., 2005]

Планетарные реконструкции историй температуры поверхности для Земного шара и реконструкции для каждого полушария в отдельности были проведены простым усреднением индивидуальных температурных историй для каждой скважины. Впервые подобная реконструкция была проведена для всего Земного шара по 358 скважинам, находящимся на востоке Северной Америки, в центральной Европе, Южной Африке и Австралии [Pollack et al., 1998]. Данная реконструкция показала, что глобальная температура поверхности за последние 500 лет увеличилась на один градус, при этом половина этого увеличения произошла в двадцатом столетии. В 2000 году были проанализированы уже 616 температурных профилей со всех континентов, кроме Антарктиды [Huang et al., 2000]. Были построены реконструкции истории температуры поверхности, как для всего Земного шара, так и для каждого полушария. Эти реконструкции показывают схожие результаты, т.е. общее потепление приблизительно на один градус за 500 лет, в основном произошедшее за последнее столетие (Рис. 1.4).

Также отметим реконструкцию истории температуры поверхности за последние пять столетий для России, проведенную по 101 температурному профилю из скважин, находящихся в основном на Урале и в Сибири [Pollack et al., 2003]. Данная реконструкция показывает потепление где-то на один градус за прошлые пять столетий, при этом за последнее столетие температура повысилась примерно на $0,65^{\circ}\text{C}$.

В данной книге излагаются методы решения обратных задач восстановления граничного режима – температуры поверхности Земли в прошлом. Проводится сравнение различных методов реконструкций температур.

Авторы выражают искреннюю благодарность сотрудникам Института географии РАН В.Н. Михаленко, О.Н. Соломиной и сотрудникам Byrd Polar Research Center (Ohio State University) В.С. Загороднову, и Lonnie Thompson за многочисленные обсуждения и предложения.

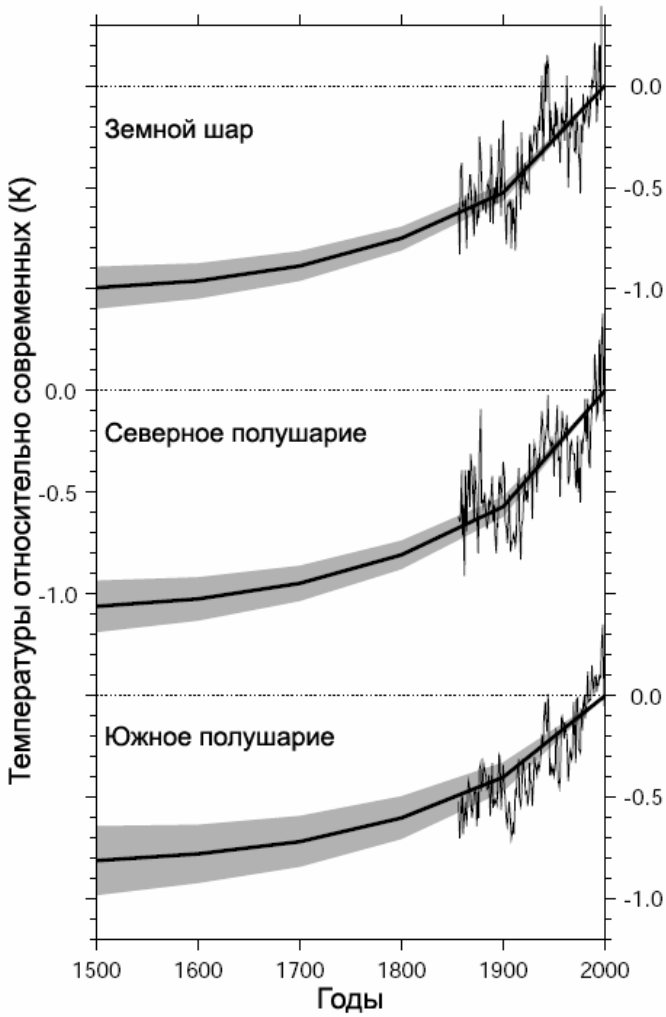


Рис. 1.4. Реконструкции историй температуры поверхности для всей планеты и каждого полушария [Huang, 2004]. Для сравнения также изображены соответствующие серии инструментальных записей с середины 19 в. [Jones et al., 1999]

2. ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФИЛЯ В СКВАЖИНЕ. ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ ВОЗДУХА

Пространственные изменения температуры на поверхности нашей планеты определяются преимущественно балансом приходящего тепла (в основном солнечного) и исходящего тепла от Земли. Именно с этим и связан различный характер климата на разных широтах. Такое простое широтное распределение тепла определяется различиями альбедо земной, водной и покрытой льдом поверхности, а также атмосферной и океанической циркуляцией, которые перераспределяют тепло по поверхности планеты. Поток энергии, достигающий поверхности Земли от Солнца, приблизительно в 4000 раз больше, чем поток энергии из недр Земли. В связи с этим, температура поверхности планеты зависит скорее от внешнего воздействия, чем внутреннего. Локальная температура на поверхности Земли является результатом воздействия различных физических и биологических процессов, происходящих в атмосфере, на Земле и в ее глубинах [Geiger, 1965; Van Wijk, 1963; Sellers, 1992; Sellers et al., 1997; Putnam and Chapman, 1996], которые влияют на баланс тепла. Эти процессы являются совокупностью таких факторов, как скрытые и явные источники тепла; осадки; характер рельефа и растительности поверхности; химические составляющие, коэффициент проницаемости, теплопроводность и содержание влаги в породе; ветра; и многих других. Кроме того, относительная значимость каждого фактора меняется со временем через дневные и сезонные колебания, а также через долгосрочные изменения, связанные с использованием земли, растительностью и климатом. Такие изменения температуры на твердой поверхности Земли затем распространяются вглубь посредством теплопроводности [Carslaw and Jaeger, 1959].

Температуру под поверхностью Земли обычно определяют, помещая термометр на конкретную глубину в скважине и измеряя температуру в этой точке. Этот процесс последовательно повторяется на различных глубинах, пока не будет получен профиль температуры. Другой вариант измерений использует некоторое количество температурных датчиков, устанавливаемых вдоль кабеля, который помещается в скважину, тем самым, позволяя проводить длительные наблюдения температуры на выбранных глубинах. Для измерений на

малых глубинах термометры могут быть зарыты непосредственно в грунте или снежном покрове. Температурные профили также получали с различных уровней подземных шахт, где термометры были вставлены в стены горизонтальных стволов шахт, чтобы измерить температуры нетронутых пород, невозмущенные открытием шахт и туннелей. В первых измерениях температурного профиля использовались стеклянные жидкостные термометры с точностью порядка 0.1°C , в последние же несколько десятилетий для измерений применялись термометры электрического сопротивления с точностью порядка 0.01°C .

С целью определения геотермического теплового потока Земли по всему миру были пробурены тысячи скважин, в которых были измерены температуры [Pollack et al., 1993]. В связи с этим существует достаточно большое количество данных, но из-за большого количества исследователей и различных методов измерений, данные являются неоднородными. Неоднородность данных наблюдается в различных глубинах скважин, так как изначально геофизики интересовались только измерениями теплового потока из центра Земли, поэтому они отбрасывали данные по приповерхностным температурам в скважине. Также неоднородность проявляется в различных интервалах измерений по глубине, различной информации о физических свойствах среды, геологической структуре и характере рельефа местности, где расположена скважина. Однако даже и с такой неоднородностью можно построить вероятные реконструкции климата во многих частях земного шара. По оценкам, где-то одна из десяти скважин пригодна для изучения климата.

Кроме скважинных данных существуют данные по подземным температурам, которые являются результатом измерений температуры почвы при метеорологических и сельскохозяйственных исследованиях [например, Baker and Ruschy, 1993; Osterkamp and Romanovsky, 1996]. Эти измерения обычно делают на маленьких глубинах, от нескольких сантиметров до нескольких десятков метров, с постоянной установкой термометров, позволяя проводить измерения изменений температуры на различных глубинах со временем. Такие данные часто сопровождаются измерениями температуры атмосферы и других метеорологических переменных на поверхности и около нее, а также данными по различным физическим и

химическим параметрам почвы. Хотя эти измерения на маленьких глубинах и могут предоставить информацию об истории температуры поверхности лишь на интервале измерений, они могут служить полезным дополнением к реконструкциям длительных температурных историй, полученных из температурных профилей с больших глубин.

Когда метеорологические, топографические и растительные условия благоприятны, температуры в скважине описывают изменения климата удивительно хорошо. В начале 90-х годов прошлого столетия были проанализированы температурные профили из шести скважин в пустыне западной Юты [Chisholm and Chapman, 1992]. Скважины, пробуренные в 1978 году специально для измерений температуры, были расположены в местах, где тепловые возмущения, вызванные топографией, подземными течениями, озерами, снежным покровом или деятельностью человека, были минимальными. Что еще более существенно, на той же территории, где располагались скважины, было семь метеорологических станций, где записи температуры велись с 1891 года. Результаты исследований говорят, что на данной территории происходило потепление. У пяти скважин температурные профили отображают увеличение температуры в среднем на $0,4^{\circ}\text{C}$ в течение нескольких прошлых десятилетий и лишь одна показывает похолодание на $0,8^{\circ}\text{C}$. Каждый измеренный температурный профиль коррелирует с данными по температуре воздуха с соответствующей ближайшей метеостанции. Даже скважина, результаты измерений температуры в которой указывают на похолодание, является самой ближней к единственной метеостанции в данном регионе, где среднегодовые температуры воздуха упали в течение прошлого столетия. Также были построены температурные профили, которые основывались на известном геотермическом потоке тепла и на метеорологических данных. Эти теоретические кривые имеют очень хорошее сходство с измеренными профилями. К сожалению, такие хорошие сходства скорее исключение, чем правило. Температурные профили в скважине и метеорологические данные обычно не совпадают в таких подробностях. Температуры в пределах Земли могут честно зарегистрировать тепловую историю, происходящую на твердой поверхности Земли, а метеорологи в основном имеют дело с температурой воздуха. Тепловая связь

атмосферы и поверхности Земли – достаточно сложный процесс, и температурный сигнал, который получает поверхность Земли, часто является фильтрованной версией того, что претерпевает атмосфера.

В регионах, в которых происходит накопление снега в течение зимы, получающийся снежный покров эффективно изолирует Землю от самых холодных фаз годового цикла [Goodrich, 1982; Lewis and Wang, 1992; Beltrami and Taylor, 1995; Gosnold et al., 1997]. Изменения, происходящие в течение лета, не сталкиваются ни с какими проблемами и хорошо передаются в глубь Земли. Такое “зимнее экранирование” может привести к разности несколько градусов между среднегодовой температурой поверхности Земли и температурой воздуха; эта разность меньше заметна в регионах, где зимы не слишком суровы. Даже на высоких широтах верх постоянно замороженного грунта отделен от приземного слоя воздуха снегом и активным слоем, на котором происходит таяние и замораживание каждый год. Следовательно, хотя и постоянно замороженные породы обеспечивают хорошую среду для записей изменений температуры поверхности, нужно описать модель распространения тепла через эти слои, чтобы провести реконструкции этих изменений.

Кроме этого, аспекты локальной топографии, гидрогеологии и образцы растительной жизни могут вызвать подземное нагревание или охлаждение, которое при реконструкции может быть принято за региональное изменение климата [Cermak et al., 1992; Whiteford, 1993; Safanda, 1994; Lewis, 1998; Lewis and Wang, 1998; Skinner and Majorowicz, 1999]. Например, геотермический градиент обычно увеличивается в районах под долинами и уменьшается под холмами. Этот эффект исчезает с глубиной, находящейся ниже неровностей поверхности, но на малых глубинах он вызывает отклонения температуры, тем самым, имитируя изменения температуры поверхности. Также множество озер не промерзают полностью в зимнее время и их теплые нижние части влияют на близлежащие подземные температуры. Течения подземных вод могут аналогично повлиять на подземные температуры и внести некоторые изменения в температурный профиль, которые при некоторых обстоятельствах выглядят точно так же, как и отклик на изменение температуры поверхности. Сельскохозяйственные культуры или тенистые деревья могут изолировать поверхность Земли от летнего тепла, при этом позволяя ей

охлаждаться во время зимы. В местах пребывания людей картина становится еще более сложной. Вырубка лесов и ведение сельскохозяйственной деятельности приводит к тому, что поверхность Земли получает больше солнечного света. Осушение болотистых местностей устраняет охлаждающий эффект от испарений и приводит к нагреванию поверхности. Урбанизация также приводит к нагреванию, так как дороги и здания поглощают солнечную энергию и передают ее поверхности Земли. Даже тепло, которое просачивается от фундамента зданий в зимнее время, влияет на связь между подземными температурами и температурами воздуха. Многие из таких воздействий на окружающую среду стали широко распространенными в течение прошлого столетия.

К счастью, многие такие тепловые возмущения можно смоделировать и оценить их величины. Кроме того, геотермический архив не ограничен одной единственной скважиной, а скважины, пробуренные специально для реконструкции температуры поверхности, практически лишены таких проблем. Также существует подход, который фокусируется на совокупности региональных скважинных данных, для того, чтобы рассмотреть, есть ли у скважин, расположенных на достаточно больших расстояниях, общие возмущения в их температурных профилях. Поскольку маловероятно, что у всех скважин будет идентичная топография, растительность, геологическая структура или гидрологические особенности и, соответственно, не климатические возмущения профиля, общее возмущение температурного профиля, может быть благополучно приписано климатическим изменениям [Pollack, 1993].

Скважин в ледниках существует не так много, как скважин в породах, но ледниковые температурные профили избавлены от большинства вышеописанных факторов, которые могут привести к ложным не климатическим сигналам. Это связано с тем, что скважины в ледниках бурятся на равнинных поверхностях, ледники расположены вдали от мест поселений людей и, соответственно, избавлены от большинства антропогенных факторов. Растительный и животный мир также не может повлиять на температурный профиль. Кроме того, ледники являются достаточно однородными. Одной из основных проблем для ледников является сложность интерпретации температурного профиля на верхних десяти метрах, что связано с

недостаточно хорошими существующими моделями, описывающими распространение тепла в этой области. Также для ледников необходимо учитывать адвекцию годовых слоев в леднике.

3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В ГОРНЫХ ПОРОДАХ И ЛЕДНИКАХ

Распределение температур ниже земной поверхности зависит в основном от двух видов процессов [например, Shen and Beck, 1983, Dahl-Jensen and Johnsen, 1986, Shen and Beck, 1991, Pollack and Huang, 2000]. Первым видом процессов являются пространственные и временные изменения температуры на поверхности, которые обусловлены топографией, характером растительности, гидрологией и климатическими процессами, происходящими на разных временных масштабах. Вторым видом процессов является исходящий из недр Земли тепловой поток, который отражает длительные устоявшиеся геологические процессы. Изменения температуры поверхности происходят на значительно меньших масштабах времени, чем геологические процессы, следовательно, можно сказать, что возмущения температуры, являющиеся результатом изменений климата, наносятся на квазистационарный температурный профиль от геотермического потока. В идеальных однородных горных породах данный профиль является линейным увеличением температуры с глубиной.

В отсутствие каких-либо климатических, или других изменений на поверхности Земли, этот квазистационарный температурный профиль распространялся бы до самой поверхности. Следовательно, экстраполируя глубинную часть температурного профиля к поверхности, геофизики могут сказать, какая температура была на поверхности до начала резкого изменения температуры на ней. Разность между значениями экстраполируемого профиля на поверхности и нынешней температуры поверхности показывает величину, на которую изменилась температура поверхности Земли. Кроме того, глубина, на которой измеренный температурный профиль отклоняется от невозмущенного геотермического градиента, связана со временем, когда начались соответствующие изменения. Детали профиля между поверхностью и невозмущенной областью отображают информацию о темпе и характере изменений температуры на поверхности. Так, похолодание на поверхности будет охлаждать породу близко к поверхности, увеличит температурный градиент на небольших глубинах и приведет к температурному профилю, изображенному на рис. 3.1. Потепление же приводит к небольшому отри-

цательному градиенту на небольших глубинах, как изображено на рис. 3.1.

Изменения температуры на поверхности Земли во времени могут быть рассмотрены как тепловые возмущения различных периодов с различными амплитудами и фазами. Теория теплопроводности [Carslaw and Jaeger, 1959] показывает, что такие возмущения на поверхности распространяются вглубь, как тепловые волны и их амплитуды экспоненциально затухают с глубиной. Затухание колебаний температуры во время проникновения в глубь Земли зависит от частоты изменений температуры на поверхности. Колебания длительного периода затухают с глубиной медленнее, чем колебания более коротких периодов. Таким образом, породы действуют как низкочастотный фильтр, позволяя длительным колебаниям проникать на большие глубины, чем колебаниям с малым периодом. Суточные и сезонные колебания, хоть и обладают достаточно большими амплитудами по сравнению с длительными тенденциями в изменениях климата, они не проникают на глубины более чем несколько метров и несколько десятков метров, соответственно. К примеру, проникновение сезонных колебаний в глубь Земли во время летнего и зимнего сезонов, изображено на рис. 3.2. Из рисунка видно, что сезонные колебания не проникают на глубины ниже порядка 10-20 м. И только более продолжительные колебания температуры на поверхности оставляют свой след на больших глубинах. К примеру, столетний цикл может наблюдаться на глубинах порядка 150 м, а тысячелетний примерно на 500 м.

Скорость распространения сигнала преимущественно зависит от коэффициента теплопроводности среды. Основная масса горных пород имеет такой коэффициент теплопроводности, что все изменения температуры, происходящие на поверхности за последнее тысячелетие, оставили свой след в верхних 500 м земной коры.

Таким образом, для проведения реконструкций температурных историй необходимо отделить от наблюдаемого температурного профиля стационарный профиль температуры, связанный с геотермическим потоком Земли. Температурный профиль, остающийся после разделения, иногда называют “остаточный температурный профиль” [Chisholm and Chapman, 1992]. Именно этот профиль при анализе дает информацию об изменениях температуры на поверхно-

сти. Разделение измеренного профиля в основном проводится визуально, а также с помощью некоторых алгоритмов [Shen & Beck, 1991].

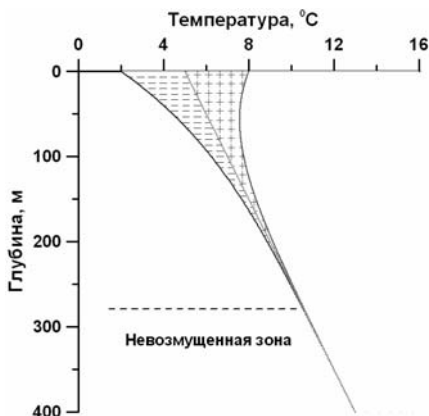


Рис. 3.1. Пример возмущения стационарного температурного профиля (прямая) при похолодании (слева от стационарного профиля) и потеплении (справа от стационарного профиля)

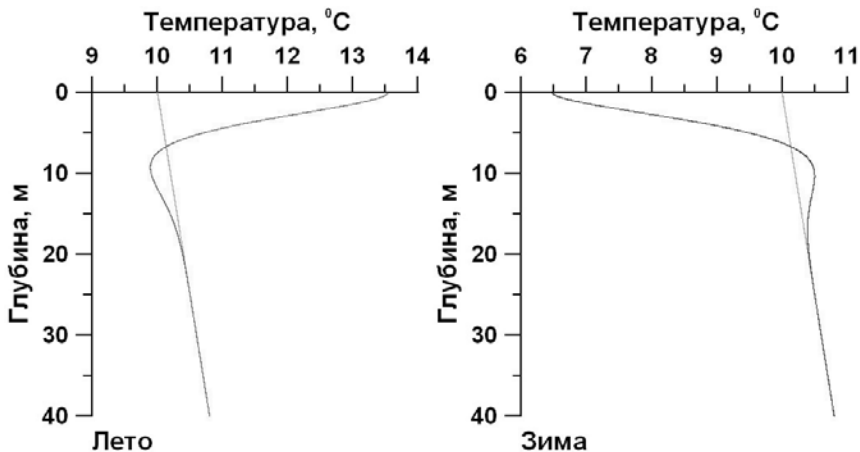


Рис. 3.2. Пример проникновения сезонных колебаний в глубь Земли. Изображены температурные профили в скважине в летнее и зимнее время и стационарный профиль (прямая)

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

4.1. Особенности процессов тепло- и массопереноса в ледниках

Рассмотрим процессы тепло- и массопереноса в ледниковых покровах (куполах), т.е. исследуем факторы, формирующие температурное поле в ледниках. А именно, определим характер изменения плотности в ледниковых куполах Арктики на основе экспериментальных данных, полученных для ледникового купола Аустфонна, и, соответственно, установим характер изменения теплофизических свойств фирна (коэффициента теплопроводности, теплоемкости). Ниже проводятся оценки скорости изменения температуры вследствие деформационных процессов в леднике. На основе этих исследований устанавливается математическая модель, описывающая процесс распространения тепла в ледниковом куполе, которая в дальнейшем используется для решения основной задачи – реконструкции температуры поверхности ледника по экспериментальному профилю температуры в скважине [Нагорнов, Коновалов, 1999; Nagornov et al., 1999].

Влияние начального распределения температуры на конечный профиль температуры и определение времени релаксации для процесса распространения тепла в ледниковом покрове ранее рассматривались в работах [Нагорнов, Коновалов, 1999; Нагорнов и др., 2001]. Это исследование также имеет значение для решения обратной задачи – реконструкции температуры поверхности ледника, так как начальное распределение температуры является неизвестным параметром этой задачи. Таким образом, время релаксации не должно превосходить времени (промежутка времени), на котором проводится реконструкция температуры поверхности, чтобы приближенно заданное начальное условие не искажало результата реконструкции этой температуры.

Также рассмотрим аналитические решения прямой задачи для уравнения теплопроводности в случае гармонически осциллирующей температуры поверхности. На основе этих решений (исходя из структуры профиля, соответствующего гармонически осциллирующей граничной температуре) и погрешности измерения темпера-

туры в скважинах ледников, могут быть сделаны некоторые заключения относительно эффективности реконструкции гармонически осциллирующей температуры поверхности, при этом, не прибегая непосредственно к решению обратной задачи [Нагорнов и др., 2001].

Рассмотрим вопрос о влиянии нестационарности граничного условия вблизи основания ледникового купола, вызванной долговременными изменениями температуры поверхности, на результат реконструкции этой температуры [Нагорнов, Коновалов, 2001].

4.1.1. Влияние неоднородности теплофизических свойств фирна на температурное поле в леднике

Процесс распространения тепла в ледниковом покрове (куполе) в общем случае описывается трехмерным уравнением теплопроводности с учетом вертикальной и горизонтальной адвекции льда, а также источников тепла, связанных с внутренними деформациями [Paterson and Clarke, 1978; Cuffey et. al. 1994]. Теплофизические свойства льда (фирна) варьируются с глубиной вследствие изменения плотности и температуры. Так, плотность фирна в верхних слоях арктических ледниковых куполов в результате процессов метаморфизма и уплотнения резко возрастает от значения $\approx 380 \text{ кг/м}^3$ на поверхности до значения $\approx 850 \text{ кг/м}^3$ на глубине $\approx 50 \text{ м}$ и на глубине $\approx 100 \text{ м}$ достигает значения плотности монолитного льда [Paterson and Clarke, 1978; Arkhipov, 1999]. По данным скважинных измерений, колебания температуры в ледниковых куполах Арктики, обусловленные изменениями климата, а также отличием средней температуры поверхности от температуры вблизи основания под действием геотермического потока, достигают значений $5\text{--}10^\circ\text{C}$ (например для ледника Аустфонна) [Arkhipov, 1999].

Тем не менее, в большинстве случаев процесс распространения тепла в ледниковом куполе, начиная с глубины деятельного слоя ($\approx 10\text{--}15 \text{ м}$), успешно описывается одномерным и однородным уравнением теплопроводности с учетом вертикальной адвекции годовых слоев [Blatter, 1987]. Проводимое исследование имеет цель – установить (на примере ледника Аустфонна) насколько адекватно такая модель описывает процесс распространения тепла в арктических ледниках и, таким образом, определить может ли эта модель

быть использована для решения обратной задачи реконструкции температуры поверхности по данным измерений температуры в скважине.

4.1.1.1 Структура снежно-фирновой толщи. Механика течения льда в ледниковом покрове

Ежегодно на поверхность ледникового покрова (купола) выпадает годовой слой осадков, толщина которого для различных ледников колеблется от нескольких сантиметров (для Антарктиды) до нескольких десятков сантиметров (для арктических ледниковых куполов и ледникового покрова Гренландии). Под давлением вышележащих слоев фирн непрерывно деформируется, что приводит к вертикальной адвекции годовых слоев в ледниковом покрове. Скорость, с которой происходит вертикальное движение слоев в верхней части ледника, является величиной порядка скорости аккумуляции осадков и уменьшается по мере того, как плотность фирна в годовых слоях, увеличиваясь, достигает плотности монолитного льда. Например, в ледниковом куполе Devon Island (с высотой порядка 300 м) верхние 100 м фирна составляют слои, образовавшиеся за последние 500 лет, а последние 5 м льда в основании ледникового купола состоят из слоев, образовавшихся в период от 125 тыс. лет до 10 тыс. лет назад [Paterson and Clarke, 1978].

Отметим, что для ряда арктических ледниковых куполов имеют место процессы сезонного таяния фирна. Вода, образующаяся в результате сезонного таяния, впоследствии рекристаллизуется, создавая прослойки льда, отделяющие слои фирна друг от друга. Таким образом, структура снежно-фирновой толщи в таких ледниках представляет собой чередующиеся слои рекристаллизованного льда и фирна. Эта структура, в частности, используется для датировок годовых слоев с помощью арифметического подсчета слоев (прослоек рекристаллизованного льда) в арктических ледниках [Arkhipov, 1999] наряду с методами датировки льда, основанными на изотопном анализе (по изотомам ^{32}Si и ^{14}C , содержащимся в ледниковых кернах [Paterson and Clarke, 1978]).

Наличие сдвиговых напряжений в ледниках (ледниковых покровах) приводит также к течению льда в горизонтальном направлении от центра к периферии. Если ледник имеет продолговатую фор-

му, т.е. один из линейных размеров основания ледника (например, вдоль оси y) в несколько раз превосходит другой размер (вдоль оси x), как, например, для Гренландии, то картина течения льда и форма поверхности ледникового покрова могут быть получены в рамках двухмерной модели течения льда [Nye, 1959; Cutler et. al., 1995] (рис. 4.1). При отсутствии скольжения в базисном слое сдвиговое напряжение линейно возрастает от поверхности к основанию ледника [Cutler et. al., 1995]:

$$\sigma_{xz} = \sigma_b \cdot z / h, \tag{4.1}$$

где $\sigma_b = \rho g h \frac{\partial h}{\partial x}$ ($\frac{\partial h}{\partial x} \approx \sin \varphi$, где φ – угол наклона поверхности ледникового покрова). Скорость деформации под действием сдвиговых напряжений определяется законом Глена для течения льда:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2A |\sigma_{xz}|^n, \tag{4.2}$$

где u – горизонтальная скорость течения льда (ось z направлена от поверхности к основанию ледника (см. рис. 4.1)). Значения показателя степени n варьируются для различных ледников. Например, для Гренландии при реконструкции колебаний ледниковой массы использовалось значение $n = 3$ [Cutler et. al., 1995], для Антарктиды – $n = 10$ [Саламатин и др., 1995].

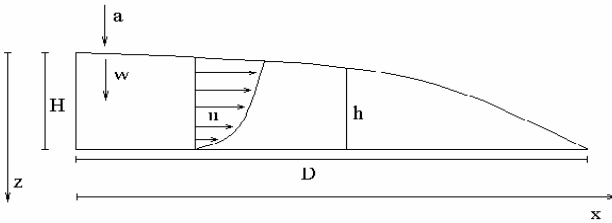


Рис. 4.1. Сечение ледникового покрова вертикальной плоскостью, проходящей через центр ледника, где высота ледника H имеет максимальное значение. Если расстояние от центра до периферии D вдоль оси x (в плоскости сечения) в несколько раз меньше соответствующего расстояния в плоскости yz (перпендикулярной плоскости рисунка), то течение льда в ледниковом покрове фактически можно считать плоским; u – горизонтальная скорость течения льда, w – вертикальная скорость адвекции годовых слоев в леднике, h – высота ледника на расстоянии x от центра, a – скорость аккумуляции осадков

С учетом формул (4.1) и (4.2) профиль скорости горизонтального течения льда в ледниковом покрове определяется выражением:

$$u(x, z) = \bar{u}(x) \psi(\bar{z}), \quad (4.3)$$

$$\text{где } \bar{u} = \frac{2A}{n+2} h |\sigma_b|^n \text{ и } \psi(\bar{z}) = \frac{n+2}{n+1} (1 - \bar{z}^{n+1}), \quad \bar{z} = \frac{z}{h}.$$

В общем случае, вследствие изменения со временем количества осадков, выпадающих на поверхность ледника, происходит накопление или деградация ледниковой массы. Таким образом, высота ледника (в центральной части) изменяется со временем:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a_0(t) - w(H, t), \quad (4.4)$$

где a_0 – скорость аккумуляции осадков, $w(H, t)$ – скорость вертикальной адвекции на поверхности в центральной части ледникового покрова.

Предполагая, что вертикальная скорость на поверхности не зависит от координаты x , т.е. $w(h) = w(H)$, уравнение непрерывности для центральной части ледникового покрова может быть записано в виде [Cutler et. al., 1995]:

$$(w(H) - \dot{a}) \cdot x = \bar{u} \cdot h, \quad (4.5)$$

где \dot{a} – скорость донного таяния.

Уравнение непрерывности для ледникового покрова, записанное в дифференциальной форме, имеет вид:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Принимая во внимание, что $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{h} (w(H) - \dot{a})$ (из выражения (4.5)),

и интегрируя по \bar{z} уравнение непрерывности (4.6), получим выражение для профиля вертикальной скорости адвекции:

$$w(\bar{z}) = a_0(1 - \bar{z}) + \bar{z} \frac{\partial H}{\partial t} + \dot{a} \bar{z} - \frac{\bar{z}}{n+1} \left(a_0 - \dot{a} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) (1 - \bar{z}^{n+1}). \quad (4.7)$$

Для стационарного ледника ($a_0 = \text{const}$ и $w(H) = a_0$), подставляя в уравнение непрерывности (4.5) выражение для средней скорости горизонтального течения льда, после разделения переменных и интегрирования, получим для формы поверхности ледникового покрова параболический закон изменения h от x :

$$h^2 = \left\{ (H^2)^{\frac{n+1}{n}} - 2c_0 x^{\frac{n+1}{n}} \right\}^{\frac{n}{n+1}}, \quad (4.8)$$

где $c_0 = \left(\frac{a_0(n+2)}{2A(\rho g)^n} \right)^{\frac{1}{n}}$ ($\dot{a} = 0$). Таким образом, высота ледникового

покрова в центральной части и расстояние D от центра до периферии связаны соотношением:

$$H = (2c_0)^{\frac{n}{2(n+1)}} \sqrt{D} = \tilde{c}_0 \sqrt{D}. \quad (4.9)$$

Например, для Гренландии $D \approx 400$ км, $H \approx 3,025$ км [Cutler et. al., 1995] и, соответственно $\tilde{c}_0 \approx 4,78 \text{ м}^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, исходя из соотношения высоты ледника H (в центральной части) и расстояния от центра до периферии D , может быть сделана оценка

параметра A в законе Глена (4.2): $A = \frac{2^{n-1} a_0 (n+2)}{(\rho g)^n} \left(\frac{D}{H^2} \right)^{n+1}$. Для

Гренландии получим $A \approx 7.63 \cdot 10^{-25} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^5 \cdot \text{кг}^{-3}$.

Уравнения (4.2) и (4.5), описывающие течение льда, сохраняют вид и для случая аксиальной симметрии (ледникового купола) после замены координаты x на расстояние r от оси симметрии. Уравнение непрерывности для ледникового купола, очевидно, отличается от (4.5) наличием числового множителя: $w(h) \cdot r = 2\bar{u} \cdot h$. Соответственно, радиус основания ледникового купола R и высота в центральной части H в рамках рассматриваемой модели стационарного ледника также связаны соотношением: $H = c\sqrt{R}$.

4.1.1.2. Профили вертикальной скорости адвекции. Относительные глубины залегания слоев

Процессы деформации, связанные с уплотнением фирна под давлением вышележащих слоев, вызывающие вертикальную адвекцию льда (фирна) в ледниковом покрове, а также аккумуляция осадков приводят к увеличению со временем глубин залегания годовых слоев. Изменение относительной глубины некоторого выделенного слоя льда (фирна) определяется уравнением:

$$H(t) \frac{d\bar{h}}{dt} = w(\bar{h}, t). \quad (4.10)$$

Правая часть уравнения (4.10) с учетом выражения для вертикальной скорости адвекции (4.7) имеет вид:

$$w(\bar{h}, t) = a_0(1 - \bar{h}) + \dot{a}\bar{h} - \frac{\bar{h}\sigma}{n_0} \left(a_0 - \dot{a} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \cdot (1 - \bar{h}^{n_0}), \quad (4.11)$$

где $n_0 = n + 1$ и n – показатель ползучести льда в законе Глена. Имитационный параметр σ при отсутствии скольжения в базисном слое равен 1. В общем случае, значение параметра σ заключено в пределах $0 \leq \sigma \leq 1$ [Николаев и др., 1996].

Для ледникового купола Аустфонна, который будет рассмотрен в качестве примера, на границе раздела ледник-порода, вероятно, имеет место фазовый переход [Arkhipov, 1999]. Оценки скорости донного таяния на границе раздела показывают, что ее величина составляет $\approx 2 - 5$ мм/год, в то время как скорость аккумуляции $a_0 \approx 0,3$ м/год. При условиях $\dot{a} \approx 0$ и $\sigma = 1$ выражение для вертикальной скорости адвекции соответственно имеет вид [Николаев и др., 1996]:

$$w(\bar{h}, t) = a_0(1 - \bar{h}) + - \frac{\bar{h}}{n_0} \left(a_0 - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \cdot (1 - \bar{h}^{n_0}). \quad (4.12)$$

Для значений имитационного параметра n_0 в выражении (4.10) справедливы оценки $1 < n_0 < 5$ [Николаев и др., 1996]. При $n_0 = 5$ профиль скорости адвекции отличается от линейного профиля в среднем не более чем на 25% (рис. 4.2). Расширив диапазон зна-

чений параметра n_0 , будем рассматривать значения скорости адвекции, соответствующие линейному профилю, как максимально возможные значения вертикальной скорости движения слоев в ледниковом покрове (куполе), т.е. $w_1(z) < w(z) < w_\infty(z)$, где w_1 соответствует $n_0 = 1$ и w_∞ соответствует линейному профилю ($n_0 = \infty$). Тогда, в стационарном приближении ($a_0 = \text{const}$ и $H = \text{const}$) решения уравнения (4.10) дают следующие оценки для относительной глубины залегания слоя, образовавшегося в момент времени $-t$ в прошлом (рис. 4.3): $\bar{h}_1(t) < \bar{h}(t) < \bar{h}_\infty(t)$, где $\bar{h}_1(t) = t/(t + \tau_0)$, $\bar{h}_\infty(t) = 1 - \exp(-t/\tau_0)$, $\tau_0 = H/a_0$.

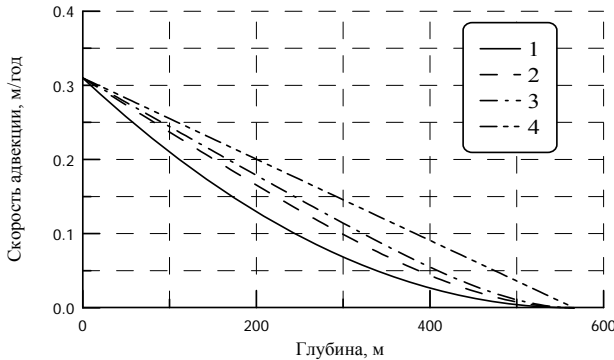


Рис. 4.2. Профили вертикальной скорости адвекции (4.11) для различных значений имитационного параметра n_0 : 1) $n_0 = 1$; 2) $n_0 = 3$; 3) $n_0 = 5$; 4) $n_0 = \infty$ (линейный профиль)

В стационарном приближении время жизни слоя (возраст слоя) определяется выражением:

$$t = H \int_0^{\bar{h}} \frac{d\bar{h}}{w(\bar{h})}. \quad (4.13)$$

Соответственно, для возраста слоя льда, расположенного на относительной глубине \bar{h} , получим следующие оценки, связанные с неопределенностью имитационного параметра n_0 : $t_\infty < t < t_1$, где $t_\infty = -\tau_0 \ln(1 - \bar{h})$ и $t_1 = \tau_0 \bar{h} / (1 - \bar{h})$, $\tau_0 = H/a_0$.

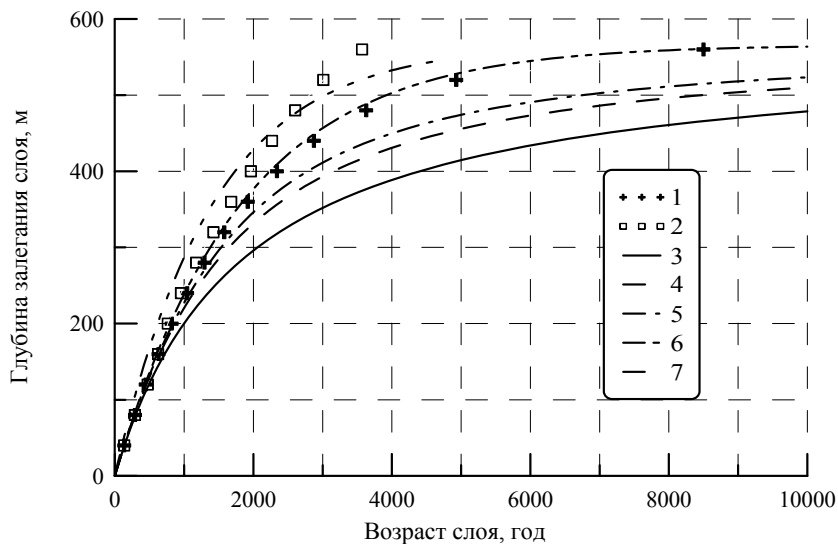


Рис. 4.3. Глубина залегания слоя как функция времени в случае стационарного ледника (решения уравнения (4.10)): 3-6 соответствуют ледниковому куполу Аустфонна ($a_0 = 0,31$ м/год; $H = 566$ м) и следующим значениям имитационного параметра: 3 – $n_0 = 1$; 4 – $n_0 = 3$; 5 – $n_0 = 5$; 6 – $n_0 = \infty$; 7 – глубина залегания слоя для Аустфонна, соответствующая линейному профилю адвекции и значению скорости аккумуляции 0,4 м/год. Значения 1 представляют собой датировки слоев в ледниковом куполе Аустфонна, полученные для экспериментальных значений скорости адвекции с помощью стационарной модели Ная [Arkhipov, 1999]. Значения 2 – датировки слоев в Аустфонна, полученные в результате подсчета годовых слоев [Arkhipov, 1999]

Экспериментальные оценки возраста слоев льда, полученные с помощью стационарной модели Ная (Ney) [Arkhipov, 1999] (с использованием экспериментальных значений скорости адвекции), соответствуют решению уравнения (4.10) для линейного профиля адвекции при $a_0 \approx 0,31$ м/год (рис. 4.3). Оценки возраста льда, основанные на подсчете годовых слоев в ядрах на интервалах 40 м [Arkhipov, 1999], отклоняются от соответствующего решения уравнения (4.10) при $t \geq 1000$ лет, что возможно связано с нестационарностью ледникового купола (накоплением ледниковой массы) в прошлом. Кроме того, следует учитывать, что неопределенность датировок слоев увеличивается с глубиной.

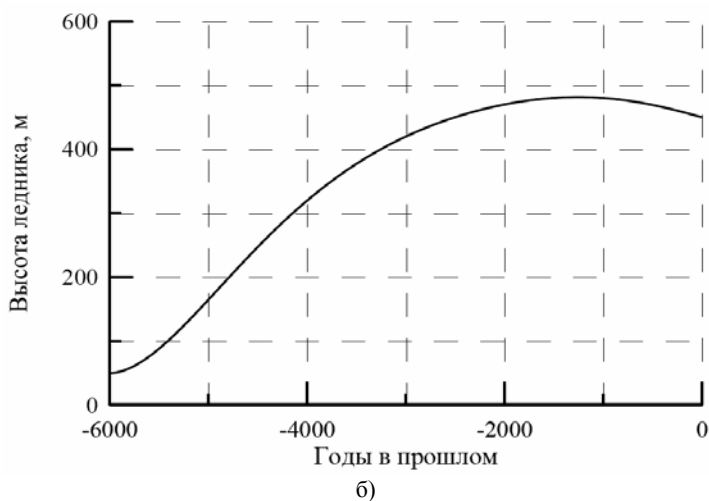
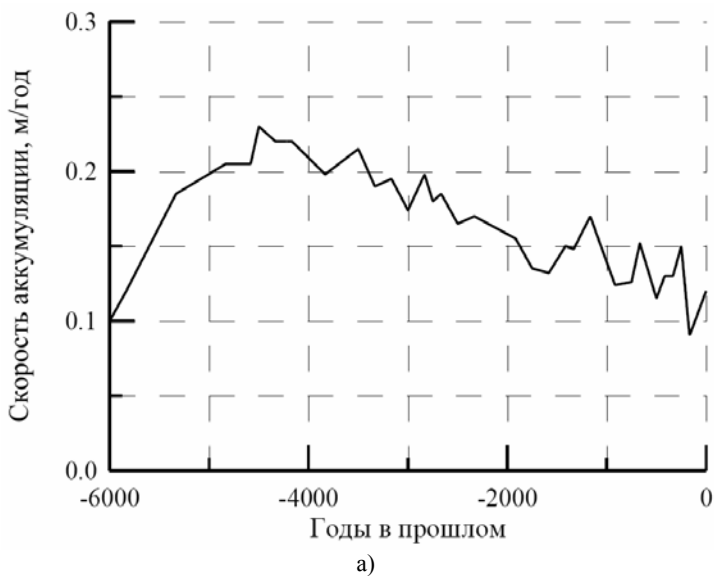
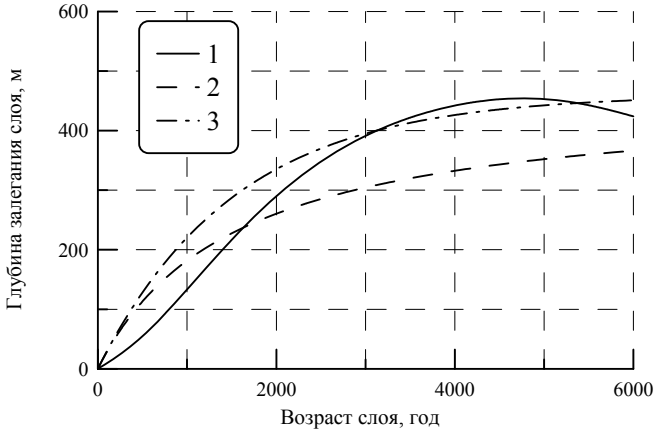


Рис. 4.4. Восстановленные колебания скорости аккумуляции для ледникового купола Вавилова [Николаев и др.,1996], (а); восстановленные изменения высоты для ледникового купола Вавилова [Николаев и др.,1996] (б)

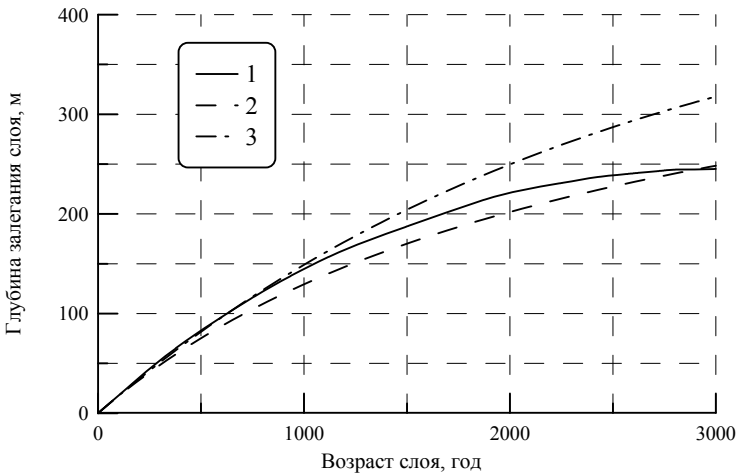
Далее, рассмотрим случай нестационарного ледника. Результаты реконструкции колебаний толщины ледниковых куполов в Арктике (для ледников Вавилова и Академия Наук) [Николаев и др., 1996], свидетельствуют, что в начальные периоды Голоцена происходило интенсивное накопление ледниковой массы, а с начала субатлантического периода (2-2,5 лет назад) до настоящего момента Арктические ледники находились в квазистационарном состоянии (рис. 4.4).

Решение уравнения (4.10) в нестационарном случае (ледник Вавилова) для слоя, образовавшегося в момент времени $t = -6 \cdot 10^3$ лет в прошлом, фактически отражает эволюцию высоты ледникового покрова с начала накопления ледниковой массы (рис. 4.5, а). Это решение соответствует стационарным решениям (при $H \approx 460$ м) для значения скорости аккумуляции $a_0 \approx 0,3$ м/год, что приблизительно в 2 раза выше среднего значения за период квазистационарности (\approx последние 2.5 тыс. лет). В отличие от слоя с возрастом $6 \cdot 10^3$ лет, для слоя, образовавшегося в момент времени $t = -3 \cdot 10^3$ лет, эволюция которого происходила в период, когда ледник находился в квазистационарном состоянии, решение уравнения (4.10) удовлетворяет неравенствам: $h_1(t) < h(t) < h_\infty(t)$, при $a_0 \approx 0,18$ м/год (рис. 4.5, б). Таким образом, отклонение от стационарности за последние 3 тыс. лет могут рассматриваться как неопределенность, связанная со значением имитационного параметра n_0 .

Оценки возраста слоев, полученные из решения уравнения (4.10) в нестационарном случае с данными, восстановленными для ледникового покрова Вавилова (см. рис. 4.4) [Николаев и др., 1996], не соответствуют решениям уравнения (4.10) в стационарном случае (с $a_0 \approx 0,12$ м/год и $H = 460$) для слоев, образовавшихся в период накопления ледниковой массы в первой половине голоцена (рис. 4.6). Причем расхождение решений $h(t_f)$ уравнения (4.10) (t_f – время жизни слоя) и соответствующего решения для стационарного случая при $n_0 = 3$ имеет ту же тенденцию, что и отклонения экспериментальных оценок возраста слоев в леднике Аустрфенна



а)



б)

Рис. 4.5. Глубина залегания слоя в случае нестационарного ледника (ледниковый купол Вавилова): а) для слоя, образовавшегося в момент времени $t = -6 \cdot 10^3$ лет;

б) для слоя, образовавшегося в момент времени $t = -3 \cdot 10^3$ лет.

1 – Решение для адвекции, установленной по косвенным данным;
 2 и 3 – решения уравнения (4.10) в случае стационарного ледника, соответственно для минимальной ($n_0 = 1$) и максимальной (линейный профиль) скоростей адвекции

ции

от решения уравнения (4.10) для случая стационарного ледника (рис. 4.6 и рис. 4.3). Это дает возможность предположить, что указанные отклонения для ледникового купола Аустфонна могут быть обусловлены увеличением ледниковой массы в атлантический и суббореальный периоды голоцена.

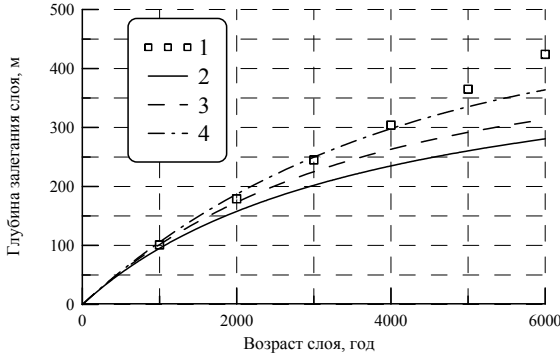


Рис. 4.6. Решения в случае стационарного ледника при $a_0 = 0.12$ м/год, $H = 460$ м, что соответствует современным значениям для ледникового купола Вавилова для значений: 2 – $n_0 = 1$; 3 – $n_0 = 3$; 4 – линейно изменяющаяся адвекция. Значения 1 – оценки возраста слоев с учетом нестационарности ледника (для ледникового купола Вавилова)

4.1.1.3. Распределение плотности в ледниковом покрове (куполе)

Скорость изменения плотности фирна (скорость деформации) под давлением вышележащих слоев описывается уравнением [Bader, 1960]:

$$-\frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{P_f}{\eta}, \quad (4.14)$$

где δ – толщина слоя, ρ – плотность слоя, $P_f = g \int_0^z \rho(z) dz$ – давление вышележащих слоев льда (фирна); η – компрессионная вязкость, которая определяется выражением [Morris et. al., 1997]:

$$\eta = \eta_0 \exp(C\rho + E/(Ru)), \quad (4.15)$$

где $C = 0,024 \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1}$, $E = 50,2 \text{ кДж} \cdot \text{моль}^{-1}$ (энергия активации), R – газовая постоянная, u – температура фирна.

Давление на слой, образовавшийся в момент времени $-t$ в прошлом, определяется выражением $P_f = g a_0 \rho_0 t$, в котором ρ_0 – плотность фирна на поверхности ледника, a_0 – скорость аккумуляции осадков. Таким образом, с точки зрения Лагранжа (переменной Лагранжа в данном случае является время жизни слоя t , индивидуализирующее слои в ледниковом покрове) изменение плотности слоя, образовавшегося в момент времени $-t$, связано с последующим накоплением ледниковой массы соотношением:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{A_0 t}{\eta}, \quad (4.16)$$

где $A_0 = g a_0 \rho_0$. В общем случае нестационарного ледника $A_0 = A_0(t)$ и определяется изменением скорости аккумуляции в прошлом.

Совместное решение уравнений (4.16) и (4.10) дает распределение плотности в ледниковом покрове (куполе) (профиль плотности). Минимальное среднеквадратичное отклонение решения уравнения (4.16) от экспериментальных значений плотности для ледника Аустфонна в случае линейного профиля адвекции достигается при $\eta_0 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ (рис. 4.7).

Значения плотности, полученные из решения уравнения (4.16), при $z < 100$ м возрастают менее значительно, чем в действительности (для оптимального η_0), а при $z > 180$ м превышают экспериментальные значения плотности монолитного льда. Более согласованное с экспериментальными данными решение уравнения (4.16) может быть получено с использованием модели, в которой структура фирна рассматривается как кубическая упаковка сферических зерен льда [Божинский, Шурова, 1987]. В этой модели относительная плотность упаковки ρ / ρ_{ice} определяется выражением:

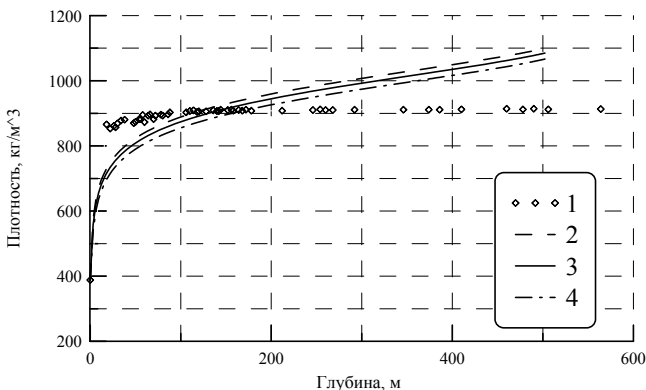


Рис. 4.7 а. Экспериментальные значения плотности в ледниковом куполе Аустфонна (1). Решения уравнения (4.16) для значений температуры ледника: 2 – $u = -1^{\circ}\text{C}$; 3 – $u = -5^{\circ}\text{C}$ (что соответствует среднему значению температуры в леднике Аустфонна); 4 – $u = -10^{\circ}\text{C}$. Рассмотренный диапазон значений температуры (от $u = -1^{\circ}\text{C}$ до $u = -10^{\circ}\text{C}$) включает в себя экспериментальные значения температуры в леднике Аустфонна. В рассмотренном диапазоне решение уравнения (4.16) слабо зависит от температуры. Профиль 3 соответствует минимальному среднеквадратичному отклонению от экспериментальных значений плотности

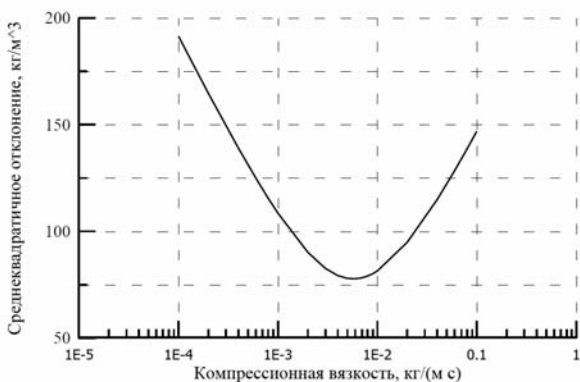


Рис. 4.7 б. Среднеквадратичное отклонение профиля плотности, полученного в результате решения уравнения (4.16), от экспериментальных значений плотности в леднике Аустфонна как функция параметра η_0 , входящего в выражение для компрессионной вязкости (4.13). Минимальное значение среднеквадратичного отклонения достигается при $\eta_0 \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \mu^3, \mu < \frac{1}{2} \\ \frac{4\pi}{3} \mu^3 - 2\pi \left(\mu - \frac{1}{2} \right)^2 \left(2\mu + \frac{1}{2} \right), \mu > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (4.17)$$

где $\mu = R/L$, R – радиус зерна, L – расстояние между центрами двух ближайших зерен.

При условии, что число зерен в слое не изменяется, толщина слоя δ и расстояние между центрами двух ближайших зерен L бу-

дут связаны соотношением: $\frac{\delta}{\delta_0} = \left(\frac{L}{L_0} \right)^3$, в котором δ_0 и L_0 – значе-

ния соответствующих величин в начальный момент времени. При этом масса льда в слое не изменяется, т.к. процессы намерзания (таяния) зерен льда в уравнении (4.16) (или (4.14)) не учитываются, т.е. $R = \text{const}$. Минимальное среднеквадратичное отклонение решения уравнения (4.16) с использованием модели кубической упаковки (4.17) от экспериментальных значений плотности достигается при $\eta_0 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ (рис. 4.8).

В действительности изменение плотности в арктических ледниковых куполах происходит не только под давлением вышележащих слоев, но и в результате намерзания (таяния) зерен льда при фильтрации талой воды в деятельном слое в периоды сезонного таяния. Так как изменение плотности вследствие процессов метаморфизма в уравнении (4.16) не учитывается, то оптимальное решение этого уравнения, которое дает усредненные значения плотности фирна, соответствует более низким значениям параметра η_0 , чем, например, для центральной Антарктиды, где отсутствует сезонное таяние ($\eta_0 = 5,38 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$ [Kojima, 1964]). Экспериментально средние значения плотности льда (фирна) определяются взвешиванием отрезков керна с длиной $\approx 1,5 \text{ м}$ [Paterson and Clarke, 1978]. В частности, значение плотности $\rho \approx 388 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ на поверхности представляет собой среднее значение плотности в поверхностном слое с высотой $\approx 1,5 \text{ м}$.)

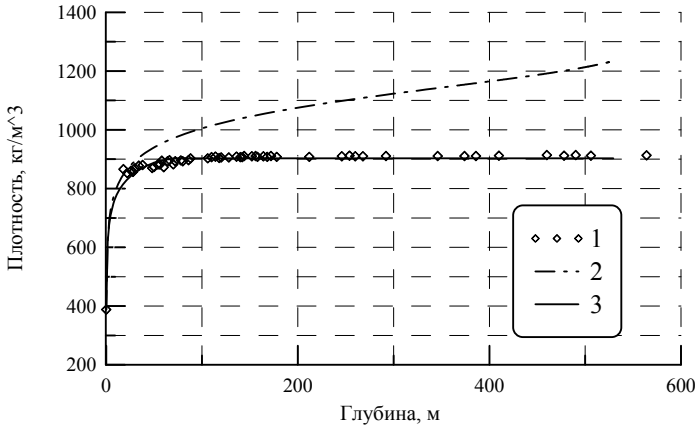


Рис. 4.8 а. Экспериментальные значения плотности в ледниковом куполе Аустфонна – 1; решение уравнения (4.16) – 2; решение уравнения (4.16) с использованием модели кубической упаковки сферических зерен льда (4.17) – 3. Профили плотности 2 и 3 соответствуют значению $\eta_0 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$, при котором профиль 3

имеет минимальное отклонение от экспериментальных значений

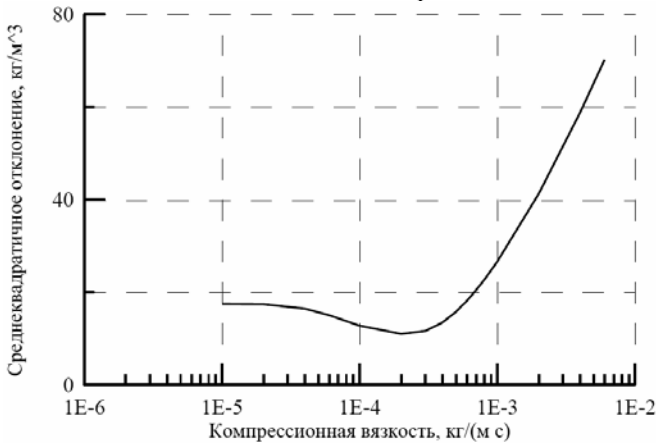


Рис. 4.8 б. Среднеквадратичное отклонение профиля плотности, полученного в результате решения уравнения (4.16) с использованием модели кубической упаковки сферических зерен льда, от экспериментальных значений плотности в леднике Аустфонна как функция параметра η_0 . Минимальное значение среднеквадратичного отклонения достигается при $\eta_0 \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$.

Как и для ледникового покрова Антарктиды, профиль плотности может быть аппроксимирован выражением [Саламатин и др., 1985]:

$$\rho = \rho_{ice}(1 - c_0 \exp(-\gamma z)), \quad (4.18)$$

где ρ_{ice} – плотность монолитного льда, $c_0 \approx 0,58$, что соответствует значению плотности $\rho_0 = 388 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$ на поверхности ледника. Минимальное отклонение профиля (4.18) от экспериментальных значений для ледника Аустфонна достигается при $\gamma \approx 0,092 \text{ м}^{-1}$ (рис. 4.9) Для Антарктиды $\gamma \approx 0,021 \text{ м}^{-1}$ [Саламатин и др., 1985], и полученное в данном случае более высокое значение этого параметра, вероятно, также связано с наличием сезонного таяния.

Лучшее соответствие между экспериментальными данными и рассчитанными значениями плотности получено с использованием модели кубической упаковки сферических зерен (4.17). Профиль плотности, полученный с помощью этой модели, в дальнейшем будет использоваться при вычислениях значений коэффициента теплопроводности, теплоемкости и количества тепла, выделяющегося в результате деформаций в ледниковом покрове.

4.1.1.4. Профили температуры в ледниковом покрове (куполе) для однородных и неоднородных свойств среды

Математическая модель, описывающая процесс распространения тепла, основана на следующих предположениях.

1. Высота ледника на протяжении рассматриваемого периода времени не изменяется. В частности, как уже отмечалось, результаты реконструкции колебаний высоты арктических ледниковых куполов Вавилова и Академия Наук свидетельствуют, что эти ледники с начала субатлантического периода (≈ 2.5 тыс. лет) до настоящего времени находились в квазистационарном состоянии [Николаев и др., 1996]. Для ледникового купола Devon Island Ice Cap также получены данные о квазистационарности этого ледника в течение последних 3200 лет [Paterson and Clarke, 1978].

2. Изменения температуры в ледниковом покрове вдоль горизонтальных направлений – существенно меньше соответствующим

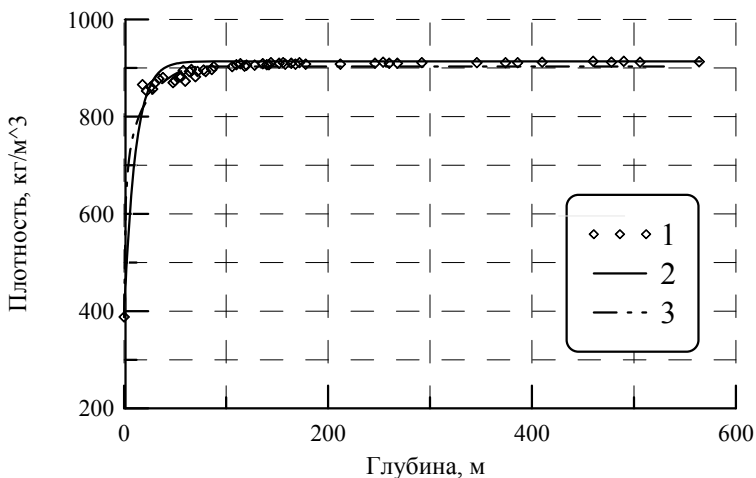


Рис. 4.9 а. Экспериментальные значения плотности в ледниковом Аустфонна – 1. Профиль плотности 2 получен в результате аппроксимации с помощью выражения (4.16); 3 – решения уравнения (4.16) с использованием модели кубической упаковки сферических зерен льда (4.17).

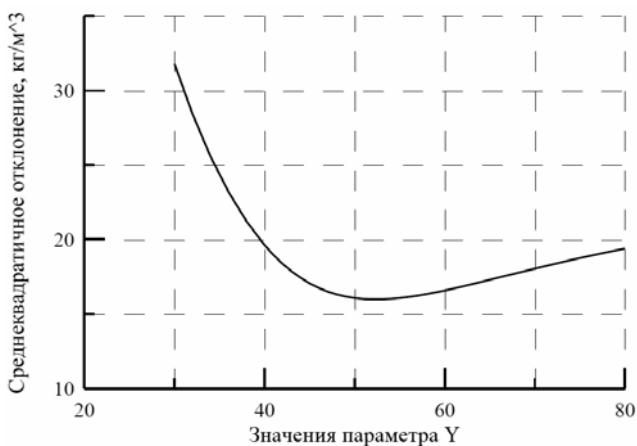


Рис. 4.9 б. Среднеквадратичное отклонение профиля плотности, полученного с помощью аппроксимации выражением (4.16), от экспериментальных значений плотности в леднике Аустфонна как функция параметра γ , входящего в выражение (4.16). Минимальное значение среднеквадратичного отклонения достигается при $\gamma = 52$ (для безразмерной координаты) или $\gamma = 0,092 \text{ м}^{-1}$

щих изменений в вертикальном направлении [Paterson and Clarke, 1978; Blatter, 1987]. Таким образом, температурное поле в ледниковом покрове в окрестности центральной части ледникового покрова является функцией вертикальной координаты и времени: $u(x, y, z, t) = u(z, t)$. Соответственно, в уравнении переноса тепла:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx 0.$$

3. Оценки величины горизонтальной скорости адвекции [Paterson and Clarke, 1978; Blatter, 1987; Саламатин и др., 1995] при небольших наклонах поверхности ледникового купола показывают, что соответствующими слагаемыми, содержащими горизонтальную скорость, в уравнении переноса тепла можно пренебречь. В частности, в рамках рассмотренной модели течения льда в ледниковом покрове, из выражений (4.3) и (4.5) также следует, что при $\frac{\partial h}{\partial x} \rightarrow 0$,

т.е. при $x \rightarrow 0$ (в центральной части ледникового покрова) средняя горизонтальная скорость адвекции льда $\bar{u} \rightarrow 0$.

4. Теплофизические свойства фирна определяются значениями плотности и температуры [Bader and Kuroiwa, 1962; Anderson, 1976; Mellor, 1977; Morris, 1983]. Зависимость коэффициента теплопроводности от плотности фирна может быть аппроксимирована выражением [Bader and Kuroiwa, 1962]:

$$k(\rho) = 0,021 + 0,00042\rho + 2,2 \cdot 10^{-9} \rho^3 \text{ Вт}/(\text{м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}).$$

Теплоемкость фирна определяется как теплоемкость соответствующей массы льда [Morris et. al., 1997]. Зависимость теплоемкости льда от температуры может быть представлена в виде [Dorsey, 1940]: $c(u) = 2,117 + 0,0078 \cdot u$ кДж/(кг \cdot $^\circ\text{C}$), где u – температура льда.

Таким образом, в качестве математической модели, описывающей процесс распространения тепла в ледниковом куполе, будем использовать следующие соотношения:

$$\rho \tilde{n} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\rho) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \rho c w(z) \frac{\partial u}{\partial z} + f(z, t),$$

$$0 < z < H, \quad 0 < t < t_f; \tag{4.19}$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=H} = -\frac{Q}{k(H)};$$

$$u(z, 0) = u_0(z),$$

где ось z направлена от поверхности к основанию ледникового купола, $\mu(t)$ – температура поверхности, Q – геотермический тепловой поток, $u_0(z)$ – начальное распределение температуры.

Под температурой поверхности в дальнейшем будет подразумеваться температура на глубине деятельного слоя ($\approx 10 - 15$ м) [Blatter, 1987]. Температура в деятельном слое претерпевает резкие изменения, обусловленные сезонными колебаниями температуры окружающей среды, которые поглощаются в деятельном слое.

Функция $f(z, t)$ определяет скорость изменения температуры вследствие процессов деформации (внутренний разогрев) [Paterson and Clarke, 1978; Caffey et. al., 1994], а также процессов рекристаллизации талой воды, которые происходят в деятельном слое. Если в качестве граничного условия при $z = 0$ используется температура на глубине деятельного слоя, то $f(z, t)$ представляет собой работу сил внутреннего трения, которой в ряде случаев можно пренебречь.

Принимая во внимание, что плотность фирна, резко возрастающая, на глубине деятельного слоя отличается от плотности льда не более чем на 5-7% и температурная зависимость теплоемкости является слабо выраженной, можно предположить, что распределение температуры в ледниковом куполе будет успешно определяться однородным уравнением с адвекцией [Blatter, 1987; MacAyeal, 1991], и соответственно задача (4.19) преобразуется к виду:

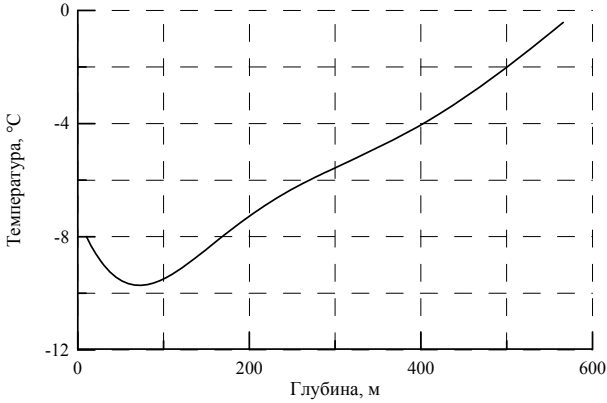


Рис. 4.10 а. Профиль температуры в ледниковом куполе в случае гармонически осциллирующей граничной температуры. Граничная температура задана на глубине деятельного слоя. Период колебаний $T = 500$ лет. Профиль скорости адвекции – линейный ($a_0 = 0,31$ м/год), $H = 560$ м (данные соответствуют ледниковому куполу Аустфонна)

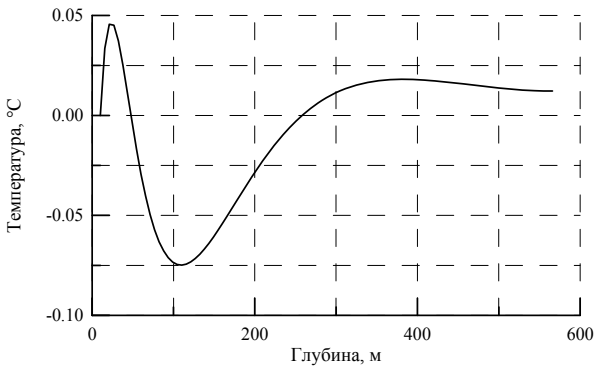


Рис. 4.10 б. Отклонение профилей температуры, полученных соответственно для ледникового купола и среды с однородными теплофизическими свойствами монокристаллического льда. Граничная температура задана на глубине деятельного слоя и представляет собой гармонически осциллирующую температуру с периодом $T = 500$ лет

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - w(z) \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$0 < z < H, 0 < t < t_f;$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=H} = -\frac{Q}{k};$$

$$u(z, 0) = u_0(z),$$

где χ – коэффициент теплопроводности монолитного льда.

Например, для гармонически осциллирующей температуры на глубине деятельного слоя $\mu(t) = A \sin \omega t$ с периодом $T = 500$ лет и амплитудой $A = 5^\circ\text{C}$ отклонение профиля температуры, полученного как решение задачи (4.19), от соответствующего численного решения задачи для однородного уравнения (4.20) является величиной порядка 0.05°C (рис. 4.10), что соответствует погрешности измерения температуры в скважине. Таким образом, при реконструкции температуры на глубине деятельного слоя может быть использовано уравнение переноса тепла (4.20) для однородной среды.

4.1.1.5. Деформационный разогрев

Количество тепла в единичном объеме в единицу времени, выделяющееся в ледниковом покрове за счет работы сил внутреннего трения, определяется выражением:

$$f(z, t) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij},$$

где σ_{ij} – тензор напряжений, $\dot{\epsilon}_{ij}$ – тензор скоростей деформаций.

Процессы деформации фирна и монолитного льда отличаются друг от друга, так как лед в отличие от фирна можно считать несжимаемой средой. Соответственно, выражения (4.19) для энергии, выделяющейся в результате деформаций, для фирна и монолитного льда различны [Paterson and Clarke, 1978].

Уравнение непрерывности для фирна имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho = -\rho \dot{\epsilon}_{ii}. \text{ В стационарном случае, учитывая, что измене-}$$

ние плотности и скорость адвекции в горизонтальной плоскости незначительны, это уравнение преобразуется к виду [Paterson and Clarke, 1978]:

$$\dot{\epsilon}_{ii} = -\frac{w(z)}{\rho} \frac{d\rho}{dz}. \quad (4.22)$$

Диагональные компоненты тензора напряжений на глубине z определяются давлением вышележащих слоев [Paterson and Clarke, 1978]:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -\frac{1}{3} g \int_0^z \rho(z') dz'. \quad (4.23)$$

Отличные от нуля недиагональные компоненты тензора напряжений пропорциональны синусу угла наклона поверхности ледникового купола ($\sigma_{xy} = g \sin \varphi \int_0^z \rho(z') dz'$). Для скважин, расположенных в центральной части ледникового купола ($\varphi \ll 1$), значениями недиагональных компонент тензора деформаций в (4.21) можно пренебречь.

Таким образом, с учетом (4.22), (4.23) энергия, выделяющаяся вследствие процессов деформации в фирне, в единице объема в единицу времени определяется выражением:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{gw}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \int_0^z \rho(z') dz'. \quad (4.24)$$

Уравнение непрерывности для монолитного льда имеет вид: $\dot{\epsilon}_{ii} = 0$. Второй инвариант тензора $\dot{\epsilon}_{ij}$ может быть получен из условия двумерности течения льда [Paterson and Clarke, 1978; Cuffey et al., 1994], т.е. $\dot{\epsilon}_{yy} = 0$ и соответственно $\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{zz}$. Таким образом, второй инвариант тензора $\dot{\epsilon}_{ij}$ имеет вид: $I_2 = \dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2$.

Энергия, выделяющаяся в результате деформации льда, с учетом закона Глена для течения льда определяется выражением [Paterson and Clarke, 1978]:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = 2(B_0 \exp(-E/Ru)) \frac{1}{n} I_2^{\frac{(n+1)}{2n}}, \quad (4.25)$$

где $B_0 = 0,875 \cdot 10^{-12} \text{ Н}^{-3} \cdot \text{м}^6 \cdot \text{с}^{-1}$ (для $n = 3$), E – энергия активации.

Скорость изменения температуры в результате деформации льда ($\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} / c\rho$) с учетом (4.25) для средней температуры в ледниковом куполе Аустфонна ($\langle u \rangle \approx -5^{\circ}\text{C}$) является величиной порядка $10^{-5} \text{ K} \cdot \text{год}^{-1}$. Скорости изменения температуры вследствие

диффузии тепла $\frac{1}{c\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(k(\rho) \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, адвекции $w(z) \frac{\partial u}{\partial z}$, и деформации

фирна $\frac{\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{c\rho}$, где $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$ определяется выражением (4.24), для

скважинного профиля температуры в ледниковом куполе Аустфонна представлены на рис. 4.11. Скорость изменения температуры в результате деформационных процессов в фирне на несколько порядков меньше соответствующей скорости изменения вследствие теплопроводности и адвекции. Аналогичный результат для Гренландии представлен в [Cuffey et al., 1994].

Таким образом, при моделировании процесса распространения тепла в арктических ледниковых куполах в уравнении теплопроводности слагаемыми, связанными с деформационным разогревом, можно пренебречь.

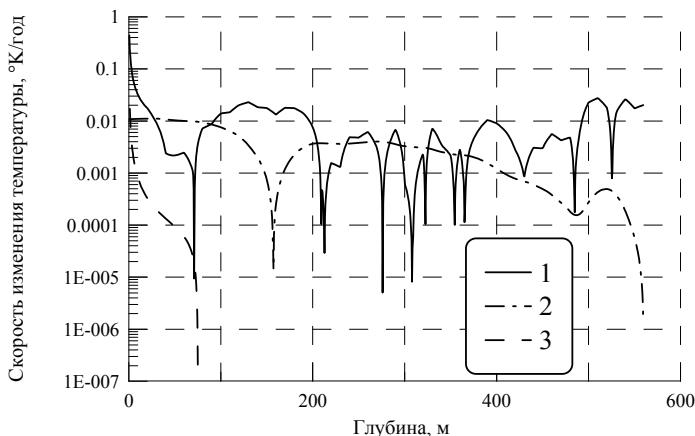


Рис. 4.11. Скорости изменения температуры в ледниковом куполе Аустфонна за счет: 1) диффузии тепла, 2) вертикальной адвекции, 3) процессов деформации в фирне [Arkhipov, 1999]

4.1.2. Оценки скорости диссипации температурных данных в ледниках на основе аналитических решений прямой задачи

Оценим влияние начального (неизвестного) распределения температуры в леднике на восстанавливаемую температуру поверхности.

Также исследуем структуру распределения температуры в среде в случае гармонически осциллирующей температуры поверхности. Этот вопрос представляет интерес, во-первых, потому что существуют данные о периодическом характере климатических изменений в прошлом [Jouzel et. al., 1987; Stuiver and Braziunas, 1989; O'Brien et. al., 1995]. Кроме того, следует учитывать, что в общем случае граничная температура может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье, и профиль температуры представляет собой суперпозицию профилей, соответствующих отдельным гармоникам. Во-вторых, по структуре профиля, соответствующего гармонически осциллирующей температуре поверхности, можно сделать заключение об эффективности реконструкции температуры поверхности.

4.1.2.1. Время релаксации для процесса теплопроводности в ледниковом покрове. Влияние начальных условий на результат реконструкции температуры поверхности

Решение задачи (4.18) может быть представлено в виде суперпозиции трех профилей: $u(z,t) = u_1(z,t) + u_2(z,t) + u_3(z,t)$, где каждая из функций в правой части равенства соответственно представляет собой решение одной из следующих задач:

$$(a) \frac{\partial u_1}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - w(z) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z},$$

$$u_1(0,t) = 0, \frac{\partial u_1}{\partial z}(H,t) = 0, u_1(z,0) = u_0(z);$$

$$(b) \frac{\partial u_2}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} - w(z) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial z},$$

$$u_2(0, t) = 0, \frac{\partial u_2}{\partial z}(H, t) = -\frac{Q}{k}, u_2(z, 0) = 0;$$

$$(c) \frac{\partial u_3}{\partial t} = \chi \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2} - w(z) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$u_3(0, t) = \mu(t), \frac{\partial u_3}{\partial z}(H, t) = 0, u_3(z, 0) = 0.$$

Исследуем аналитические решения этих задач при $w(z) = 0$, и после этого полученные результаты обобщим для случая, когда $w(z) \neq 0$.

Решение первой задачи (а) дает возможность определить влияние неизвестного начального распределения температуры $u_0(z)$ на конечный профиль $u(z, t_f)$, а, следовательно, и на результат реконструкции температуры поверхности. Решение первой задачи (а) также позволяет определить время $t_0 \in (0, t_f)$, по истечении которого этим влиянием можно пренебречь. Это решение имеет вид [Carslaw and Jaeger, 1959]:

$$u_1(z, t) = \frac{2}{H} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\chi(2n+1)^2 \pi^2 t}{4H^2}\right) \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2H} \times \int_0^H u_0(x) \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2H} dx, \quad (0 < z < H, t > 0), \quad (4.26)$$

где x переменная интегрирования. Если $t \rightarrow \infty$, тогда решение $u_1(z, t) \rightarrow 0$. Следовательно, t_0 можно определить из неравенства: $\max_{0 < z < H, t > t_0} |u_1(z, t)| < \varepsilon$. Пусть ε удовлетворяет неравенству

$|\theta(z) - u(z, t_f)| < \varepsilon$, где $\theta(z)$ – измеренный профиль температуры, и профиль $u(z, t_f)$ соответствует Ω – оптимальному квазирешению $\tilde{\mu}(t)$ [Тихонов, Арсенин, 1986] (ε определяется ошибками измерений и адекватностью математической модели реальным физическим процессам в леднике). Тогда влиянием начальной температуры на

конечное распределение $u(z, t_f)$, а также на восстанавливаемую граничную температуру $\mu(t)$, можно пренебречь при $t > t_0$ ($t_0 \leq t \leq t_f$). Для решения (4.26) имеет место следующая оценка:

$$\max_{0 < z < H, t > t_0} |u_1(z, t)| \leq 2M \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\chi(2n+1)^2 \pi^2 t_0}{4H^2}\right) = 2M \cdot S, \quad (4.27)$$

где $M = \max_{0 < z < H} |u_0(z)|$.

Величина

$$\delta = \frac{\max_{0 < z < H, t > t_0} |u_1(z, t)|}{\max_{0 < z < H} |u_0(z)|} \leq 2 \exp\left(-\frac{\chi \pi^2 t_0}{4H^2}\right) + \frac{H}{\sqrt{\chi \pi^2 t_0}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\pi \sqrt{\chi t_0}}{2H}\right),$$

где $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erf}(x)$ – интеграл ошибок, определяет степень влияния начального распределения температуры на решение $u_1(z, t)$. Значения величины δ для некоторых моментов времени t_0 равны: 1) $\delta \approx 2 \cdot 10^{-1}$, $t_0 = 5 \cdot 10^3$ лет; 2) $\delta \approx 2,6 \cdot 10^{-2}$, $t_0 = 10^4$ лет; 3) $\delta \approx 3,3 \cdot 10^{-4}$, $t_0 = 2 \cdot 10^4$ лет (при $H = 500$ м).

Наличие адвекции в леднике не увеличивает значение момента времени t_0 , соответствующее выбранному δ . Действительно,

наличие слагаемого $-w(z) \frac{\partial u}{\partial z}$ в уравнении (4.18) можно интерпретировать как следствие неоднородности тепловых свойств среды,

полагая $-w(z) = \frac{\partial \chi}{\partial z} < 0$ ($\chi = \chi(z)$). Вблизи основания $z \approx H$

скорость адвекции равна нулю ($w(z) \approx 0$) и процесс распространения тепла описывается уравнением теплопроводности без адвекции и со значением коэффициента температуропроводности $\chi(H) \approx \chi_{\text{лед}}$. Значения коэффициента температуропроводности $\chi(z)$ убывают от поверхности к основанию в силу неравенства

$\frac{\partial \chi}{\partial z} < 0$ до значения $\chi(H) = \chi_{\text{лед}}$, т.е. в среднем $\bar{\chi}(z) > \chi_{\text{лед}}$. Та-

ким образом, имеет место следующая оценка $\max_{0 < z < H} |\bar{u}_1(z, t)| \leq \max_{0 < z < H} |u_1(z, t)|$. В этом неравенстве $\bar{u}_1(z, t)$ представляет собой решение задачи (а) с учетом адвекции. Количественные оценки с учетом адвекции были получены в работе [Hanson and Dickinson, 1987]. Например, для линейного профиля адвекции и высоты ледника $H = 1000$ м заметное отличие в профилях температуры, полученных соответственно для нулевой и линейной адвекции, наблюдается спустя несколько десятков лет. По истечении 100 лет максимальное отклонение составляет $\sim 10\%$, через 300 лет отклонение составляет $\sim 30\%$. Эти результаты получены для значения скорости аккумуляции 0.3 м/год.

Решение задачи (b) известно [Carslaw and Jaeger, 1959]:

$$u_2(z, t) = \frac{Qz}{k} - \frac{8QH}{k\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \times \exp\left(-\frac{\chi(2n+1)^2\pi^2 t}{4H^2}\right) \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2H}. \quad (4.28)$$

Для нестационарной части решения (4.28) при $t \geq t_0 = 2 \cdot 10^4$ лет имеет место следующая оценка:

$$\max_{0 < z < H, t \approx t_0} |u_{2n}(z, t)| \approx \frac{8QH}{k\pi^2} \cdot \exp\left(-\frac{\chi\pi^2 t_0}{4H^2}\right) \approx 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ (при } H = 500 \text{ м)}.$$

Таким образом, при условии $t_0 \leq t < t_f$ в качестве решения задачи (b) может быть взято стационарное решение, которое представляет собой линейное распределение температуры $\frac{Qz}{k}$. С учетом адвекции стационарное решение задачи (b) имеет вид:

$$u_{2st}(z) = -\frac{Q \int_0^z dx' \exp\left(\int_0^{x'} \tilde{w}(x'') dx''\right)}{k \exp\left(\int_0^H \tilde{w}(x') dx'\right)}, \quad (4.29)$$

где $\tilde{w}(z) = \frac{w(z)}{\chi}$.

Решение (4.29) будет использовано в качестве начального распределения при восстановлении граничных температур арктических ледников.

Полученная оценка времени релаксации начальных данных (в общем случае произвольной начальной температуры) является завышенной, так как, во-первых, она основана на мажорантной оценке суммы ряда (4.26), во-вторых, следует учитывать, что высота ледника (ледниковая масса) за период 10 тыс. лет увеличивалась и в начале Голоцена составляла лишь $\approx 10\%$ от значения в настоящем. Основываясь также на данных изотопного анализа о структуре климата в период Голоцена [Jouzel et. al., 1987], можно полагать, что в середине этого периода ($\approx 5 \cdot 10^3$ лет назад) профиль температуры в ледниковом покрове представлял собой стационарный профиль с наложенными на него колебаниями, вызванными изменениями климата в более ранние моменты времени. Тогда, релаксационные процессы, приводящие к установлению стационарного распределения (при условии неизменности климата в последующие моменты времени: $-5 \cdot 10^3 < t < 0$ лет) определяются временем $t_0 \sim H^2 / \chi$ (без учета изменения ледниковой массы). Для арктических ледников с характерным значением высоты $H \sim 500$ м время релаксации $t_0 \sim 5 \cdot 10^3$ лет (т.е. время, спустя которое существовавшие в прошлом отклонения от стационарного распределения можно не учитывать, полагая начальный профиль равным стационарному профилю (4.29)). Исходя из стационарных решений уравнения (4.8), время диссипации начальных данных вследствие адвекции также не превосходит величины $t_0 \sim 5 \cdot 10^3$ лет. Отметим, что отношение характерных времен релаксации вследствие диффузии тепла и адвекции в гляциологии принято определять числом Пекле: $Pe = t_{01} / t_{02}$, где $t_{01} = H^2 / \chi$ и $t_{02} = H / w$ [Blatter, 1987]. Для ледников Арктики характерное значение числа Пекле: $Pe = a_0 H / \chi \approx 4,2$ при $a_0 = 0,3$ м/год, $H = 500$ м, $\chi = 1,12 \cdot 10^{-6}$ м² с⁻¹ (или $Pe \approx 2$ для средней скорости адвекции). Таким образом, для ледниковых куполов Арктики адвекция играет значительную роль в релаксационных процессах.

4.1.2.2. Температурное поле в леднике для гармонически осциллирующей температуры поверхности

Рассмотрим задачу (с) для случая $w(z) = 0$. Представим граничную температуру в виде разложения в ряд Фурье на отрезке $0 \leq t \leq t_f$:

$$\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{t_f}, \quad \text{где } b_n = \frac{2}{t_f} \int_0^{t_f} \mu(t) \sin \frac{n\pi t}{t_f} dt. \quad (4.30)$$

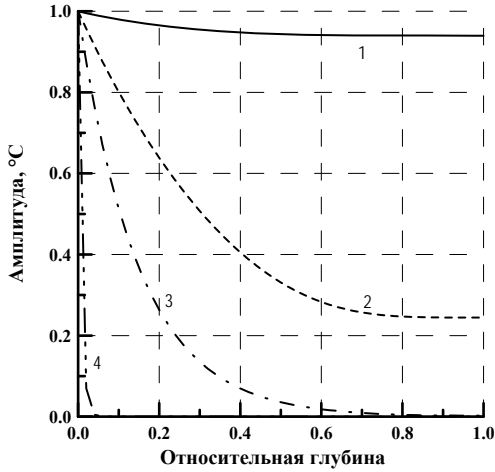
Тогда, при $t \geq t_0$ решение задачи (с) может быть представлено в виде суперпозиции установившихся решений, соответствующих отдельным гармоникам [Carslaw and Jaeger, 1959]:

$$u_3(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z) b_n \sin(\omega_n t + \varphi_n(z)), \quad (4.31)$$

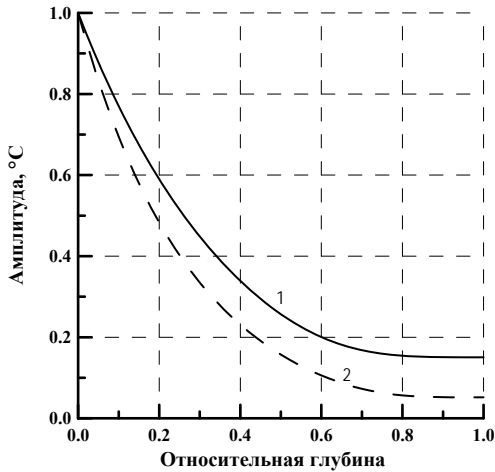
$$\text{где } A_n(z) = \sqrt{\frac{ch 2p_n(z/H - 1) + \cos 2p_n(z/H - 1)}{ch 2p_n + \cos 2p_n}},$$

$$p_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2\chi}} \cdot H, \quad \omega_n = \frac{\pi n}{t_f}, \quad \varphi_n(z) = \arg \frac{ch(p_n(z/H - 1)(1 + i))}{ch(p_n(1 + i))}.$$

Амплитуды $A_n(z)$ проникающих в ледник осцилляций убывают с ростом координаты z по закону, близкому к экспоненциальному, тем быстрее, чем выше частота осцилляций граничной температуры (рис. 4.2, а). При $n \geq 2 \cdot 10^4$ ($t_f = 10^4$) осцилляции граничной температуры, представляющие собой сезонные осцилляции, не проникают в ледник на глубину большую, чем $\sim 0,02 \cdot H$ ($H = 500$ м) для среды с тепловыми свойствами монолитного льда: $\chi \approx 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ [Paterson and Clarke, 1978] (см. рис. 4.12, а). Эта глубина составляет приблизительно 10-15 м. Следует также учитывать, что значение коэффициента температуропроводности χ для фирна меньше соответствующего значения для монолитного льда, и амплитуды $A_n(z)$ для меньших значений коэффициента χ убывают быстрее с ростом координаты (рис. 4.12, б). Таким образом, эти осцилляции можно исключить из рассмотрения, положив в (4.30)



а)



б)

Рис. 4.12. Изменение амплитуды колебаний температуры в леднике, вызванных гармоническими колебаниями температуры поверхности, где:

- а) 1 – период колебаний $T = 2 \cdot 10^4$ лет ($n = 1$); 2 – $T = 2 \cdot 10^3$ лет ($n = 10$); 3 – $T = 2 \cdot 10^2$ лет ($n = 100$); 4 – $T = 1$ год ($n = 2 \cdot 10^4$);
- б) $T = 2 \cdot 10^3$ лет, коэффициент теплопроводности: 1 – $\chi = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$; 2 – $\chi = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

$b_n = 0$ при $n > n_0 = 2 \cdot 10^4$, т.е. можно представить температуру поверхности в виде тригонометрического полинома степени n_0 .

Для достаточно больших n фаза установившихся колебаний температуры линейно зависит от координаты за исключением небольшой области вблизи основания ледника ($0,9 < z/H < 1$), так что $\varphi(z) \approx -az$ (рис. 4.13). В этом случае осцилляции температуры в леднике, образующиеся в результате гармонических колебаний температуры поверхности, представляют собой температурную волну с экспоненциально затухающей амплитудой:

$$u_3(z, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_n}{2\chi}} \cdot z\right) \cdot \sin\left(\omega_n t - \sqrt{\frac{\omega_n}{2\chi}} \cdot z\right), \quad (4.32)$$

$$a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\omega_n}{2\chi}}.$$

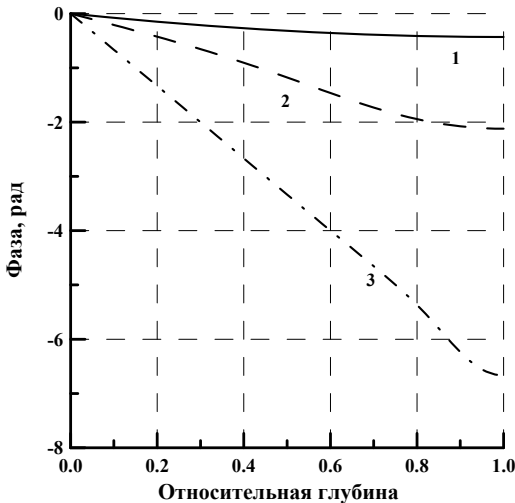


Рис. 4.13. Изменение фазы колебаний температуры в леднике, вызванных гармоническими колебаниями температуры поверхности: 1 – период колебаний $T = 2 \cdot 10^4$ лет ($n = 1$); 2 – $T = 2 \cdot 10^3$ лет ($n = 10$); 3 – $T = 2 \cdot 10^2$ лет ($n = 100$)

Приближение температурной волны (4.32) фактически можно использовать при условии $p_n = H\sqrt{\omega_n/2\chi} \geq 2\pi$. Тогда фазовая скорость и длина волны при $p_n \geq 2\pi$ могут быть получены из выражения (4.32): $V_{\phi_n} = \sqrt{2\chi\omega_n}$, $\lambda_n = 2\pi\sqrt{2\chi/\omega_n}$. Учитывая, что $p_n = H\sqrt{\omega_n/2\chi}$, получим: $\lambda_n = 2\pi H/p_n$. Следовательно, условие $p \geq 2\pi$ (или $T_\omega \leq H^2/4\pi\chi$, где T_ω – период колебаний граничной температуры) равносильно условию $\lambda \leq H$, которое означает, что профиль содержит в себе информацию по крайней мере об одном полном периоде колебаний граничной температуры.

Пусть $\lambda < H$. В этом случае, учитывая фактически экспоненциальное убывание амплитуды температурной волны $A(\xi) = A \exp(-p\xi)$, $\xi = z/H$, на расстоянии λ от поверхности ледника при амплитуде колебаний граничной температуры $A \approx 5^\circ\text{C}$ (что соответствует реальным изменениям температуры поверхности арктических ледников) амплитуда температурной волны оказывается величиной $A(\lambda) = A \exp(-2\pi) \approx 0,01^\circ\text{C}$. Это значение сопоставимо с погрешностью измерений температуры в скважине [Arkhipov, 1999; Саламатин и др., 1995] и, следовательно, любые флуктуации температуры профиля с амплитудой $A \approx 0,01^\circ\text{C}$ должны рассматриваться как погрешность измерений. Таким образом, при условии $\lambda < H$ с учетом, что точность измерений температуры в скважине является величиной порядка $0,01^\circ\text{C}$, может быть восстановлен лишь один период колебаний граничной температуры.

Если длина температурной волны, представляющей собой профиль для гармонически осциллирующей температуры поверхности ледника $\mu(t) = A \sin \omega t$, удовлетворяет условию: $\lambda \geq H$, то, очевидно, невозможно восстановить более одного периода осцилляций, так как профиль содержит в себе информацию не более чем об одном периоде этих осцилляций. При условии $\lambda > H$ граничную температуру, фактически, следует рассматривать не как осциллирующую, а как монотонно изменяющуюся. Результат восстановле-

ния в этом случае должен отражать тенденцию изменения исходной граничной температуры.

Таким образом, во всех случаях с учетом точности измерений температуры в скважине эффективность реконструкции гармонически осциллирующей температуры поверхности ограничена одним периодом колебаний.

4.1.3 Влияние нестационарности граничного условия вблизи основания ледника на результат реконструкции температуры поверхности

Значительная часть исследуемых ледниковых покровов (куполов) вблизи основания находится в квазистационарном состоянии. В общем случае долговременные изменения температуры окружающей среды нарушают стационарное распределение температуры не только в леднике, но и в породе, проникая через границу раздела ледник-порода. Тогда стационарное граничное условие, определяемое известным значением геотермического теплового потока ($Q \approx 0,05 \text{ Вт/м}^2$), должно быть перенесено на большую глубину по сравнению с глубиной, на которой расположена граница раздела ледник-порода.

Породу, на которой расположен ледниковый купол, в данном случае будем рассматривать как однородную среду, характеризующуюся некоторыми эффективными теплофизическими постоянными.

Тогда математическая модель, описывающая процесс распространения тепла в двух средах с границей раздела, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \chi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - w(z) \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad 0 < z < h, \quad 0 < t < t_f; \\ u_1(0, t) &= \mu(t); \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \chi_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}, \quad h < z < H, \quad 0 < t < t_f; \\ \frac{\partial u_2}{\partial z}(H, t) &= -\frac{Q}{k_2}; \\ u_1(h-0, t) &= u_2(h+0, t); \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z}(h-0, t) &= k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}(h+0, t); \end{aligned} \tag{4.33}$$

$$u_i(z, 0) = u_{st}(z), \quad i = 1, 2;$$

где ось z направлена от поверхности ледника к основанию, с началом отсчета на поверхности ледника; h – глубина ледника; H – глубина, на которой выполняется условие стационарности теплового потока; индексы $i = 1$ и 2 относятся к леднику и породе, соответственно; u_i – температура; k_i – коэффициенты теплопроводности; χ_i – коэффициенты температуропроводности; u_{st} – стационарное распределение температуры, $w(z)$ – профиль адвекции; $\mu(t)$ – температура поверхности ледника (на глубине деятельного слоя); Q – геотермический тепловой поток ($Q = 0,05 \text{ Вт/м}^2$).

Для линейно изменяющейся скорости адвекции стационарное распределение температуры имеет вид:

$$u_{st}(z) = \begin{cases} u_0 - (Q/k_1)h\sqrt{\pi/2Pe} \left(\operatorname{erf}(\sqrt{Pe/2}) - \operatorname{erf}(\sqrt{Pe/2}(1-z/h)) \right), & 0 < z < h; \\ u_0 - (Q/k_1)(z-h) - (Q/k_2)h\sqrt{\pi/2Pe} \operatorname{erf}(\sqrt{Pe/2}), & h < z < H, \end{cases} \tag{4.34}$$

где $Pe = a_0 h / \chi_1$ – число Пекле, erf – интеграл ошибок, u_0 – средняя температура поверхности ледника, a_0 – скорость аккумуляции осадков.

При реконструкции температуры поверхности по профилю температуры в ледниковом куполе требуется, чтобы граничное условие вблизи основания ледникового купола было известно. Ниже представлены лишь результаты реконструкции гармонически осциллирующих граничных температур в контексте проводимого исследования влияния нестационарности граничного условия при $z = h$ на результат реконструкции температуры поверхности.

4.1.3.1. Распределение температуры в среде ледник-порода в случае гармонически осциллирующей граничной температуры

Выше представлено аналитическое решение задачи (4.18) без учета вертикальной адвекции в случае гармонически осциллирующей температуры поверхности в однородной среде (леднике), как отклонение от соответствующего стационарного распределения температуры (задача (с) из п. 4.1.2.1). В данном случае рассмотрим отклонение температуры от стационарного распределения (4.34) в двух средах с границей раздела ледник-порода, также вызванное гармоническими колебаниями температуры поверхности ледника относительно некоторого среднего значения u_0 (рис. 4.14):

$\mu(t) = u_0 + A_0 \sin \omega t$. В качестве высоты ледника взято характерное для арктических ледниковых куполов значение: $h = 500$ м [Arkhipov, 1999]. В качестве исходных данных, определяющих тепловые свойства ледника и породы, использовались следующие значения: $k_1 = 2,032 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $k_2 = 2,5 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$, $\chi_1 = 1,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $\chi_2 = 1,37 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ [Paterson and Clarke, 1978]. Для скорости аккумуляции во всех случаях использовалось значение $a_0 = 0,3 \text{ м/год}$ [Arkhipov, 1999] (профили адвекции – линейные функции). Число Пекле: $Pe \approx 4,2$. Значение геотермического теплового потока при $z = H$: $Q = 0,05 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$.

В рассматриваемых случаях решение задачи (4.33) является суперпозицией стационарного распределения (4.34) и температурной волны $u_w(z, t)$, которая представляет собой решение задачи

$$(4.33) \text{ с условиями } \left. \frac{\partial u_2}{\partial z} \right|_{z=H} = 0; \quad u_i(z, 0) = 0; \quad \text{и } u_1(0, t) = A \sin \omega t.$$

Как правило, под температурной волной подразумевается решение (4.32) задачи для уравнения теплопроводности в однородной полубесконечной среде в случае гармонически осциллирующей граничной температуры [Тихонов, Самарский, 1977]. В данном случае будем использовать это определение для ограниченной области $0 < z < H$.

Без учета влияния адвекции амплитуда температурной волны в области состоящей из двух сред с однородными тепловыми свойствами и границей раздела при $z = h$ убывает по закону (рис. 4.15):

$$A(z) = \begin{cases} A_0 \exp\left(-\sqrt{\omega/2\chi_1} \cdot z\right), & 0 < z < h; \\ A_0 \exp\left(-\sqrt{\omega/2\chi_1} \cdot h\right) \exp\left(-\sqrt{\omega/2\chi_2} \cdot z\right), & h < z < H. \end{cases} \quad (4.35)$$

Воспользуемся приближением температурной волны (4.32) для оценки глубины, на которую распространяется возмущение температуры в леднике в результате гармонических колебаний температуры поверхности. При этом будем полагать, что колебания температуры поверхности с учетом погрешности измерения температуры в скважине не проникают на глубину, большую λ (в частности, при $\lambda < h$ не проходят через границу раздела ледник-порода).

Для периода колебаний $T = T_0 = 450$ лет длина температурной волны (4.32) (глубина, на которую распространяется возмущение): $\lambda \approx 500$ м, и не превосходит высоты ледника в рассматриваемых примерах (рис. 4.14, а). При $T > T_0$ возмущение температуры в леднике, проходя через границу раздела ледник-порода, вызывает отклонение температуры от стационарного распределения вблизи основания ледника (рис. 4.14, б; в). Следовательно, при реконструкции колебаний с периодом $T > T_0$ использование стационарного граничного условия при $z = h$ наряду с другими причинами должно

привести к искажению результата восстановления температуры поверхности.

4.1.3.2. *Изменение теплового потока на границе раздела ледник-порода*

При исследовании влияния изменений температуры поверхности ледника: $\mu(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n t + \varphi)$ на стационарность

граничного условия вблизи границы раздела ледник-порода интерес представляют только те гармоники, которые удовлетворяют условию: $T_n > T_0$ ($\lambda > h$).

Определим масштабы отклонений температуры в леднике от стационарного распределения вблизи границы раздела для некоторых периодов гармонических колебаний температуры поверхности: $\mu(t) = A \sin \omega t$ (табл. 4.1). При выборе диапазона периодов этих колебаний будем руководствоваться следующими соображениями.

Таблица 4.1. Тепловой поток на границе раздела ледник-порода при различных периодах колебаний температуры поверхности ледника

Период колебаний (годы)	Тепловой поток на границе раздела (Вт/м ²)
500	0.0497
1000	0.0484
2000	0.0558
3000	0.0612
4000	0.0630
5000	0.0631

По данным исследований изотопного состава ледниковых кернов из скважин Восток (Антарктида) [Jouzel et. al., 1987] и GISP2 (Гренландия) [Cuffey et. al., 1995] установлено, что температура атмосферы в период голоцена (последние 10000 лет) в среднем медленно понижалась (\approx на 1°C за 10000 лет), и это понижение представляет собой основную тенденцию долговременных изменений климата. На эту тенденцию накладываются колебания температуры с основной периодичностью $T \approx 2600$ лет и меньшими периодами

[Stuiver and Braziunas, 1989; O'Brien et.al.,1995]. С учетом такого характера изменения климата, рассмотренный диапазон периодов колебаний температуры поверхности (табл. 4.1) является достаточным для исследования отклонения граничного условия при $z = h$, которое вызвано изменениями температуры поверхности, от соответствующего стационарного условия ($Q = -0,05 \text{ Вт/м}^2$) в случае $h \approx 500 \text{ м}$. Данные табл. 4.1 получены на основе решения прямой задачи (4.33).

Как видно из табл. 4.1, отклонение значений потока на границе раздела от исходного значения $0,05 \text{ Вт/м}^2$ для рассматриваемых периодов колебаний не превышает 20-30%.

4.1.3.3. Влияние вариаций теплового потока на результаты реконструкции температуры поверхности ледника

Чтобы исследовать влияние нестационарности граничного условия вблизи основания ледника, вызванной изменениями температуры поверхности, на результат реконструкции этой температуры, проведем реконструкцию гармонических колебаний температуры поверхности для двух периодов $T = 2000$ и $T = 5000$ лет из рассматриваемого диапазона, используя профили температуры (в леднике), полученные в результате численного решения задачи (4.33) (рис. 4.14, б; в). При этом, как и в случаях с профилями, измеренными экспериментально, будем восстанавливать температуру поверхности, используя стационарное граничное условие у основания ледника, и значение теплового потока определим с помощью производной

$$\text{ной } \frac{\partial u_1}{\partial z}(h, t_f).$$

Характерное время диссипации данных о климате в прошлом (об изменениях температуры поверхности) для ледникового покрова с высотой $h \approx 500 \text{ м}$ и $a_0 = 0,3 \text{ м/год}$ составляет величину порядка 1000 лет. Отклонение восстановленной температуры поверхности от исходной для двух исследуемых периодов не превышает $0,2A$ (A – амплитуда колебаний температуры поверхности) на промежутке $-1000 < t < 0$ лет.

Для периодов $T \geq 2000$ лет $\lambda > h$. Поэтому с точки зрения информации об изменениях температуры поверхности в прошлом, содержащейся в профиле температуры, следует говорить не о колебаниях (восстановленной) температуры поверхности, а о монотонных изменениях этой температуры. Чем более монотонными (плавными) в прошлом были изменения температуры поверхности ($T = 5000$ лет), тем меньше отклонение восстановленной температуры от исходной в промежутке $-1000 < t < 0$ лет.

Рассмотрим отклонение друг от друга двух восстановленных граничных температур. Первая граничная температура восстановлена по температурному профилю, который формировался при нестационарном условии на границе раздела ледник-порода (рис. 4.14, б; в). Вторая – по профилю, полученному при стационарном условии на границе $z = h$ ($Q = -0,05$ Вт/м²). Отклонение восстановленных граничных температур друг от друга в обоих рассмотренных примерах (рис. 4.15) ($T = 2000$ и $T = 5000$ лет) при $-1000 < t < 0$ лет не превышает 1°C ($\approx 0,2A$). В свою очередь, отклонение температуры поверхности, восстановленной по профилю, полученному при стационарном граничном условии, от исходной температуры поверхности при $-1000 < t < 0$ лет составляет величину $\approx 1,5 - 2^{\circ}\text{C}$. Расхождение восстановленных граничных температур при $t < -1000$ лет определяется различными начальными условиями.

Таким образом, небольшие отклонения от стационарности вблизи границы раздела ледник-порода (значения теплового потока на границе раздела варьируются не более чем на 20-30%), обусловленные затуханием температурной волны по мере проникновения в среду, фактически не влияют на результат реконструкции температуры поверхности методом регуляризации.

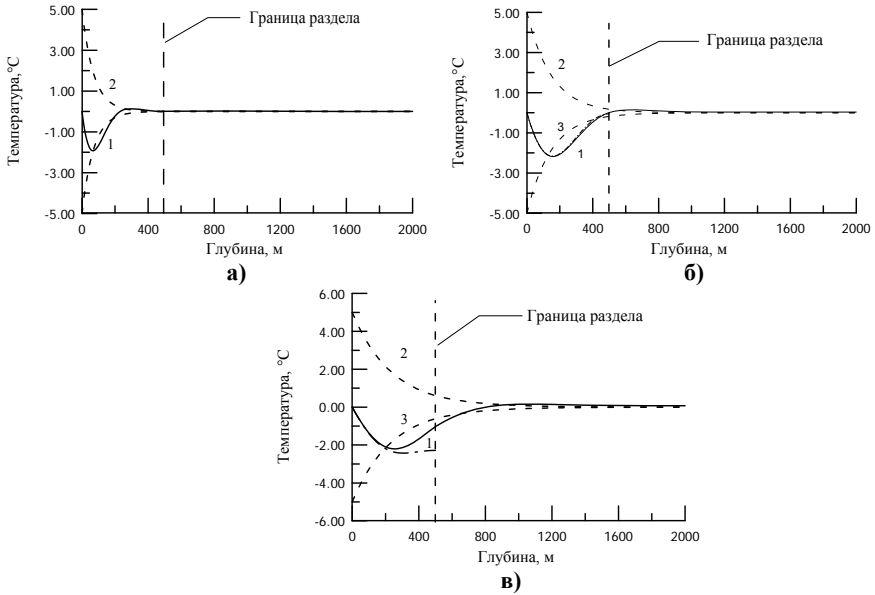


Рис. 4.14. Распространение температурной волны (1) в среде ледник-порода. Периоды колебаний температуры поверхности соответственно равны: а) 450, б) 2000, в) 5000 лет. Изменение амплитуды температурной волны в однородной среде (с тепловыми свойствами льда) для соответствующего периода колебаний (2). Возмущение температуры в леднике, вызванное гармоническими колебаниями температуры поверхности в случае стационарного граничного условия ($Q = 0$) на границе раздела ледник-порода (3). Для периода 2000 лет (б) расхождение температурных волн, полученных соответственно при стационарном граничном условии у основания ледника и в случае двух сред с границей раздела, не превосходит 0.1°C

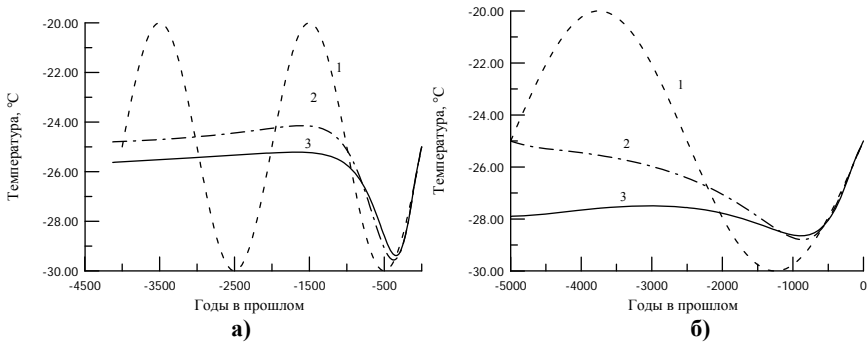


Рис. 4.15. Исходная гармонически осциллирующая температура поверхности (1) для периодов: а) $T = 2 \cdot 10^3$ лет и б) $T = 5 \cdot 10^3$ лет. Температура поверхности, восстановленная по профилю, полученному при стационарном граничном условии на границе раздела $z = 500$ м (кривая 3 на рис. 4.14). Температура поверхности (3), восстановленная по профилю, полученному при нестационарном условии на границе $z = 500$ м (кривая 2 на рис. 4.14)

4.1.3.4. Температурный профиль во льду у Южного Полюса

Знание температурного профиля в скважине позволяет установить особенности термодинамического состояния ледниковых массивов. Например, имеется известная проблема о существовании подледниковых озер в Антарктиде. Впервые эта проблема возникла при проведении эксперимента AMANDA (Price et al., 2000). Измеренный температурный профиль и математическое моделирование позволили определить геотермический поток на основании ледника и фазовое состояние льда. Температурный профиль был измерен в диапазоне от 800 до 2350 м. Для глубин от 1800 до 2810 м (основание ледника) использовалась одномерная стационарная модель течения. Нами установлена величина геотермического потока ~ 61 мВт/м² и температура у основания -9 °С, что на 7 °С ниже точки плавления льда. Таким образом, ледниковый лед у основания находится в замерзшем состоянии (в отличие от озера Восток). Радарные измерения показали достаточную гладкость основания и его плоскую поверхность на протяжении порядка 10-18 км.

Температурные измерения в проекте AMANDA и данные по измерениям в неглубоких скважинах показаны на рис. 4.16. Поскольку скважина располагается в наивысшей точке с практически

горизонтальной поверхностью, можно использовать одномерное приближение. Поскольку толщина льда достаточно большая, то температурное распределение вблизи границы ледник-горная порода определяется только геотермическим потоком, который представляет параметр модели; температурные изменения около поверхности сильно затухают к основанию (Budd and Young, 1983; Nagornov et al., 2001). Было установлено, что такое предположение о стационарности у основания выполняется с высокой точностью для скважин Camp Century в Гренландии и Byrd Station в Антарктиде. Даже для этих скважин с относительно большими горизонтальными скоростями течений и большими наклонами поверхности основания (0,0037 радиан и 5,5-10 м/год для Camp Century (Lythe, 2001); ~0,004 радиан и 12,8 м/год для Byrd Station (Budd and Young, 1983)) выполняется линейная зависимость температуры с глубиной.

На основании цифровых топографических данных консорциума BEDMAP были оценены величины уклонов поверхности, толщина льда в окрестности скважины на Южном полюсе: толщина льда 2810 м, наклон поверхности и границы раздела около 0,0015 радиан к северо-западу. Граница раздела имеет небольшие холмы и впадины с максимальными отклонениями ± 100 м внутри области порядка 50 км от Южного полюса. Радарные измерения 1998 года подтвердили, что лед вблизи Южного полюса представляет почти плоскопараллельную пластину с очень маленьким наклоном.

Поэтому уравнение, описывающее распространение тепла, может быть записано в двухмерной модели. Температура как функция времени t и координаты x , направленной вдоль границы ледник-горная порода, z – вертикальная координата, положительно направленная вниз от поверхности.

$$\rho C \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + Q, \quad (4.36)$$

Здесь ρ , c , и k – плотность, теплоемкость, и теплопроводность льда; w – вертикальная скорость адвекции, Q – мощность теплового источника на единицу объема вследствие сдвига.

Проникание сезонных и долговременных температурных изменений с поверхности ранее анализировалось Paterson (1994). При ступеньчатом изменении температуры поверхности, амплитуда с глубиной z уменьшается как $\exp\left(-z\sqrt{\pi/P\cdot\chi}\right)$, где $\chi = k/\rho c$ – теплопроводность льда; эффективная скорость распространения тепловой волны $v = (\pi/P\cdot\chi)^{1/2}$ с периодом P ; глубина проникания за время t равна $z = \sqrt{\chi t}$. Например, амплитуда температурной ступеньки в 10°C на поверхности уменьшается до $<0.1^\circ\text{C}$ на 2000 м и проходит за 15 тыс. лет. Для глубин >2000 м, которые для нас представляют интерес, измерения не чувствительны к изменениям температуры на поверхности на временных масштабах $\ll 15$ тыс. лет.

Hanson and Dickinson (1987) показали, что в уравнении (4.36) как вертикальная адвекция, слагаемое $u \partial\theta/\partial x$, так и член Q , ответственный за внутренний разогрев ледника вследствие сдвиговых деформаций, имело пренебрежимо малый эффект на возмущение температуры в нижней части ледника. Поэтому тот факт, что измеренные температуры линейно изменяются с глубиной в нижней части ледников Camp Century и Byrd Station, позволяет заключить, что горизонтальная адвекция незначительна у нижней границы ледника. Для льда Южного полюса это может быть объяснено следующим образом. Около Южного полюса ледниковый лед заключен в плоскопараллельном слое с маленьким наклоном $\sim 0,0015$. Вследствие локальных вариаций температуры воздуха поверхности равной температуры в приповерхностной области ледника могут не быть параллельными друг другу. Однако, как было отмечено выше, температурные изменения у поверхности экспоненциально затухают с глубиной, так что только долгопериодные климатические вариации могут проникать до дна ледника, но с значительно уменьшенной амплитудой. Теплопроводность значительно снижает градиенты в горизонтальном направлении. В дополнении к теплопроводности, тепло может передаваться с горизонтальным течением (адвекцией). Скорость течения у дна ледника и в зонах застоя около неровностей поверхности близка к нулю. Линии тока в нижней части Южного полюса практически параллельны сглаженной нижней границе, и можно пренебречь слагаемыми $u \partial\theta/\partial x$ и $\partial/\partial x(K \partial\theta/\partial x)$ в уравнении

(4.36), поскольку производные берутся вдоль линий постоянной температуры, которые параллельны линиям течения вдоль x .

Таким образом, одномерное стационарное уравнение ($\partial\theta/\partial t=0$, может быть использовано, чтобы оценить базальную температуру и геотермический поток у Южного полюса

$$\rho C w \frac{d\theta}{dz} = \frac{d}{dz} \left(k \frac{d\theta}{dz} \right) + Q. \quad (4.37)$$

В этом уравнении первое слагаемое ответственно за вертикальную адвекцию, второе – за вертикальную теплопроводность и последнее – за внутренний разогрев. Сначала рассмотрим случай, когда температура у основания равна точки плавления при данной глубине. С таким предположением вычисленный стационарный профиль температуры отстоит далеко от измеренного. Отклонение от измеренной температуры порядка 4°C на глубине 2000 м, которое увеличивается до 10°C на 1000 м. Наилучшее приближение к измеренному профилю оказывается, если считать, что температура у основания ниже точки плавления.

Вертикальная адвекция есть следствие аккумуляции снега на поверхности и бокового растекания льда под давлением. Средняя скорость аккумуляции в последние 1000 лет на Южном полюсе была 0,073 м льда/год (Raisbeck et al., 1987). Ниже выбраны два приближения для зависимости скорости адвекции от глубины в районе Южного Полюса. В первом взят наклон кривой глубины как функции возраста, установленный Price et al. (2000). Эту зависимость можно аппроксимировать формулой $w(z) = w_0(1 - z/H)^m$, где $w_0=0,073$ м/год и $m=1,317$. Во втором приближении использовалась модель Dansgaard-Johnsen (1969), которая применяется для случая, когда на дне нет таяния. Считаем вертикальную скорость деформаций постоянной в верхних 75% ледника и уменьшающейся линейно до нуля у основания. Для постоянной скорости аккумуляции 6,0 и 7,3 см/год модель дала нижнюю и верхнюю оценку для измеренной зависимости глубина – возраст (Price, 2000).

При решении уравнения (4.36), использовались граничные условия $T|_{z=z_1} = T_{z_1}$ и $-k \frac{dT}{dz}|_{z=H} = q_B$, где T_{z_1} – температура на глубине z_1 и q_B – тепловой поток во льду на границе основания. Величины ρ , c , и K заданы. При выборе величины z_1 между 1800 и 2200 м подбираемые температурные профили практически совпадают. Отклонения от измеренных температур менее, чем $0,4$ °C за исключением самой нижней точки. Средняя дисперсия подобранного профиля от измеренного среди 23 нижних точек ($z \geq 1800$ м) равна $0,15$ °C. И эта величина равна $0,12$ °C, если не учитывать самую нижнюю точку. Пунктирная кривая на рис. 4.16 показывает подобранный температурный профиль, который соответствует геотермическому потоку $q_B = 61$ мВт/м². Вариация q_B вследствие неопределенности в параметрах течения и скорости аккумуляции, менее чем 1 мВт/м². Кривые справа, основанные на модели Dansgaard-Johnsen со скоростью аккумуляции $6,0$ и $7,3$ см/год, приводят к базальным температурам $-8,2$ и $-8,5$ °C соответственно. (Заметим, что в нижней части ледника вследствие квадратичного закона Dansgaard-Johnsen, модель обеспечивает меньшие скорости адвекции как при 6 , так и при $7,3$ см/год, чем кривая скорости адвекции, подобранной к глубине-возраст. Это объясняет, почему отклонения $T_{DJ} - T_{fit}$ на Рис. 4.16 положительны в обоих случаях.)

Наш анализ показывает, что лед Южного полюса находится в замороженном состоянии у основания с базальной температурой $\Theta_B = -9$ °C, или $\Theta_B - \Theta_M = -7$ °C.

Было исследовано, где возможно существование подледникового озера при температуре -9 °C на расстоянии 10 км от Южного полюса. Первая возможность – ледник должен быть толще на 260 м. Но данные BEDMAP показывают, что лед в этой области в действительности на 50 м тоньше, чем на Южном полюсе. Второй возможностью является увеличенный геотермический поток, который мог бы в принципе поднять температуру льда у основания, но это увеличение должно было бы равняться 7° , что физически невозможно на таком малом удалении от Южного полюса.

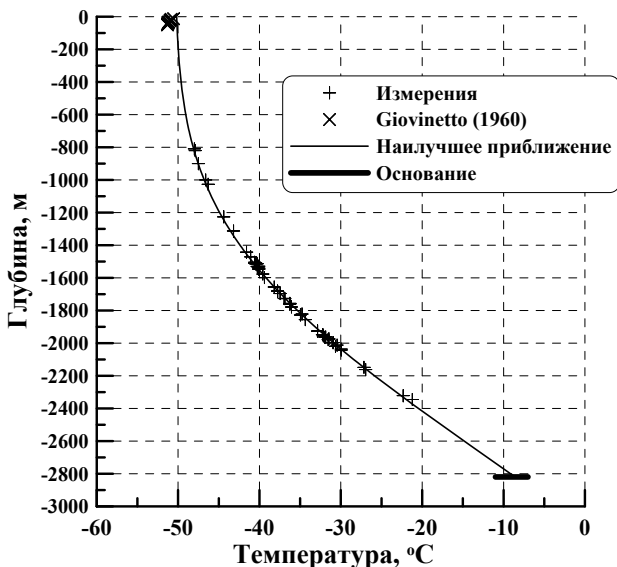


Рис. 4.16. Аппроксимация измеренных данных по скважине Южный Полус.

4.1.4. Выводы

Распределение плотности в арктическом ледниковом куполе в среднем соответствует решению уравнения денсификации фирна с учетом модели кубической упаковки сферических зерен льда для фирна (т.е. с учетом поправок в выражении (4.15) для плотности фирна).

Теплофизические свойства фирна фактически определяются его плотностью, и, соответственно, в уравнении переноса тепла для центральной части ледникового купола следует учитывать неоднородность теплофизических свойств фирна, а также вертикальную адвекцию годовых слоев, принимая во внимание, что горизонтальная скорость адвекции пренебрежимо мала для центральной части ледникового купола.

Скорость изменения температуры в ледниковом куполе вследствие деформации фирна (льда) незначительна по сравнению со скоростями изменения температуры в результате диффузии тепла

и адвекции, и, следовательно, деформационными слагаемыми в уравнении переноса тепла можно пренебречь.

Учитывая резкое увеличение плотности фирна в верхней части ледникового купола, для реконструкции изменений температуры на глубине деятельного слоя в прошлом, фактически, может быть использовано уравнение переноса тепла для однородной среды с учетом вертикальной адвекции.

Граничные условия для уравнения переноса тепла определяются температурой на поверхности ледникового купола (на глубине деятельного слоя) и значением геотермического теплового потока.

Рассматривая процесс распространения тепла на относительно продолжительных промежутках времени, в качестве начального распределения может быть взят стационарный профиль температуры. Характерное время релаксационных процессов, приводящих к установлению стационарного распределения, отклонения от которого в свою очередь были вызваны изменениями температуры поверхности в прошлом, без учета адвекции составляет $\sim 5 \cdot 10^3$ лет (при $h \sim 500$ м). Наличие вертикальной адвекции, фактически, уменьшает время релаксации приблизительно в 2 раза ($Pe \approx 2$) для характерного значения аккумуляции $a_0 \approx 0,3$ м/год.

Полученные оценки времени релаксации совместно с результатами реконструкции колебаний ледниковой массы арктических ледников [Николаев и др., 1996] дают возможность при рассмотрении процесса распространения тепла в ледниковом куполе полагать, что ледниковый купол находится в квазистационарном состоянии, т.е. позволяют пренебречь изменением высоты h при реконструкции температуры поверхности в прошлом за последние несколько тысяч лет.

Разложив температуру поверхности ледникового купола в ряд Фурье на $[0, t_f]$, можно сделать предварительное заключение относительно эффективности реконструкции этой температуры, основываясь на аналитических решениях прямой задачи. При реконструкции гармонически осциллирующей граничной температуры независимо от соотношения между длиной температурной волны и высотой ледника по температурному профилю не может быть восстановлено более одного периода колебаний температуры поверхно-

сти, учитывая, что погрешность измерения температуры в скважине составляет $\sim 10^{-2} \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Если в разложении исходной температуры поверхности в ряд Фурье присутствуют гармоники с периодами $T > T_0$, где T_0 – период, для которого длина температурной волны $\lambda \approx h$, то изменения температуры поверхности вызывают отклонения от стационарного распределения температуры в ледниковом куполе вблизи границы раздела лед-порода. Проведенное для ледникового купола с высотой $h = 500$ м исследование показало, что отклонения значений теплового потока на границе раздела от исходного значения $0,05 \text{ Вт/м}^2$ в случае гармонически осциллирующих температур поверхности с периодами, заключенными в диапазоне $5 \cdot 10^2 < T < 5 \cdot 10^3$ лет, не превышают 20-30%, вследствие близкого к экспоненциальному убывания амплитуды температурной волны. Эти отклонения слабо влияют на результат реконструкции температуры поверхности методом регуляризации Тихонова, что позволяет использовать при реконструкции температуры поверхности методом регуляризации на границе раздела лед-порода стационарное граничное условие 2-го рода для значения теплового потока, соответствующего наклону температурного профиля в ледниковом куполе при $z = h$.

4.2. Постановка задачи

Как уже было отмечено, распространение тепла в горных породах в основном подвержено влиянию двух факторов: стационарного геотермического теплового потока, исходящего из недр Земли и изменений температуры на поверхности. Тогда процесс распространения тепла в горных породах описывается одномерным уравнением теплопроводности с соответствующими граничными и начальными условиями [Shen and Beck, 1991]. Направим ось z в глубь Земли, а за начало отсчета возьмем ее поверхность. Пусть H – глубина скважины, в которой наблюдаются измерения температуры. Глубина скважины должна быть достаточно большой, такой, чтобы на всем времени решения задачи t_f температурный профиль вблизи глубины H оставался в невозмущенном состоянии. Таким образом, основное требование к профилю температуры в скважине, из кото-

рого будут проводиться реконструкции историй температуры поверхности, такое, что измеренный температурный профиль в скважине должен показать на некоторой глубине геотермический тепловой поток с больших глубин. Тогда математическая постановка задачи распространения тепла в горных породах будет иметь следующий вид:

$$\rho(z)c(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z}\right], z \in (0, H), t \in (0, t_f];$$

$$T(0,t) = U_s + \mu(t);$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(H,t) = -\frac{q}{k(H)}; \tag{4.38}$$

$$T(z,0) = U(z),$$

где $\rho(z)$, $c(z)$ и $k(z)$ – физические свойства породы, в которой происходит распространение тепла, это плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность, соответственно. Здесь q – геотермический тепловой поток, который отражает длительные устоявшиеся геологические процессы в недрах Земли, а $U(z)$ – стационарный профиль температуры, связанный с этим потоком, U_s – начальная температура на поверхности. В реальных задачах, когда изменения температуры поверхности происходят непрерывно и, вообще говоря, нельзя установить начальное время, U_s характеризует среднюю температуру, которая была на поверхности до начала резких изменений температуры на ней. $\mu(t)$ обозначает изменения температуры на поверхности во времени относительно ее начального значения U_s , $\mu(0) = 0$.

Представим температурный профиль в скважине $T(z,t)$ в виде суперпозиции двух температурных профилей – $U(z)$, стационарного температурного профиля, связанного с геотермическим потоком Земли, и $V(z,t)$, остаточного температурного профиля, связанного с изменениями температуры на поверхности:

$$T(z,t) = U(z) + V(z,t). \tag{4.39}$$

Таким образом, стационарный температурный профиль $U(z)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dU(z)}{dz} \right] = 0, \quad z \in (0, H),$$

$$U(0) = U_s; \tag{4.40}$$

$$\frac{dU}{dz}(H) = -\frac{q}{k(H)}.$$

А остаточный температурный профиль $V(z, t)$ будет являться решением следующей задачи:

$$\rho(z)c(z) \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \right], \quad z \in (0, H), t \in (0, t_f];$$

$$V(0, t) = \mu(t);$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}(H, t) = 0; \tag{4.41}$$

$$V(z, 0) = 0.$$

5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ГОРНЫХ ПОРОДАХ

Запишем уравнение для стационарного температурного профиля $U(z)$ (4.40) в следующем виде:

$$k(z) \frac{d^2 U(z)}{dz^2} + \frac{dk(z)}{dz} \frac{dU(z)}{dz} = 0, \quad z \in (0, H);$$

$$U(0) = U_s; \tag{5.1}$$

$$\frac{dU}{dz}(H) = -\frac{q}{k(H)}.$$

А уравнение для остаточного температурного профиля $V(z, t)$ (4.41) в виде:

$$\rho(z)c(z) \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} = k(z) \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2} + \frac{dk(z)}{dz} \frac{\partial V(z, t)}{\partial z},$$

$$z \in (0, H), t \in (0, t_f]$$

$$V(0, t) = \mu(t); \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}(H, t) = 0;$$

$$V(z, 0) = 0.$$

Для того, чтобы написать разностную схему, приближенно описывающую дифференциальное уравнение, необходимо совершить следующие два шага: 1) заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного его изменения; 2) заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором, а также сформулировать разностный аналог для краевых условий и начальных данных [Самарский, 1971]. Разобьем отрезок $[0, H]$ на N равных частей. Расстояние между соседними узлами $z_i - z_{i-1} = h = H / N$ называется шагом сетки, а точки деления z_i – узлы сетки. Аналогичным образом разобьем отрезок $[0, t_f]$ на M равных частей с шагом τ .

Запишем на отрезке $[0, H]$ разностную аппроксимацию второго порядка точности по координате для дифференциального уравнения из задачи (5.1):

$$k_i \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.3)$$

Разностная аппроксимация граничного условия на поверхности:

$$U_0 = U_s. \quad (5.4)$$

Запишем разностную аппроксимацию граничного условия на глубине H со вторым порядком точности по координате. Для этого рассмотрим разностную аппроксимацию первой производной в точке

$$z_N: \frac{U_N - U_{N-1}}{h}. \text{ Раскладывая } U_{N-1} \text{ в ряд Тейлора в окрестности}$$

точки z_N , получим:

$$\frac{U_N - U_{N-1}}{h} = \frac{dU}{dz}(H) - \frac{h}{2} \frac{d^2U}{dz^2}(H) + O(h^2). \quad (5.5)$$

Используя дифференциальное уравнение из задачи (5.1), получаем:

$$\frac{U_N - U_{N-1}}{h} = \frac{dU}{dz}(H) + \frac{h}{2} \frac{1}{k(H)} \frac{dk}{dz}(H) \frac{dU}{dz}(H) + O(h^2). \quad (5.6)$$

Тогда:

$$\frac{dU}{dz}(H) = \left[1 + \frac{k_N - k_{N-1}}{2k_N} \right]^{-1} \frac{U_N - U_{N-1}}{h} + O(h^2). \quad (5.7)$$

Следовательно, граничное условие на глубине H в разностной форме имеет вид:

$$U_N = U_{N-1} - \frac{qh(3k_N - k_{N-1})}{2k_N^2}. \quad (5.8)$$

Таким образом, разностная аппроксимация задачи для стационарного температурного профиля в горных породах (5.1) может быть записана в следующем виде:

$$Z_0 = \sigma_0 Z_1 + \mathcal{G}_0;$$

$$A_i Z_{i-1} - C_i Z_i + B_i Z_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad (5.9)$$

$$Z_N = \sigma_N Z_{N-1} + \mathcal{G}_N,$$

$$\text{где: } A_i = 1 - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4k_i}, \quad B_i = 2 - A_i, \quad C_i = 2, \quad F_i = 0, \quad (5.10)$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \mathcal{G}_0 = U_s, \quad \sigma_N = 1, \quad \mathcal{G}_N = -\frac{qh(3k_N - k_{N-1})}{2k_N^2}. \quad (5.11)$$

Матрица системы линейных алгебраических уравнений (5.9) является трехдиагональной, тогда для решения этой задачи воспользуемся методом прогонки [Самарский, 1971]. Метод прогонки состоит из трех шагов:

1. Прямая прогонка

$$\sigma_i = \frac{B_i}{C_i - A_i \sigma_{i-1}}, \quad \mathcal{G}_i = \frac{A_i \mathcal{G}_{i-1} - F_i}{C_i - A_i \sigma_{i-1}}, \quad i = 1 \dots N-1. \quad (5.12)$$

2. Вычисление решения на последнем шаге

$$Z_N = \frac{\sigma_N \mathcal{G}_{N-1} + \mathcal{G}_N}{1 - \mathcal{G}_N \sigma_{N-1}}. \quad (5.13)$$

3. Обратная прогонка

$$Z_k = \sigma_k Z_{k+1} + \mathcal{G}_k, \quad k = N-1 \dots 0. \quad (5.14)$$

Рассмотрим численное решение задачи (5.2) для остаточного температурного профиля $V(z, t)$. Запишем разностную аппроксимацию второго порядка точности по координате и первого порядка точности по времени для дифференциального уравнения из этой задачи в области $\{[0, H], [0, t_f]\}$:

$$\begin{aligned} \rho_i c_i \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} = k_i \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1} + V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{2h^2} + \\ + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \frac{V_{i+1}^{j+1} - V_{i-1}^{j+1} + V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{4h}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 2, \dots, M-1.$$

В случае, когда $k(z) = \text{const}$, данная аппроксимация будет иметь второй порядок точности по времени.

Разностная аппроксимация граничного условия на поверхности:

$$V_0^{j+1} = \mu^{j+1}, \quad j = 0, 2, \dots, M-1. \quad (5.16)$$

Запишем разностную аппроксимацию граничного условия на глубине H со вторым порядком точности по координате и вторым порядком точности по времени. Для этого рассмотрим разностную аппроксимацию первой производной по координате в точке

(z_N, t_{j+1}) : $\frac{V_N^{j+1} - V_{N-1}^{j+1}}{h}$. Раскладывая V_{N-1}^{j+1} в ряд Тейлора, в окрестности точки (z_N, t_{j+1}) получим:

$$\frac{V_N^{j+1} - V_{N-1}^{j+1}}{h} = \frac{\partial V}{\partial z}(H, t_{j+1}) - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(H, t_{j+1}) + O(h^2). \quad (5.17)$$

Используя дифференциальное уравнение из задачи (5.2), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{V_N^{j+1} - V_{N-1}^{j+1}}{h} &= \frac{\partial V}{\partial z}(H, t_{j+1}) + \frac{h}{2} \frac{1}{k(H)} \frac{dk}{dz}(H) \frac{\partial V}{\partial z}(H, t_{j+1}) - \\ &- \frac{h}{2} \frac{\rho(H)c(H)}{k(H)} \frac{\partial V}{\partial t}(H, t_{j+1}) + O(h^2). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z}(H, t_{j+1}) &= \left[1 + \frac{k_N - k_{N-1}}{2k_N} \right]^{-1} \times \\ &\times \left(\frac{V_N^{j+1} - V_{N-1}^{j+1}}{h} + \frac{h}{2} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \frac{V_N^{j+1} - V_N^j}{\tau} \right) + O(h^2, \tau^2). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Следовательно, граничное условие на глубине H в разностной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} V_N^{j+1} &= \left(1 + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \right)^{-1} V_{N-1}^{j+1} + \\ &+ \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \left(1 + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \right)^{-1} V_N^j, \quad j = 0, 2, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Разностная аппроксимация начального условия:

$$V_i^0 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Таким образом, разностная аппроксимация задачи для остаточного температурного профиля в горных породах (5.2) на каждом последующем $j + 1$ -м шаге по времени может быть записана в виде (5.9), где:

$$A_i = 1 - \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4k_i}, \quad B_i = 1 + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{4k_i}, \quad C_i = 2 \left(1 + \frac{\rho_i c_i h^2}{k_i \tau} \right),$$

$$F_i = -A_i V_{i-1}^j + (4 - C_i) V_i^j - B_i V_{i+1}^j, \quad (5.21)$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \mathcal{G}_0 = \mu^{j+1}, \quad \sigma_N = \left(1 + \frac{h^2 \rho_N c_N}{2\tau k_N} \right)^{-1},$$

$$\mathcal{G}_N = \frac{h^2 \rho_N c_N}{2\tau k_N} \left(1 + \frac{h^2 \rho_N c_N}{2\tau k_N} \right)^{-1} V_N^j, \quad (5.22)$$

и решена методом прогонки.

6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ГОРНЫХ ПОРОДАХ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ

В большинстве случаев физические свойства горных пород, такие как плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность, являются практически постоянными по всей глубине скважины, тогда $\rho(z) = \rho$, $c(z) = c$ и $k(z) = k$. Следовательно, задача для стационарного температурного профиля $U(z)$ (4.40) в однородных горных породах будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U(z)}{dz^2} &= 0, \quad z \in (0, H); \\ U(0) &= U_s; \\ \frac{dU}{dz}(H) &= -\frac{q}{k}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Несложно установить, что решение этой задачи будет следующим:

$$U(z) = U_s - \frac{q}{k} z. \quad (6.2)$$

Таким образом, стационарный температурный профиль в горных породах является линейной функцией глубины.

Запишем задачу для остаточного температурного профиля $V(z, t)$ (4.41) в однородных горных породах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 V(z, t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, H), t \in (0, t_f]; \\ V(0, t) &= \mu(t); \\ \frac{\partial V}{\partial z}(H, t) &= 0; \\ V(z, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

здесь $a^2 = \frac{k}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности.

Будем искать остаточный температурный профиль $V(z, t)$ в виде: $V(z, t) = \mu(t) + \tilde{V}(z, t)$,

где $\tilde{V}(z, t)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}(z, t)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}(z, t)}{\partial z^2} + f(t), \quad z \in (0, H), t \in (0, t_f] \\ \tilde{V}(0, t) &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}(H, t) &= 0; \\ \tilde{V}(z, 0) &= 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

где $f(t) = -\frac{d\mu(t)}{dt}$.

Будем искать решение данной задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующей однородной задачи [Тихонов, Самарский, 1977]. Разделив переменные в однородной задаче, получим следующую задачу Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \lambda \varphi = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad \frac{d\varphi}{dz}(H) = 0. \tag{6.6}$$

Собственные функции задачи (6.6) имеют вид:

$$\varphi_n(z) = \sin(\sqrt{\lambda_n} z) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \tag{6.7}$$

а собственные значения:

$$\lambda_n = \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{H^2}. \tag{6.8}$$

Таким образом, получим решение задачи (6.5):

$$\tilde{V}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \varphi_n(z) \int_0^t f(\tau) e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)} d\tau, \tag{6.9}$$

где

$$I_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_0^H \varphi_n(z) dz = \frac{2}{H} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = \frac{2}{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}. \tag{6.10}$$

Соответственно, решением задачи (6.3) на конечный момент времени t_f , с учетом того, что $\mu(0) = 0$, будет:

$$V(z, t_f) = \mu(t_f) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \varphi_n(z) \left[-\mu(t_f) + \lambda_n a^2 \int_0^{t_f} \mu(\tau) e^{-a^2 \lambda_n (t_f - \tau)} d\tau \right]. \quad (6.11)$$

$$\text{где: } Y(z, t) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha. \quad (7.5)$$

Оценим глубину проникновения температурного возмущения на поверхности за время t . Предположим, что в начальный момент времени, равный нулю, произошло мгновенное изменение температуры на величину D . В этом случае решение (7.4) будет записано в виде:

$$V(z, t_f) = DY(z, t_f) = D \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{a^2 t_f}}\right) \right). \quad (7.6)$$

Видно, что глубина, на которую проникло $\beta\%$ амплитуды скачка температуры на поверхности за время t_f , определяется из следующего соотношения:

$$\operatorname{erf}\left(\frac{z_\beta}{2\sqrt{a^2 t_f}}\right) = 1 - \frac{\beta}{100\%}. \quad (7.7)$$

Следовательно, глубина, на которую проникло 0.5% амплитуды скачка температуры на поверхности за время t_f , будет следующим:

$$z = 4\sqrt{a^2 t_f}. \quad (7.8)$$

Таким образом, при обычном значении теплопроводности ($a^2 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$), скважина глубиной 500 м зафиксирует события, произошедшие не ранее 500 лет назад, километровая – не ранее 2000 лет назад, а двухкилометровая 8000 лет назад. Более подробно зависимость длительности истории изменений температуры поверхности, зафиксированной в скважине, от ее глубины для $a^2 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ можно видеть на рис. 7.1.

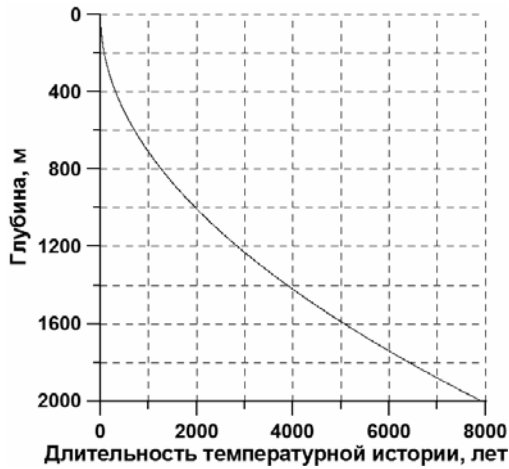


Рис. 7.1. Зависимость длительности истории изменений температуры поверхности, зафиксированной в скважине, от ее глубины для обычного значения температуропроводности

8. ОЦЕНКА ГЛУБИНЫ ПРОНИКНОВЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ КОЛЕБАНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ПЕРИОДОВ

Изменения температуры на поверхности Земли могут быть представлены в виде суперпозиции колебаний различных периодов с различными амплитудами. Наиболее заметными температурными колебаниями являются суточные и сезонные изменения температуры. Кроме этого, существует еще множество других различных известных температурных колебаний на более длительных масштабах времени, связанных, например, с климатическими осцилляциями, солнечной активностью и положением оси вращения Земли относительно Солнца.

Оценим, как зависит глубина, на которую проникают температурные волны, от периода этих волн. Для этого рассмотрим распространение температурных волн в полубесконечной среде без начальных условий:

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2}, \quad z \in (0, \infty), \quad t > -\infty$$
$$V(0,t) = \mu(t), \quad (8.1)$$

где граничное условие возьмем в виде:

$$\mu(t) = D \cos(\omega t). \quad (8.2)$$

Несложно установить, что решение задачи (8.1) с граничным условием (8.2) будет иметь вид [Тихонов, Самарский, 1977]:

$$V(z,t) = D e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}z} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}z - \omega t\right). \quad (8.3)$$

Таким образом, если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в породах также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом. При этом амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной:

$$D(z) = D e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}z} \quad (8.4)$$

Несложно видеть, что глубина проникновения $\beta\%$ амплитуды колебаний температуры на поверхности в зависимости от периода колебаний $T_{кол}$ будет следующей:

$$z = -\sqrt{\frac{a^2 T_{\text{кол}}}{\pi}} \ln \frac{\beta}{100\%} \quad (8.5)$$

Таким, образом, при обычном значении температуропроводности ($a^2 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$), суточные колебания будут фиксироваться скважиной на глубинах до ≈ 1 м, сезонные – до ≈ 17 м, с периодом 10 лет – до ≈ 53 м, с периодом 100 лет – до ≈ 168 м, а с периодом 1000 лет – до ≈ 530 м (расчет производился для $\beta = 0.5\%$). Более подробно зависимость глубины проникновения колебаний от периода при обычном значении температуропроводности для $\beta = 0,5\%$ изображена на рис. 8.1.

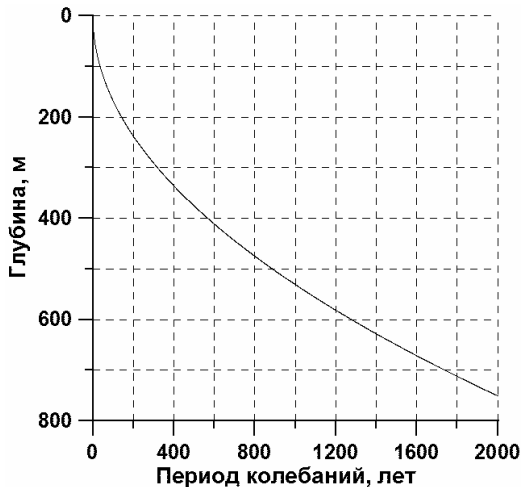


Рис. 8.1. Зависимость глубины проникновения колебаний от периода при $a^2 = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

9. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ЛЕДНИКАХ

Так же, как и в случае горных пород, распространение тепла в ледниках подвержено влиянию двух факторов: стационарного геотермического теплового потока у основания ледника, исходящего из недр Земли, и изменений температуры на поверхности. Однако, в отличие от горных пород, процесс распространения тепла в ледниках описывается одномерным уравнением теплопроводности с учетом вертикальной адвекции годовых слоев в леднике с соответствующими граничными и начальными условиями [Paterson, 1994]. Направим ось z от поверхности к основанию ледника, а за начало отсчета возьмем, соответственно, поверхность ледника. Пусть высота ледника равняется H . Тогда в общем случае математическая запись распространения тепла в ледниках будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho(T)c(T)\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[k(T)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right] - \\ &- \rho(T)c(T)w(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + f(z,t), \\ z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f], \\ T(0,t) &= U_s + \mu(t), \\ \frac{\partial T}{\partial z}(H,t) &= -\frac{q}{k(T(H,t))}, \\ T(z,0) &= U(z), \end{aligned} \tag{9.1}$$

где $\rho(T)$, $c(T)$ и $k(T)$ – физические свойства ледника: плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность, соответственно; $w(z)$ – скорость вертикальной адвекции ледника; q – геотермический тепловой поток у основания ледника; а $U(z)$ – стационарный профиль температуры, связанный с этим потоком; U_s – начальная температура на поверхности, которая характеризующая среднюю температуру, которая была на поверхности в прошлом до начала резких изменений температуры на ней; $\mu(t)$ обозначает изменения темпера-

туры на поверхности во времени относительно ее начального значения U_s , $\mu(0) = 0$.

Под температурой поверхности в дальнейшем будет подразумеваться температура на глубине деятельного слоя ($\approx 10-15$ м) [Blatter, 1987]. Температура в деятельном слое претерпевает резкие изменения, обусловленные сезонными колебаниями температуры окружающей среды, которые поглощаются в деятельном слое.

Функция $f(z, t)$ определяет скорость изменения температуры вследствие процессов деформации (внутренний разогрев) [Paterson and Clarke, 1978; Cuffey et al., 1994], а также процессов рекристаллизации талой воды, которые происходят в деятельном слое. Если в качестве граничного условия при $z = 0$ используется температура на глубине деятельного слоя, то $f(z, t)$ представляет собой работу сил внутреннего трения, которой в ряде случаев можно пренебречь.

Зависимость удельной теплоемкости и теплопроводности от температуры в ледниках дается следующими соотношениями [Paterson, 1994]:

$$c = (2098 + 7,122T) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) \quad (9.2)$$

$$k = 9,828e^{-0,0057(273,15+T)} \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}) \quad (9.3)$$

Профиль плотности для ледников может быть аппроксимирован следующим выражением [Саламатин и др., 1985]:

$$\rho = \rho_n(1 - c_0 e^{-\gamma z}), \quad (9.4)$$

где $\rho_n = (916,8 - 0,14027T) \text{ кг}/\text{м}^3$ – плотность монолитного льда, $c_0 \approx 0,58$, а γ – параметр, обеспечивающий минимальное отклонение профиля от измеренных значений. Так, для Антарктиды $\gamma \approx 0,021 \text{ м}^{-1}$ [Саламатин и др., 1985].

Из зависимостей (9.2) - (9.4) видно, что небольшие изменения температуры (от десятых градуса до нескольких градусов), незначительно влияют на значения физических свойств ледника. Таким образом, будут справедливы следующие переходы: $\rho(T(z, t)) \rightarrow \rho(\chi(z)) \rightarrow \rho(z)$, $c(T(z, t)) \rightarrow c(\chi(z)) \rightarrow c(z)$ и $k(T(z, t)) \rightarrow k(\chi(z)) \rightarrow k(z)$, где $\chi(z)$ – измеренный профиль тем-

пературы в скважине. Таким образом, задачу о распространении тепла в ледниках (9.1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho(z)c(z) \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right] - \\ &- \rho(z)c(z)w(z) \frac{\partial T(z,t)}{\partial z}, \\ z &\in [0, H], t \in (0, t_f], \\ T(0,t) &= U_s + \mu(t), \\ \frac{\partial T}{\partial z}(H,t) &= -\frac{q}{k(H)}, \\ T(z,0) &= U(z). \end{aligned} \tag{9.5}$$

Представим температурный профиль в скважине $T(z,t)$ в виде суперпозиции двух температурных профилей – $U(z)$, стационарного температурного профиля, связанного с геотермическим потоком Земли, и $V(z,t)$ – остаточного температурного профиля, связанного с изменениями температуры на поверхности:

$$T(z,t) = U(z) + V(z,t). \tag{9.6}$$

Тогда стационарный температурный профиль $U(z)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[k(z) \frac{dU(z)}{dz} \right] - \rho(z)c(z)w(z) \frac{dU(z)}{dz} &= 0, \\ z &\in [0, H], \\ U(0) &= U_s, \\ \frac{dU}{dz}(H) &= -\frac{q}{k(H)}. \end{aligned} \tag{9.7}$$

А остаточный температурный профиль $V(z,t)$ будет являться решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}
\rho(z)c(z)\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[k(z)\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}\right] - \\
-\rho(z)c(z)w(z)\frac{\partial V(z,t)}{\partial z}, \\
z \in [0, H], t \in (0, t_f], \\
V(0,t) &= \mu(t), \\
\frac{\partial V}{\partial z}(H,t) &= 0, \\
V(z,0) &= 0.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

10. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ЛЕДНИКАХ

По аналогии с задачами для горных пород, напишем разностные аппроксимации для задач (9.7) и (9.8). Разностная аппроксимация второго порядка точности по координате на отрезке $[0, H]$ для дифференциального уравнения из задачи (9.7) будет следующей:

$$k_i \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} + \left[\frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} - \rho_i c_i w_i \right] \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h} = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (10.1)$$

Разностная аппроксимация граничного условия на поверхности:

$$U_0 = U_s. \quad (10.2)$$

Используя выражение (5.5) и дифференциальное уравнение из задачи (9.7), получим разностную аппроксимацию граничного условия у основания ледника со вторым порядком точности по координате:

$$U_N = U_{N-1} - \frac{qh(3k_N - k_{N-1} - \rho_N c_N w_N h)}{2k_N^2}. \quad (10.3)$$

Таким образом, разностная аппроксимация задачи для стационарного температурного профиля в ледниках (9.7) может быть записана в виде (5.9), где:

$$A_i = 1 - \frac{k_{i+1} - k_{i-1} + 2\rho_i c_i w_i h}{4k_i}, \quad B_i = 2 - A_i, \quad C_i = 2, \quad F_i = 0, \quad (10.4)$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \mathcal{G}_0 = U_s, \quad \sigma_N = 1,$$

$$\mathcal{G}_N = -\frac{qh(3k_N - k_{N-1} - \rho_N c_N w_N h)}{2k_N^2}, \quad (10.5)$$

и решена методом прогонки.

Для дифференциального уравнения из задачи (9.8) разностная аппроксимация второго порядка точности по координате и первого порядка точности по времени в области $\{[0, H], [0, t_f]\}$ будет следующей:

$$\rho_i c_i \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau} = k_i \frac{V_{i+1}^{j+1} - 2V_i^{j+1} + V_{i-1}^{j+1} + V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{2h^2} +$$

$$+ \left(\frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} - \rho_i c_i w_i \right) \frac{V_{i+1}^{j+1} - V_{i-1}^{j+1} + V_{i+1}^j - V_{i-1}^j}{4h}, \quad (10.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 2, \dots, M-1$$

Разностная аппроксимация граничного условия на поверхности:

$$V_0^{j+1} = \mu^{j+1}, \quad j = 0, 2, \dots, M-1. \quad (10.7)$$

Используя (5.17) и дифференциальное уравнение из задачи (9.8), получим разностную аппроксимацию граничного условия у основания ледника со вторым порядком точности по координате и времени:

$$V_N^{j+1} = \left(1 + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \right)^{-1} V_{N-1}^{j+1} +$$

$$+ \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \left(1 + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \right)^{-1} V_N^j,$$

$$j = 0, 2, \dots, M-1. \quad (10.8)$$

Разностная аппроксимация начального условия:

$$V_i^0 = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (10.9)$$

Таким образом, разностная аппроксимация задачи для остаточного температурного профиля в ледниках (9.8) на каждом последующем $j+1$ -м шаге по времени может быть записана в виде (5.9), где:

$$A_i = 1 - \frac{k_{i+1} - k_{i-1} - 2\rho_i c_i w_i h}{4k_i}, \quad B_i = 1 + \frac{k_{i+1} - k_{i-1} - 2\rho_i c_i w_i h}{4k_i},$$

$$C_i = 2 \left(1 + \frac{\rho_i c_i h^2}{k_i \tau} \right), \quad F_i = -A_i V_{i-1}^j + (4 - C_i) V_i^j - B_i V_{i+1}^j, \quad (10.10)$$

$$\sigma_0 = 0, \mathcal{G}_0 = \mu^{j+1}, \sigma_N = \left(1 + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N}\right)^{-1},$$

$$\mathcal{G}_N = \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N} \left(1 + \frac{h^2}{2\tau} \frac{\rho_N c_N}{k_N}\right)^{-1} V_N^j, \quad (10.11)$$

и решена методом прогонки.

11. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ЛЕДНИКАХ С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ И ЛИНЕЙНЫМ ПРОФИЛЕМ АДВЕКЦИИ

Для большинства температурных профилей в ледниках зависимостью удельной теплоемкости $c(z)$ и теплопроводности $k(z)$ от глубины можно пренебречь. Таким образом, $c(z) = c = \text{const}$ и $k(z) = k = \text{const}$. Зависимостью плотности $\rho(z)$ от глубины для большинства ледников пренебречь нельзя, так как она резко изменяется вблизи поверхности ледника. Так, для ледника Ушковский значение плотности на глубине 100 м отличается от значения плотности на поверхности почти в два раза. В связи с этим представим ледник как однородный слой воды с плотностью $\rho_B = 1000 \text{ кг/м}^3$. Перейдем от значений глубины z к глубине водного эквивалента:

$$z_{\text{в.э.}} = \frac{\rho(z)}{\rho_B} z. \quad (11.1)$$

Для большинства ледников можно полагать, что скорость вертикальной адвекции является линейной функцией глубины водного эквивалента $z_{\text{в.э.}}$, которая на поверхности равна скорости аккумуляции осадков A_0 , а у основания ледника равна нулю [Paterson, 1994].

В дальнейшем опустим индексы, связанные с водным эквивалентом. Направим ось z от основания ледника к его поверхности и за начало отсчета возьмем основание ледника. Скорость адвекции в этом случае направлена против оси z и линейно убывает по направлению от поверхности к основанию ледника. Тогда задачи для стационарного температурного профиля $U(z)$ (9.7) и для остаточного температурного профиля $V(z, t)$ (9.8) можно записать в следующем виде:

$$a^2 \frac{d^2 U(z)}{dz^2} = -A_0 \frac{z}{H} \frac{dU(z)}{dz}, \quad z \in [0, H],$$

$$\frac{dU}{dz}(0) = -\frac{q}{k}, \quad (11.2)$$

$$U(H) = U_s$$

и

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V(z,t)}{\partial z^2} + A_0 \frac{z}{H} \frac{\partial V(z,t)}{\partial z},$$

$$z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f],$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}(0, t) = 0, \quad (11.3)$$

$$V(H, t) = \mu(t),$$

$$V(z, 0) = 0.$$

Несложно установить, что решение задачи (11.2) для стационарного температурного профиля будет следующим:

$$U(z) = U_0 + \frac{\beta \sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{1}{2} (\operatorname{erf}(\alpha H) - \operatorname{erf}(\alpha z)) \quad (11.4)$$

где $\beta = \frac{q}{k}$, $\alpha = \sqrt{\frac{A_0}{2a^2 H}}$, $\operatorname{erf}(z)$ – функция ошибок.

Решение задачи (11.3) для остаточного температурного профиля $V(z, t)$ будем искать в виде:

$$V(z, t) = \mu(t) + \tilde{V}(z, t). \quad (11.5)$$

$\tilde{V}(z, t)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial \tilde{V}(z, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}(z, t)}{\partial z^2} + A_0 \frac{z}{H} \frac{\partial \tilde{V}(z, t)}{\partial z} + f(t),$$

$$z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f],$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}(0, t) = 0, \quad (11.6)$$

$$\tilde{V}(H, t) = 0,$$

$$\tilde{V}(z, 0) = 0,$$

где $f(t) = -\frac{d\mu(t)}{dt}$. Введем безразмерные переменные: $\tilde{z} = \alpha z$,

$\tilde{t} = \frac{A_0 t}{2H}$ (в дальнейшем под переменными z и t будут подразумеваться указанные выше безразмерные переменные), тогда задача (11.6) будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \tilde{V}(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{V}(z, t)}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial \tilde{V}(z, t)}{\partial z} + f(t),$$

$$z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f],$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial z}(0, t) = 0, \quad (11.7)$$

$$\tilde{V}(H, t) = 0,$$

$$\tilde{V}(z, 0) = 0.$$

Будем искать решение данной задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям соответствующей задачи для однородного уравнения:

$$\frac{\partial \tilde{V}(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \tilde{V}(z, t)}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial \tilde{V}(z, t)}{\partial z}. \quad (11.8)$$

Пусть $\tilde{V}(z, t) = \psi(z, t)e^{-z^2/2}$. Подставляя это выражение в (11.8), приходим к уравнению для параболического потенциала:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - (z^2 + 1) \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (11.9)$$

Разделив переменные в (11.9), получим следующую задачу Штурма-Лиувилля на собственные функции и собственные значения:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + 2z \frac{d\varphi}{dz} + \lambda \varphi = 0; \quad \frac{d\varphi}{dz}(0) = 0; \quad \varphi(H) = 0. \quad (11.10)$$

Собственные функции задачи (11.10) имеют вид [Hanson and Dickinson, 1987]:

$$\varphi_n = e^{\frac{z^2}{2}} M\left(\frac{\lambda_n}{4}, \frac{1}{2}, -z^2\right), \quad (11.11)$$

где $M\left(\frac{\lambda_n}{4}, \frac{1}{2}, -z^2\right)$ – гипергеометрическая функция Куммера:

$$M(a, b, x) = 1 + \frac{ax}{b} + \frac{a(a+1)x^2}{b(b+1)2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n x^n}{(b)_n n!}, \quad (11.12)$$

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$

Тогда собственные значения λ_n определяются из уравнения:

$$M\left(\frac{\lambda_n}{4}, \frac{1}{2}, -H^2\right) = 0. \quad (11.13)$$

Таким образом, решение задачи (11.7) будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{V}(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \varphi_n(z) \int_0^t f(\tau) e^{-a^2 \lambda_n (t-\tau)} d\tau, \quad (11.14)$$

где

$$I_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_0^H \varphi_n(z) dz. \quad (11.15)$$

Соответственно, решением задачи (11.3) на конечный момент времени t_f , с учетом того, что $\mu(0) = 0$, будет:

$$V(z, t_f) = \mu(t_f) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \varphi_n(z) \left[-\mu(t_f) + \lambda_n a^2 \int_0^{t_f} \mu(\tau) e^{-a^2 \lambda_n (t_f-\tau)} d\tau \right] \quad (11.16)$$

12. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛЕДНИКОВ И ГОРНЫХ ПОРОД

12.1. Общие замечания

Решение прямой задачи для горных пород (4.38) (или для ледников (9.5)) может быть записано в виде операторного соотношения:

$$T(z, t_f) = R\{\mu(t)\}. \quad (12.1)$$

Если обозначить измеренный температурный профиль в скважине как $\chi(z)$, то решение обратной задачи можно записать в следующем виде:

$$\mu(t) = R^{-1}\{\chi(z)\}. \quad (12.2)$$

Данное уравнение не имеет точного решения для элемента $\chi(z)$ на множестве историй изменений температуры поверхности F ($\mu(t) \in F$). Это связано с тем, что измеренный температурный профиль $\chi(z)$ содержит возмущения температуры, которые приводят к тому, что $\chi(z) \notin G$, где $G = RF$ – множество образов при отображении, осуществляемом оператором R . Эти возмущения температуры связаны с ошибками измерений, а также с тем, что рассматриваемая математическая модель не учитывает всех возможных процессов, оказывающих влияние на распределение температуры в леднике. Кроме того, оператор R не является взаимно непрерывным, т.е. решение обратной задачи неустойчиво к “малым” изменениям профиля $T(z, t_f)$ на множестве образов G . Следовательно, задача реконструкции изменений температуры поверхности по данным измерений температуры в скважине относится к классу некорректно поставленных задач.

Так как стационарный профиль температуры $U(z)$, связанный с геотермическим потоком Земли, может быть выделен из измеренного температурного профиля $\chi(z)$, далее будут рассматриваться обратные задачи для остаточного температурного профиля, полученного в результате измерений температуры в скважине:

$$\theta(z) = \chi(z) - U(z). \quad (12.3)$$

Эти профили соответствуют прямым задачам (4.41) (или (9.8)), для которых можно ввести оператор \tilde{R} :

$$V(z, t_f) = \tilde{R}\{\mu(t)\}, \quad (12.4)$$

который также как и R не является взаимно непрерывным.

12.2. Теоретические основы решения обратных задач палеотермометрии

Докажем следующую лемму.

Лемма 1.

Помимо тривиального решения $(u(z, t) \equiv 0; T_s(t) \equiv 0)$ обратная задача

$$\begin{cases} u_t + wu_z = \chi u_{zz}, & 0 < t < t_f, & 0 < z < \pi, \\ u(z, 0) = 0, & & 0 < z < \pi, \\ u(0, t) = T_s(t), & & 0 < t \leq t_f, \\ -k \cdot u_z(\pi, t) = 0, & & 0 < t \leq t_f, \\ u(z, t_f) = 0, & & 0 < z < \pi, \end{cases} \quad (12.5)$$

имеет нетривиальное решение $(u(z, t); T_s(t))$.

Доказательство. Предположим, что $T_s(0) = T_s(t_f) = 0$ и

$$T_s(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cdot \sin\left(\frac{\pi mt}{t_f}\right), \text{ где } \alpha_m \text{ — неизвестные. Введем } u_m(z, t)$$

как решение следующей прямой задачи:

$$\begin{cases} v_t + wv_z = \chi v_{zz}, & 0 < t < t_f, & 0 < z < \pi, \\ v(z, 0) = 0, & & 0 < z < \pi, \\ v(0, t) = \alpha_m \cdot \sin\left(\frac{\pi mt}{t_f}\right), & & 0 < t \leq t_f, \\ -k \cdot v_z(\pi, t) = 0, & & 0 < t \leq t_f. \end{cases}$$

Решение такой задачи легко находится

$$u_m(z, t) = \alpha_m \cdot \sin\left(\frac{\pi m t}{t_f}\right) - \frac{\pi \alpha_m t}{t_f}.$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} A_n e_n(z) \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-\tau)) \cdot \cos\left(\frac{\pi m t}{t_f}\right) d\tau,$$

где $A_n = \frac{1}{\|e_n(z)\|_0} \int_0^{\pi} e_n(z) dz$, $e_n(z)$ и λ_n – собственные функции и собственные векторы следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -(k \cdot Z''(z) - w(z) \cdot Z'(z)) = \lambda Z(z), z \in (0, \pi) \\ Z(0) = Z'(\pi) = 0. \end{cases} \quad (12.6)$$

Пусть $k = \text{const}$, тогда все собственные значения – вещественные ($\lambda_n \in \mathfrak{R}$). Действительно, первое уравнение (12.6) эквивалентно следующему:

$$k \frac{d}{dz} (p(z) Z'(z)) = \lambda p(z) Z(z), \quad (12.7)$$

где $p(z) = \exp\left(\int_0^z \tilde{w}(\tau) d\tau\right)$, $\tilde{w}(\tau) = \frac{w(\tau)}{k}$. Рассмотрим слагаемое

$\lambda \int_0^{\pi} p(z) Z(z) \bar{Z}(z) dz$. После двух интегрирований по частям и используя уравнение (12.7), это слагаемое станет равным

$\bar{\lambda} \int_0^{\pi} p(z) Z(z) \bar{Z}(z) dz$. Это означает, что $\lambda = \bar{\lambda}$, и $\lambda_n \in \mathfrak{R}$.

Асимптотика собственных значений известна [Михайлов, 1976]: $|\lambda_n| \sim C \cdot n^2$, $n \rightarrow \infty$. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|}$ сходится. Тогда система функций $\{e^{\lambda_n t}\}_{n=1}^{n=\infty}$ неполна в $L_2(0, t_f)$, что есть следствие теоремы Мюнца [Paley and Wiener, 1934]. Таким образом, существу-

ет ненулевая функция $F(t)$ при $t \in [0, t_f]$, что $F(t)$ ортогональна $\{e^{\lambda_n t}\}$ в $L_2(0, t_f)$. Разложим $F(t)$ в ряд Фурье при $t \in [0, t_f]$:

$$F(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cdot \sin\left(\frac{\pi m t}{t_f}\right). \text{ Докажем, что } u(z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(z, t) \text{ есть ре-}$$

шение задачи (12.5) и $T_s(t) = F(t)$, $\alpha_m = \beta_m$. Действительно, $u(z, t)$ удовлетворяет первому уравнению (12.5), начальным и граничным условиям. Проверим последнее условие в (12.5):

$$u(z, t_f) = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi m \alpha_m A_n e_n(z)}{t_f} \int_0^{t_f} \exp(-\lambda_n(t_f - \tau)) \cos\left(\frac{\pi m \tau}{t_f}\right) d\tau.$$

После интегрирования по частям получим:

$$u(z, t_f) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e_n(z) \lambda_n \exp(-\lambda_n t_f) \int_0^{t_f} e^{\lambda_n \tau} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin\left(\frac{\pi m \tau}{t_f}\right) \right) d\tau = 0,$$

потому что внутренний ряд $\equiv F(\tau)$ и он ортогонален $\{e^{\lambda_n \tau}\}$. Таким образом, находим нетривиальное решение $u(z, t)$ и лемма доказана.

Задача состоит в нахождении функций $u(x, t)$, $\mu(t)$:

$$\begin{cases} u_t + w u_z = \chi u_{zz}, & 0 < t < t_f, & 0 < z < H, \\ u(z, 0) = 0, & 0 < z < H, \\ u(H, t) = \mu(t), & 0 < t \leq t_f, \\ -k u_z(0, t) = 0, & 0 < t \leq t_f, \\ u(z, t_f) = \kappa(z), & 0 < z < H, \end{cases}$$

где $w(z) = A(1 - z/H)$.

Введем новую независимую переменную

$$y = \alpha \frac{H}{A} w(z) = \alpha(H - z); \quad \beta t = \tau;$$

$$y \in [0; \alpha H]; \quad t \in [0; t_f] \Leftrightarrow \tau \in [0; \beta t_f].$$

Соответственно, функция $u(z, t) = u(H - y/\alpha; \tau/\beta) = v(y, \tau)$. В новых переменных задача формулируется в следующем виде.

Найти $v(y, \tau)$, $\mu(\tau)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \beta v_\tau + \frac{A}{H\alpha} y(-\alpha)v_y - \chi\alpha^2 v_{yy} = 0, y \in (0; \alpha H), \tau \in (0; \beta t_f); \\ v(y, 0) = 0, \\ v_y(\alpha H, \tau) = 0, \\ v(0, \tau) = \mu(\tau). \end{cases}$$

Условие переопределения: $v(y, \beta t_f) = \kappa(H - y/\alpha) \equiv \sigma(y)$.

Выбираем β из условия $\frac{A}{\beta H} = 2$ и α из условия $\frac{\chi\alpha^2}{\beta} = 1$. Тогда

задача запишется в виде:

$$\begin{cases} v_\tau + 2yv_y - v_{yy} = 0, y \in (0; \alpha H = H_*), \tau \in (0; \beta t_f = t_*); \\ v(y, 0) = 0, \\ v_y(\alpha H, \tau) = 0, \\ v(0, \tau) = \mu(\tau). \end{cases}$$

Условие переопределения $v(y, t_*) = \sigma(y)$.

Введем функцию $v(y, \tau) = \mu(y, \tau) + W(y, \tau) \cdot \exp(-y^2/2)$,

тогда

$$\begin{cases} W_\tau - W_{yy} + (1 + y^2)W = -\exp(y^2/2) \cdot \mu'(\tau); \\ W(y, 0) = 0, \\ W_y(H_*, \tau) - H_*W(H_*, \tau) = 0, \\ W(0, \tau) = 0. \end{cases}$$

$$W(y, t_*) = \exp(y^2/2) \cdot [\sigma(y) - \mu(t_*)] \equiv s(y).$$

Обозначим $\mu'(t) = -f(t)$, и т.к. $\mu(0) = 0$, то по $f \in C[0, t_*]$ функция $\mu(t)$ находится однозначно. Решение задачи без дополни-

тельных ограничений на $f(t)$ не обладает свойством единственности.

Единственность. Однако, если предположить, что $f(t) = \sum_{k=-N}^N f_k \cdot e^{ikt}$ – конечный отрезок ряда Фурье (для простоты полагаем $t_* = 2\pi$), то можно установить единственность определения $f(t)$.

Для доказательства единственности достаточно установить, что если $s(y) = 0$, то $W(y, t) \equiv 0$ и $f(t) \equiv 0$.

Решение задачи дается формулой:

$$W(y, t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot e^{-\lambda_k(t-\tau)} \cdot f(\tau) e_k(y) d\tau,$$

где $e_k(y)$, λ_k – собственные функции и значения задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} -e''(y) + (1 + y^2) \cdot e(y) = \lambda \cdot e(y), & y \in (0, H_*), \\ e(0) = 0, e'(H_*) - \pi \cdot e(H_*) = 0. \end{cases}$$

Известно, что $\{e_n(y)\}_1^{\infty}$ – полная ортонормированная система, $\lambda_n \in R$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Из условия $W(y, t_f) = 0$ получим, что

$$\forall k \in \mathbb{N} : C_k \cdot \int_0^{t_f} e^{-\lambda_k(t_f-\tau)} f(\tau) d\tau = 0, \text{ где } C_k = - \int_0^{H_*} e^{y^2/2} \cdot e_k(y) dy \neq 0$$

на некоторой последовательности номеров (см. лемму).

Лемма 2.

Пусть $\{e_k(y)\}_1^{\infty}$, $\{\lambda_k\}$ – собственные функции и собственные значения задачи Штурма – Лиувилля. Тогда существует подпоследовательность $\{n_k\}$, такая что $C_{n_k} = - \int_0^{H_*} e^{y^2/2} \cdot e_{n_k}(y) dy \neq 0$ ($\forall n_k$).

Доказательство. Предположим противное. Следовательно $\exists N \in \mathbb{N} : C_n = 0 \quad \forall n \geq N$, т.е. функция $\psi(y) = e^{y^2/2}$ ортогональна

всем функциям $e_n(y)$ с номерами $n \geq N$. Так как $\{e_n(y)\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в $L_2(0; H_*)$, получим, что $\psi(y) = \sum_{k=1}^{N-1} C_k \cdot e_k(y)$. Но $\psi(0) = 1$, а все $e_k(0) = 0$. Следовательно, получаем противоречие, и лемма доказана.

Таким образом, получаем, что целая функция $F(\lambda) = \int_0^{t_f} e^{\lambda \cdot \tau} f(\tau) d\tau$ имеет бесконечное число нулей. В случае, когда $f(t)$ – конечный отрезок ряда Фурье, это возможно лишь при $f(t) \equiv 0$, и тогда и $\mu(t) \equiv 0$. То есть единственность установлена.

Устойчивость. Пусть имеются два решения $u_1(x, t)$, $\mu_1(t)$ и $u_2(x, t)$, $\mu_2(t)$ исходной задачи, отвечающие “близким” переопределениям $s_1(x)$ и $s_2(x)$. Будут ли близки решения обратной задачи?

Обозначим $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$, $\sigma(x) = \sigma_2(x) - \sigma_1(x)$, $\mu(t) = \mu_2(t) - \mu_1(t)$. Тогда для функций $v(x, t)$ и $\mu(t)$ получим систему равенств:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, & (x, t) \in (0; \pi) \times (0; T), \\ v(0, t) = v_x(\pi, t) = 0, & t \in [0; t_f], \\ v(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi], \\ v(x, t_f) = \sigma(x). \end{cases}$$

Методом Фурье решение прямой задачи

$$v(x, t) = - \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} (1, e_k) \cdot e_k(x) \cdot e^{-\lambda_k(t-\tau)} \mu'(\tau) d\tau,$$

где $e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x$, $\lambda_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$, $k=0, 1, 2, \dots$ – собственные функции и собственные значения задачи Штурма-Лиувилля, $(1, e_k) = \int_0^\pi e_k(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{2k+1}$. Обозначим $f(\tau) = \mu'(\tau)$.

Условие переопределения дает следующее равенство:

$$\sigma(x) = \int_0^{t_f} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{2k+1} e_k(x) \cdot e^{-\lambda_k(t-\tau)} \right) f(\tau) d\tau,$$

где $\sigma(x)$ – заданная функция (температура в скважине).

$$\text{Обозначим } K(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{2k+1} e_k(x) \cdot e^{-\lambda_k(t-\tau)}.$$

Тогда

$$\sigma(x) = \int_0^{t_f} K(x, \tau) f(\tau) d\tau \tag{12.8}$$

интегральное уравнение Фредгольма первого рода. Это классическая некорректно поставленная задача. Если $f(\tau) = \sum_{l=-m}^m C_l e^{ill}$ (для простоты $t_f = 2\pi$), то для уравнения (12.8) доказана теорема единственности, то есть из условия $\sigma(x) = 0$ на $[0; \pi]$ следует, что $f(\tau) = 0$ на $[0; t_f]$.

Так как $\{e_k(x)\}$ – ОНБ в $L_2(0; \pi)$, то уравнение (12.8) эквивалентно следующей системе линейных уравнений:

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{2k+1} \sum_{l=-m}^m C_l \int_0^{t_f} e^{-\lambda_k(t_f-\tau)} e^{i\frac{2\pi l \tau}{T}} d\tau, \quad k=0, 1, 2, \dots \tag{12.9}$$

В системе (12.9) неизвестные коэффициенты C_l , $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$;

$$b_k = (\sigma, e_k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sigma(x) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x dx, \quad k=0, 1, 2, \dots - \text{числа.}$$

Число уравнений – бесконечно; число неизвестных $2m+1$, следовательно, система в общем случае решения при произвольных b_k не имеет. Таким образом, исследуемая задача сводится к решению СЛАУ вида:

$$A \underset{\downarrow}{C} = \underset{\downarrow}{b},$$

где $C = (C_1, \dots, C_n)$; $b = (b_1, \dots, b_k, \dots)$;

$A = (\alpha_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n$; $n = 2m + 1$ – число неизвестных.

Для исследуемой задачи доказана теорема единственности. Поэтому однородная задача имеет только нулевое решение. Докажем, что в этом случае есть и устойчивость в следующем смысле.

Пусть имеются два решения $\underset{\downarrow}{C}^{(1)}$ и $\underset{\downarrow}{C}^{(2)}$, отвечающие столбцам $\underset{\downarrow}{b}^{(1)}$ и $\underset{\downarrow}{b}^{(2)}$, таким что $\underset{\downarrow}{b}^{(1)}$ и $\underset{\downarrow}{b}^{(2)}$ близки по норме

$\left\| \underset{\downarrow}{b}^{(1)} - \underset{\downarrow}{b}^{(2)} \right\| = \sup_{i \in N} |b_i^{(1)} - b_i^{(2)}|$, то и соответствующие решения близки по норме.

Рассмотрим линейный оператор $A: R^n \rightarrow C_0$, где C_0 – пространство числовых последовательностей (b_1, \dots, b_k, \dots) , сходящихся к нулю (так как коэффициенты Фурье стремятся к нулю), с матрицей $A = (\alpha_{ij})$ в некотором базисе.

Найдем $\text{Im } A$ – образ этого оператора.

Утверждение. Пусть e_1, \dots, e_n – какой-либо базис R^n . Тогда векторы Ae_1, \dots, Ae_n образуют базис в $\text{Im } A$.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $z \in \text{Im } A$. По определению $\text{Im } A \exists x \in R^n$ такой, что $Ax = z$.

Разложим вектор x по базису e_1, \dots, e_n : $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$. Тогда в силу линейности оператора A : $z = Ax = x_1 A e_1 + x_2 A e_2 + \dots + x_n A e_n$, то есть разложение существует.

Докажем единственность такого разложения, т.е. линейную независимость элементов $A e_1, \dots, A e_n$.

Возьмем линейную комбинацию $\alpha_1 A e_1 + \alpha_2 A e_2 + \dots + \alpha_n A e_n = 0$, в силу линейности получим $A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = 0$, а так как ядро оператора нулевое, то имеем $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0$, откуда в силу линейной независимости e_1, \dots, e_n следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ и утверждение доказано.

Следствие. $\text{Im } A$ – конечномерное (n -мерное) подпространство C_0 .

Обозначим $V_n = \text{Im } A$, тогда имеем, что линейный оператор A действует из R^n в V_n , причем имеет нулевое ядро. Отсюда следует, что A имеет обратный $A^{-1}: V_n \rightarrow R^n$, A^{-1} – линейный ограниченный оператор.

Пусть $AC^{(l)} = b^{(l)}$, тогда $C^{(l)} = A^{-1}b^{(l)}$, следовательно $C^{(2)} - C^{(1)} = A^{-1}(b^{(2)} - b^{(1)})$ и в силу ограниченности A^{-1} справедлива оценка устойчивости обратной задачи $\|C^{(2)} - C^{(1)}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|b^{(2)} - b^{(1)}\|$.

Таким образом, если для двух “близких” переопределений существуют решения обратной задачи в виде отрезка ряда Фурье, то эти решения “близки”.

“Вариационная” постановка обратной задачи.

$(U(x, t), f(t))$ – ?

$$\begin{cases} U_t - \Delta U = f(t), & Q = (0; \pi) \times (0; T), \\ U(x, 0) = 0, & \Omega \in [0, \pi], \\ BU = 0, & \partial\Omega \times [0; T]. \end{cases} \quad (12.10)$$

$$U(x, t_f) = \varphi(x), \quad \overline{\Omega} = [0, \pi], \quad (12.11)$$

где $f(t) = \sum_{i=1}^N C_i \chi_i(t)$, $\chi_i(t)$ – функция i -го частичного отрезка $[t_{i-1}, t_i]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$.

В постановке (12.10), (12.11) есть единственность, но нет существования.

Заменим (12.11) на условие “квадратичной близости”:

$$\|U(x, t_f) - \varphi(x)\|_{2, (0, \pi)} \rightarrow \inf, \quad (12.12)$$

где \inf ищется по $C_1 \dots C_N$ при фиксированном разбиении τ отрезка $[0, t_f]$.

Обозначим $V_i(x, t)$ решение задачи:

$$\begin{cases} V_t - \Delta V = \chi_i(t), & Q, \\ V(x, 0) = 0, & \Omega, \\ BV = 0, & \partial\Omega \times [0; T]. \end{cases} \quad (12.13)$$

При фиксированном разбиении отрезка функции $V_i(x, t)$ определены однозначно как решения прямой задачи (12.13). В силу линейности (12.10) решение $U(x, t)$ представимо в виде

$$U(x, t) = \sum_{i=1}^N C_i V_i(x, t).$$

Таким образом, задача свелась к конечномерной:

$$C_1 \dots C_N \text{ — ? из условия } \left\| \sum_{i=1}^N C_i V_i(x, t_f) - \varphi(x) \right\|_{2, (0, \pi)} \rightarrow \inf.$$

У этой задачи существует единственное решение.

Единственность следует из линейной независимости функций $V_i(x, t_f)$.

Доказательство. Предположим, что V_i линейно зависимы, т.е. $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_N$ не все равны нулю, что $\alpha_1 V_1(x, t_f) + \alpha_2 V_2(x, t_f) + \dots + \alpha_N V_N(x, t_f) = 0$ в Ω .

$V(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i V_i(x, t)$, так как $V(x, t_f) = 0$, то $V(x, t)$ является решением задачи (12.10), (12.12) с $f(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_i(t)$.

В силу единственности (доказанной ранее), получим $f(t) = 0$ и $V(x, t) = 0$, откуда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$.

13. МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФИЛЯ В СКВАЖИНАХ ДЛЯ ЛЕДНИКОВ И ГОРНЫХ ПОРОД С ПЕРЕМЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ

Рассмотрим методы реконструкции температуры поверхности по данным измерений температурного профиля в скважинах для ледников и горных пород с переменными свойствами среды. К этим методам относятся: метод контроля [MacAyeal et al., 1991], метод Монте-Карло [Dahl-Jensen et al., 1998, Mosegaard, 1998], метод регуляризации по Тихонову [Нагорнов и др., 2001; Коновалов и др., 2001] и метод реконструкции с использованием дополнительных косвенных источников изменений климата.

Так как с математической точки зрения прямая задача (4.41) для горных пород является частным случаем прямой задачи (9.8) для ледников, рассмотрим методы реконструкции температуры поверхности для ледниковых скважин.

13.1. Метод контроля

Метод контроля представляет собой аналог метода неопределенных множителей Лагранжа. Этот метод использовался для реконструкции колебаний температуры поверхности ледника по данным измерений температуры в скважине Дуге-3 на юго-востоке ледникового покрова Гренландии [MacAyeal et al., 1991].

В случае реконструкции температуры поверхности исходным минимизируемым функционалом является функционал, состоящий из невязки и интеграла, определяющего среднеквадратичное отклонение искомой температуры поверхности от некоторой заданной функции $\eta(t)$ [MacAyeal et al., 1991]:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^H [V(z, t_f) - \theta(z)]^2 dz + \frac{\alpha}{2} \int_0^{t_f} [\mu(t) - \eta(t)]^2 dt, \quad (13.1)$$

где $V(z, t_f)$ – решение задачи (9.8), а α – параметр, согласованный с точностью входных данных (экспериментальных значений температуры в скважине). В качестве функции $\eta(t)$ может быть задана усредненная температура поверхности в прошлом. Тогда метод кон-

троля позволяет восстановить колебания температуры на временных масштабах, по которым производится усреднение (функцией $\eta(t)$). Дополнительными условиями, связывающими остаточный профиль температуры $V(z, t_f)$, являются уравнение, описывающее процесс распространения тепла, начальное и граничные условия. С учетом этих условий задача реконструкции температуры поверхности сводится к минимизации следующего функционала (функции Лагранжа) с множителем Лагранжа $\lambda(z, t)$:

$$\begin{aligned}
 J' = & \frac{1}{2} \int_0^H [V(z, t_f) - \theta(z)]^2 dz + \frac{\alpha}{2} \int_0^{t_f} [\mu(t) - \eta(t)]^2 dt + \\
 & + \int_0^H \int_0^{t_f} \lambda(z, t) \left[\rho(z)C(z) \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \right] + \right. \\
 & \left. + \rho(z)c(z)w(z) \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} \right] dt dz + \int_0^{t_f} \lambda(H, t) \frac{\partial V}{\partial z}(H, t) dt + \\
 & + \int_0^H \lambda(z, 0) V(z, 0) dz .
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

Дополнительные соотношения, включающие уравнение переноса тепла, граничное условие у основания ледника и начальное условие, представляют собой условия равенства нулю соответствующих вариаций функционала (13.2):

$$\frac{\partial J'}{\partial \lambda(z, t)} = 0; \quad \frac{\partial J'}{\partial \lambda(H, t)} = 0; \quad \frac{\partial J'}{\partial \lambda(z, 0)} = 0 . \tag{13.3}$$

Проинтегрировав по частям интеграл, содержащий уравнение переноса тепла, в функционале (13.2), преобразуем функционал к следующему виду:

$$J' = \frac{1}{2} \int_0^H [V(z, t_f) - \theta(z)]^2 dz + \frac{\alpha}{2} \int_0^{t_f} [\mu(t) - \eta(t)]^2 dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^H \int_0^{t_f} V(z, t) \left[-\rho(z)C(z) \frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial t} - \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial z} \right] + \frac{\partial (\rho(z)c(z)w(z)\lambda(z, t))}{\partial z} \right] dz dt + \\
& + \int_0^{t_f} \left[\lambda(0, t)k(0) \frac{\partial V}{\partial z}(0, t) + V(H, t) \times \right. \\
& \times \left(k(H) \frac{\partial \lambda}{\partial z}(H, t) - \lambda(H, t)\rho(H)C(H)w(H) \right) - \\
& \left. - \mu(t) \left(k(0) \frac{\partial \lambda}{\partial z}(0, t) - \lambda(0, t)\rho(0)C(0)w(0) \right) \right] dt \\
& + \int_0^H \rho(z)C(z)\lambda(z, t_f)V(z, t_f) dz + \\
& + \int_0^{t_f} \lambda(H, t) \frac{\partial V}{\partial z}(H, t) dt + \int_0^H \lambda(z, 0)V(z, 0) dz . \tag{13.4}
\end{aligned}$$

Приравняем к нулю соответствующие вариации функционала:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J'}{\partial V(z, t)} = 0; \quad \frac{\partial J'}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial z}(0, t) \right)} = 0; \\
\frac{\partial J'}{\partial V(H, t)} = 0; \quad \frac{\partial J'}{\partial V(z, t_f)} = 0. \tag{13.5}
\end{aligned}$$

Тогда для определения множителя Лагранжа $\lambda(z, t)$ получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\rho(z)C(z) \frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial z} \right] - \\
- \frac{\partial (\rho(z)c(z)w(z)\lambda(z, t))}{\partial z} = 0 \\
\lambda(0, t) = 0;
\end{aligned}$$

$$k(H) \frac{\partial \lambda}{\partial z}(H, t) - \lambda(H, t) \rho(H) C(H) w(H) = 0; \quad (13.6)$$

$$\rho(z) C(z) \lambda(z, t_f) + V(z, t_f) - \theta(z) = 0.$$

А температура поверхности как решение обратной задачи соответственно определяется из условия $\frac{\partial J'}{\partial \mu(t)} = 0$, которое имеет

вид:

$$\alpha(\mu(t) - \eta(t)) - k(0) \frac{\partial \lambda}{\partial z}(0, t) - \lambda(0, t) \rho(0) C(0) w(0) = 0. \quad (13.7)$$

Таким образом, алгоритм решения обратной задачи методом контроля будет следующим.

1. Задается приближенное значение изменений температуры поверхности $\mu^0(t)$, например, в качестве $\mu^0(t)$ может быть задана усредненная температура поверхности в прошлом.

2. В качестве функции $\eta(t)$ берется значение с текущего шага итерации: $\eta(t) = \mu^n(t)$ и вычисляется решение прямой задачи (9.8) с граничным условием $V^n(0, t) = \eta(t)$ на поверхности: $V^n(z, t_f)$.

3. Из системы (13.1.6) с полученным профилем $V^n(z, t_f)$ вычисляется множитель Лагранжа $\lambda^n(z, t)$.

4. Из (13.7) с полученным значением множителя Лагранжа $\lambda^n(z, t)$ определяется значение изменений температуры поверхности на следующем шаге итерации $\mu^{n+1}(t)$.

Методы контроля на одном из этапов процедуры минимизации функционала содержат решение для множителя Лагранжа $\lambda(z, t)$, которое неустойчиво по отношению к ошибкам измерения профиля температуры. Чтобы проиллюстрировать чувствительность восстановленной температуры к ошибкам входных данных, рассмотрим тестовую задачу реконструкции известной температуры поверхности, используя следующие исходные данные [MacAyeal et al., 1991]: $h = 2000$ м, $a_0 = 0,3$ м/год, $k_1 = 2$ Вт · м⁻¹ · °С⁻¹,

$\chi_1 = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$, $Q = 0,05 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$, которые являются характерными значениями соответствующих величин для Гренландии. Если в качестве температуры поверхности ледника взять один период синуса (кривая, соответствующая $\Delta T = 0 \text{ }^\circ\text{C}$ на рис. 13.1), а затем по скважинному профилю температуры, соответствующему этой граничной температуре, снова восстановить с помощью методов контроля поверхностную температуру, внося случайную ошибку различной амплитуды (см. рис. 13.1), то получается следующий результат. При ошибках измерения температуры в скважине порядка $0,01^\circ\text{C}$, восстановленная температура поверхности значительно отличается от истинной температуры. Причем, если не вносить ошибку в профиль температуры при $t = t_f$, то ошибка восстановления пренебрежимо мала (рис. 13.1). Таким образом, для практической обработки реальных экспериментальных данных, методы контроля дают неудовлетворительный результат.

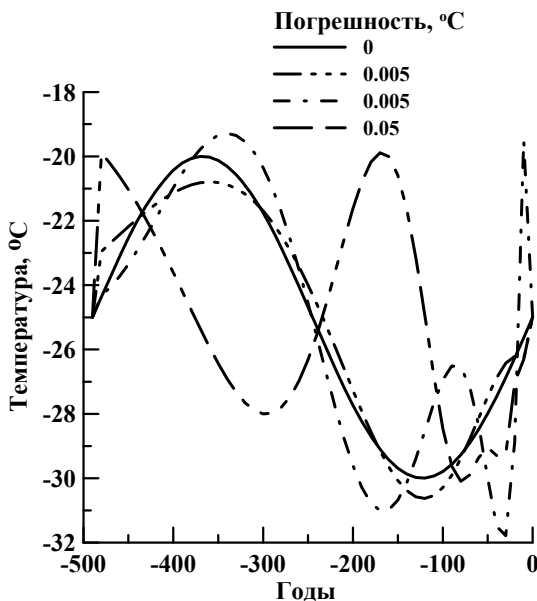


Рис. 13.1. Исходный сигнал и его восстановленные значения при различных случайных ошибках в измеренном температурном профиле в скважине.

13.2. Метод Монте-Карло

Рассмотрим метод Монте-Карло [Dahl-Jensen et al., 1998, Mosegaard, 1998]. Этот метод тестирует случайно выбранные изменения температуры на поверхности, используя их в качестве входящих данных для прямой задачи (9.8), и принимает во внимание степень согласованности между вычисленным и измеренным температурными профилями. Схема Монте-Карло использует случайные блуждания в многомерном пространстве всех возможных моделей \vec{m} . Для кусочно-постоянной функции типа (7.3) вектор модельных параметров будет иметь вид: $\vec{m} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$. Функция вероятности для вектора модельных параметров имеет вид:

$$L(\vec{m}) = \alpha e^{-S(\vec{m})}, \quad (13.8)$$

где $S(\vec{m})$ – невязка между вычисленным значением температуры в скважине и измеренным профилем температуры, α – нормировочный множитель.

В качестве стартовой точки для случайного блуждания \vec{m}_{cur}^1 можно взять любую точку из модельного пространства. Случайное блуждание можно описать следующей схемой:

1) выбирается пробное значение температуры поверхности \vec{m}_{trial}^{n+1} из окрестности текущей температуры поверхности \vec{m}_{cur}^n ;

2) проверяется \vec{m}_{trial}^{n+1} с вероятностью: $P_{accept} = \min(1, \frac{L_{trial}}{L_{cur}})$;

3) если \vec{m}_{trial}^{n+1} принимается, то $\vec{m}_{cur}^{n+1} = \vec{m}_{trial}^{n+1}$, иначе $\vec{m}_{cur}^{n+1} = \vec{m}_{cur}^n$.

Таким образом, можно набрать необходимое число допустимых модельных параметров, невязки для которых меньше определенного значения S_0 (обычно согласованного с погрешностью измерения температуры в скважине). По данной статистике можно построить гистограммы для каждого значения, входящего в вектор модельных параметров. Такие распределения обычно имеют зону максимума, т.е. наиболее вероятные значения соответствующих величин, которые и будут являться решением обратной задачи [Dahl-Jensen et al., 1998, Mosegaard, 1998].

Проведем реконструкцию методом Монте-Карло для ледникового купола Академии Наук. Реконструкция методом Монте-Карло показана на рис. 13.2, она основывалась на 6000 моделях, выбранных схемой Монте-Карло в модельном пространстве температурных историй. Гистограмму для одного из значений температуры поверхности, входящего в вектор модельных параметров, можно видеть на рис. 13.3.

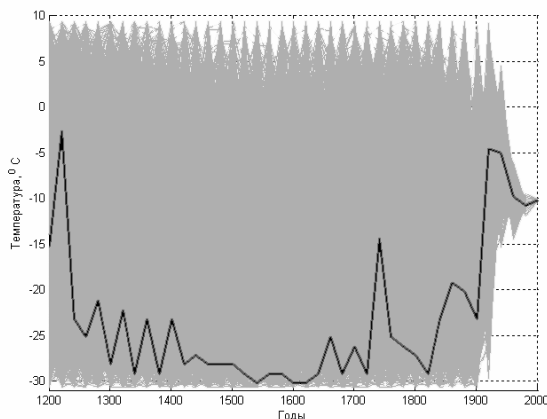


Рис. 13.2. Реконструкция температуры на поверхности ледникового купола Академия Наук методом Монте-Карло

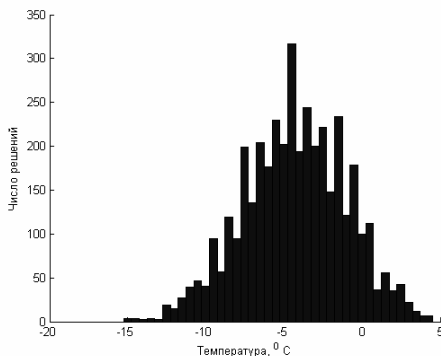


Рис. 13.3. Гистограмма для одного из значений температуры поверхности, входящего в вектор модельных параметров. Хорошо виден максимум, который является наиболее вероятной величиной значения температуры поверхности

13.3. Метод регуляризации Тихонова

Рассмотрим метод регуляризации Тихонова, позволяющий определить устойчивое решение обратной задачи [Нагорнов и др., 2001; Коновалов и др., 2001]. Этот метод использовался для реконструкции температуры на поверхности ледников Академия Наук и Аустфонна [Nagornov et al., 2005]. Метод регуляризации Тихонова заключается в определении граничной температуры $\mu(t)$, минимизирующей сглаживающий функционал, состоящий из невязки и стабилизатора [Тихонов, Арсенин, 1986]:

$$\Psi = \frac{1}{2} \int_0^H \left[\tilde{R} \{ \mu(t) \} - \theta(z) \right]^2 dz + \alpha \Omega \{ \mu(t) \}, \quad (13.9)$$

где α – параметр регуляризации, согласованный с точностью входных данных. Функционал $\Omega \{ \mu(t) \}$ называется стабилизирующим или стабилизатором:

$$\Omega \{ \mu(t) \} = \int_0^{t_f} \sum_{j=0}^r q_j \left(\frac{d^j \mu}{dt^j} \right)^2 dt, \quad (13.10)$$

здесь r – порядок стабилизатора, а коэффициенты $q_j \geq 0$, $q_r > 0$.

Процедура минимизации сглаживающего функционала Ψ может быть реализована с помощью градиентного метода и представляет собой итерационную процедуру [Нагорнов и др., 2001; Коновалов и др., 2001]. Итерационная процедура выполняется до тех пор, пока не будет достигнут минимум функционала Ψ с заданной точностью, которому соответствует оптимальное решение обратной задачи.

Рассмотрим итерационную процедуру минимизации функционала Ψ для двух частных случаев функции $\mu(t)$: кусочно-постоянной функции и отрезка тригонометрического ряда Фурье. Возьмем в качестве функции $\mu(t)$ кусочно-постоянную функцию вида $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$, что соответствует записи (7.3). На первом шаге итерации зададим начальное приближение граничной температуры: $\vec{\mu}^0 = (\mu_1^0, \mu_2^0, \dots, \mu_M^0)$, в качестве начального приближения может быть задана усредненная температура поверхности в прошлом.

А на n -м шаге итерации значения граничной температуры определяются из соотношения:

$$\bar{\mu}^{n+1} = \bar{\mu}^n - \gamma^n \text{grad} \left\{ \Psi(\bar{\mu}^n) \right\}, \quad (13.11)$$

где $\gamma^n > 0$ – градиентный шаг. Вычислим производные $\frac{\partial \Psi(\bar{\mu}^n)}{\partial \bar{\mu}_j^n}$,

входящие в выражение (13.11):

$$\frac{\partial \Psi(\bar{\mu}^n)}{\partial \bar{\mu}_j^n} = \int_0^H \frac{\partial \tilde{R} \left\{ \bar{\mu}^n \right\}}{\partial \bar{\mu}_j^n} \left[\tilde{R} \left\{ \bar{\mu}^n \right\} - \theta(z) \right] dz + \alpha \frac{\partial \Omega \left\{ \bar{\mu}^n \right\}}{\partial \bar{\mu}_j^n}. \quad (13.12)$$

Производные $\frac{\partial \tilde{R} \left\{ \bar{\mu}^n \right\}}{\partial \bar{\mu}_j^n}$ представляют собой профили $W_j(z) = \frac{\partial V^n}{\partial \mu_j^n}$,

которые являются решениями задачи, полученной из (9.8) путем дифференцирования всех соотношений по μ_j^n . Таким образом, профили $W_j(z)$ являются решениями задачи (9.8) с граничным условием на поверхности:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1, & t_j < t \leq t_{j+1} \\ 0, & t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i \neq j \end{cases}. \quad (13.13)$$

Рассмотрим итерационную процедуру минимизации функционала Ψ для случая, когда функция $\mu(t)$ задана в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье:

$$\mu(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^L a_l \cos\left(\frac{2\pi l}{t_f} t\right) + b_l \sin\left(\frac{2\pi l}{t_f} t\right). \quad (13.14)$$

На первом шаге итерации зададим начальные значения коэффициентов Фурье: $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_L, b_1, b_2, \dots, b_L)$. Например, в качестве a_0 можно взять среднее значение температуры поверхности в прошлом, а остальные коэффициенты приравнять к нулю. А на n -м шаге итерации значения коэффициентов Фурье определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
a_0^{n+1} &= a_0^n - \gamma^n \frac{\partial \Psi^n}{\partial a_0^n}, \\
a_l^{n+1} &= a_l^n - \gamma^n \frac{\partial \Psi^n}{\partial a_l^n}, \quad l=1,2,\dots,L, \\
b_l^{n+1} &= b_l^n - \gamma^n \frac{\partial \Psi^n}{\partial b_l^n}, \quad l=1,2,\dots,L,
\end{aligned} \tag{13.15}$$

где $\gamma^n > 0$ – градиентный шаг. Производные функционала из выражений (13.15) по соответствующим коэффициентам Фурье будут следующими:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi^n}{\partial a_0^n} &= \int_0^H W_{a_0}(z) \left[\tilde{R} \{ \mu^n(t) \} - \theta(z) \right] dz + \alpha \frac{\partial \Omega^n}{\partial a_0^n}, \\
\frac{\partial \Psi^n}{\partial a_l^n} &= \int_0^H W_{a_l}(z) \left[\tilde{R} \{ \mu^n(t) \} - \theta(z) \right] dz + \alpha \frac{\partial \Omega^n}{\partial a_l^n}, \quad l=1,2,\dots,L, \\
\frac{\partial \Psi^n}{\partial b_l^n} &= \int_0^H W_{b_l}(z) \left[\tilde{R} \{ \mu^n(t) \} - \theta(z) \right] dz + \alpha \frac{\partial \Omega^n}{\partial b_l^n}, \quad l=1,2,\dots,L.
\end{aligned} \tag{13.16}$$

Здесь профили $W_{a_0}(z)$, $W_{a_l}(z)$ и $W_{b_l}(z)$ – решения задачи (9.8) с граничными условиями на поверхности $\mu(t) = \frac{1}{2}$, $\mu(t) = \cos\left(\frac{2\pi l}{t_f} t\right)$

и $\mu(t) = \sin\left(\frac{2\pi l}{t_f} t\right)$ соответственно. Несложно установить, что для

случая, когда граничное условие на поверхности $\mu(t)$ задано в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье, слагаемое, содержащее стабилизатор, в выражении (13.9) будет следующим:

$$\alpha \Omega = \alpha_0 \frac{a_0^2}{2} + \sum_{l=1}^L (a_l^2 + b_l^2) \xi_l, \tag{13.17}$$

где $\xi_l = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{2\pi l}{t_f} \right)^2 + \dots + \alpha_r \left(\frac{2\pi l}{t_f} \right)^{2r}$, $\alpha_i = \alpha \frac{q_i t_f}{2}$, $i = 0, 1, \dots, r$.

Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial \Omega^n}{\partial a_0^n} &= \alpha_0 a_0^n \\ \alpha \frac{\partial \Omega^n}{\partial a_l^n} &= 2a_l^n \xi_l, \quad l = 1, 2, \dots, L, \\ \alpha \frac{\partial \Omega^n}{\partial b_l^n} &= 2b_l^n \xi_l, \quad l = 1, 2, \dots, L. \end{aligned} \tag{13.18}$$

Таким образом, для определения коэффициентов Фурье граничного условия (13.14), производится итерационная процедура (13.15), с использованием выражений (13.16) и (13.18).

13.3.1. Результаты реконструкции гармонических колебаний температуры поверхности методом регуляризации Тихонова. Эффективность реконструкции гармонических колебаний граничной температуры

В качестве первого примера рассмотрим результат реконструкции одного периода синуса в случае, когда на профиль температуры наложены случайные возмущения. Т.е. рассмотрим тестовую задачу, аналогичную рассмотренной для метода контроля, с теми же данными. В отличие от методов контроля, восстановление температуры поверхности методом регуляризации оказывается успешным даже при внесении значительных случайных ошибок в профиль “измеренной” температуры в скважине при $t = t_f$ (рис. 13.4, а). На этом рисунке изображена восстановленная температура для случайной ошибки с амплитудами $\Delta T = 0,5$ и 1°C . Важно подчеркнуть, что принципиальным отличием результатов, полученных методом регуляризации и методами контроля при наличии случайной ошибки, является тот факт, что при реконструкции температуры поверхности методом регуляризации сохраняется основная тенденция изменения этой температуры (что является следствием устойчивости решения).

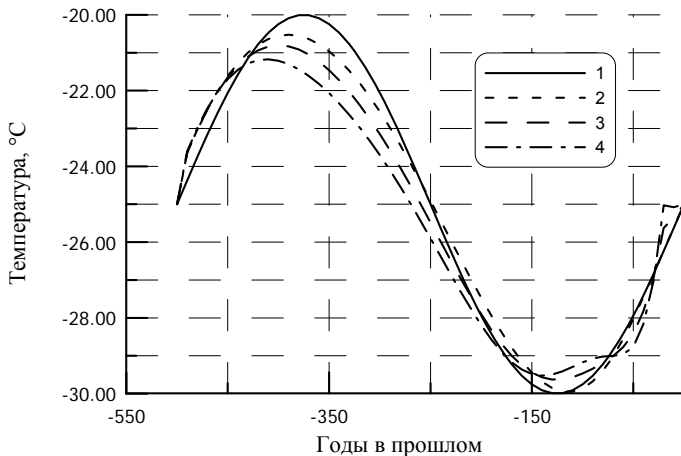


Рис. 13.4, а. Исходная (1) и восстановленные методом регуляризации температуры поверхности для различных случайных ошибок температуры в скважине (2 – 0°C ; 3 – $0,5^{\circ}\text{C}$; 4 – 1°C)

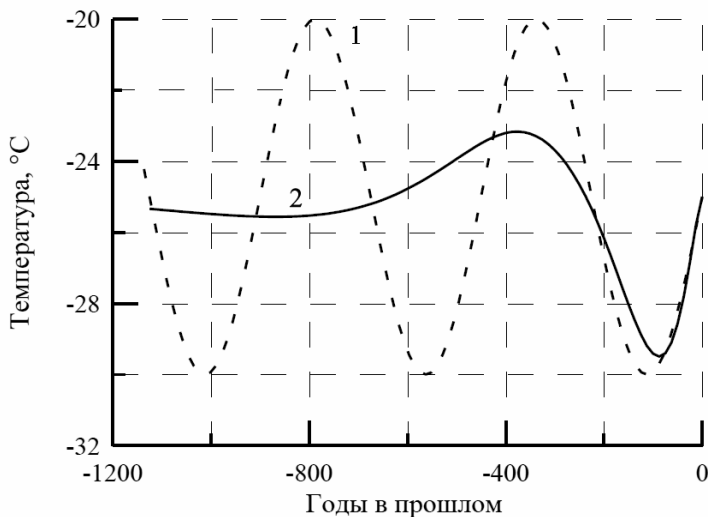


Рис. 13.4, б. Исходная гармонически осциллирующая температура поверхности с периодом $T = 450$ лет (1) и температура поверхности, восстановленная методом регуляризации Тихонова (2).
Высота ледника $h = 2000$ м

Далее, рассмотрим результаты реконструкции установившихся гармонических колебаний температуры поверхности (исходная граничная температура содержит несколько периодов синуса). Для ледника высотой $h = 2000$ м и периода $T = 450$ лет температурная волна имеет длину $\lambda \approx h/4$. Результат реконструкции гармонических колебаний с периодом $T = 450$ лет по профилю температуры в леднике с $h = 2000$ м, в случае установившихся колебаний температуры поверхности представлен на рис. 13.4, б. Амплитуда восстановленных колебаний температуры поверхности убывает по мере удаления в прошлое, что позволяет восстановить изменения температуры только в последний период исходных колебаний $-T < t < 0$ (см. рис. 13.4, б). Более того, первая половина периода исходных колебаний ($-T < t < -T/2$) восстанавливается лишь качественно, т.е. в рассматриваемом примере восстанавливается только факт существования потепления при $-T < t < -T/2$. Значения температуры в указанный период составляют менее 1/2 от значений исходной граничной температуры. Несмотря на то, что успешно восстановлена лишь небольшая часть исходной температуры поверхности, среднеквадратичное отклонение температурных профилей для исходной и восстановленной граничных температур оказывается величиной порядка $10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}$ ($S \approx 0,012 \text{ }^\circ\text{C}$) и не превосходит погрешности измерений температуры в скважине. Отклонение температурных профилей для исходной и восстановленной граничных температур представлено на рис. 13.5. Таким образом, "малость" этого отклонения вовсе не гарантирует успешное восстановление температуры поверхности ледника на всем рассматриваемом временном интервале. Полученный результат реконструкции согласуется с выводами об эффективности реконструкции гармонических колебаний, установленными ранее из исследования аналитических решений прямой задачи, которые свидетельствуют, что при данной точности совпадения профилей температуры ($\sim 0,01^\circ\text{C}$) не может быть восстановлено более одного периода колебаний (вследствие экспоненциального убывания амплитуды температурной волны). С другой стороны, точность совпадения профилей $0,01^\circ\text{C}$ соответствует погрешности измерений температуры в скважине, т.е. является

достаточной для реконструкции температуры поверхности по экспериментальным профилям.

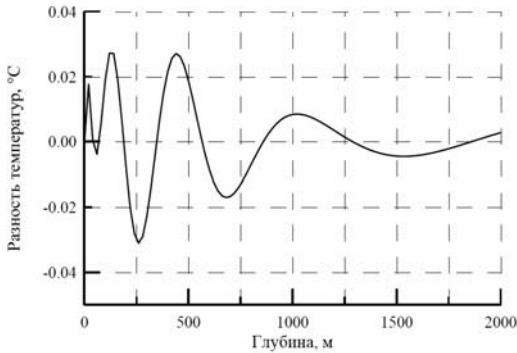


Рис. 13.5. Отклонение профилей, соответствующих исходной гармонически осциллирующей температуре поверхности и температуре поверхности, восстановленной методом регуляризации (см. рис. 13.4,б)

Сопоставляя результаты реконструкции температуры поверхности в случаях одного периода синуса (рис. 13.4, а) и установившихся колебаний (рис. 13.4, б), отметим, что возмущение температуры среды для одного периода синуса отличается от температурной волны, соответствующей установившейся гармонически осциллирующей температуре поверхности ледника (рис. 13.6). В частности, отклонение температуры в леднике от стационарного значения, соответствующее первой половине периода колебаний ($-T < t < -T/2$), оказывается более значительным, чем в температурной волне. Это является одной из причин более успешной реконструкции температуры поверхности для одного периода гармонических колебаний. Второй причиной, очевидно, является совпадение периода колебаний с промежутком времени, на котором производилась реконструкция температуры поверхности в тестовой задаче для одного периода, а также точно заданное значение температуры поверхности в начальный момент времени в прошлом. В случаях с экспериментальными профилями априорной информации о начальном условии не существует, и для получения объективной картины реконструкция температуры поверхности должна быть проведена на относительно большом промежутке времени, содержащем несколько периодов ($t_f \gg T$), как в рассматриваемом примере реконструкции

установившихся колебаний. В общем случае также следует учитывать, что температура поверхности представляет собой суперпозицию гармоник с различными периодами.

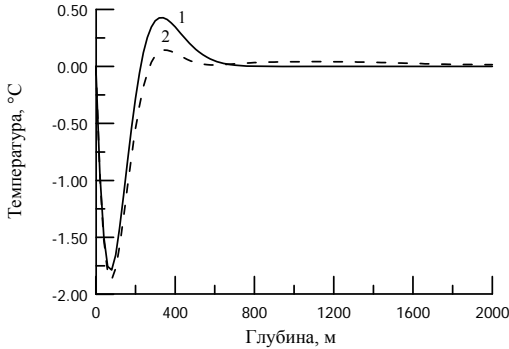


Рис. 13.6. Возмущение температуры в леднике для одного периода синуса (1) и для установившейся гармонически осциллирующей температуры поверхности (2). Высота ледника $h = 2000$ м, период колебаний 450 лет

Отметим, что методы контроля позволяют качественно восстановить более одного периода колебаний [MacAyeal et. al.,1991]. Но при этом, как было установлено, следует учитывать, что величина погрешности в измеренном температурном профиле не должна превышать $5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}$, что фактически достигается лишь в тестовых задачах, и поэтому такой метод непригоден при работе с реальными экспериментальными данными.

Результат реконструкции гармонических колебаний с периодом $T = 450$ лет по профилю температуры в леднике с $h = 500$ м представлен на рис. 13.7,а. В этом случае соответствующая температурная волна имеет длину $\lambda \approx h$, и отклонение теплового потока на границе раздела лед-порода от значения геотермического потока составляет всего 0,03 %. Отклонение профилей, соответствующих исходной и восстановленной граничным температурам, представлено на рис.13.7,б (среднеквадратичное отклонение (рис. 13.8): $S \approx 0,013 \text{ } ^\circ\text{C}$). Полученный результат полностью аналогичен предыдущему случаю с $h = 2000$ м. Исключение составляет лишь то обстоятельство, что и в случае более высокой точности для ледника с высотой $h = 500$ м при $T = 450$ лет может быть восстановлен

только один период колебаний исходной граничной температуры, так как $\lambda \approx h$.

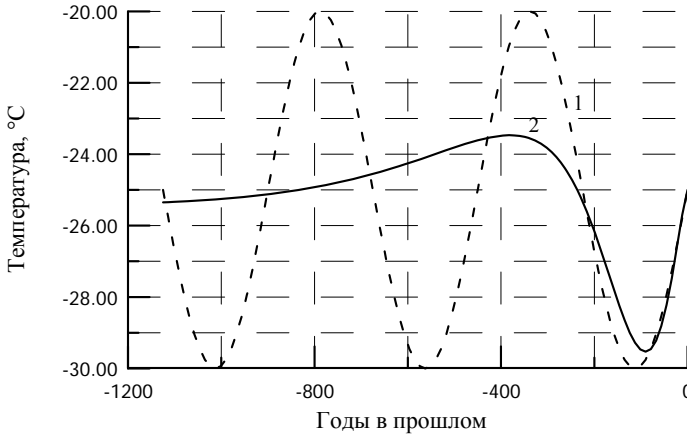


Рис. 13.7, а. Исходная гармонически осциллирующая температура поверхности (1) с периодом $T = 450$ лет; 2 – температура поверхности, восстановленная методом регуляризации Тихонова. Высота ледника $h=500$ м.

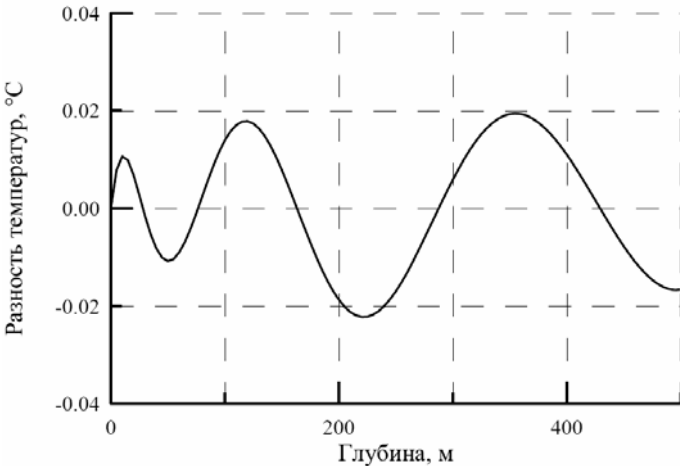


Рис. 13.7, б. Отклонение профилей, соответствующих исходной гармонически осциллирующей температуре поверхности и температуре поверхности, восстановленной методом регуляризации (см. рис. 13.7,а).

В качестве примеров реконструкции гармонически осциллирующей температуры поверхности в случае $\lambda > h$ ранее рассматривались результаты реконструкции колебаний с периодами $T = 2 \cdot 10^3$ и $T = 5 \cdot 10^3$ лет. Эти результаты, в частности, свидетельствуют, что в случае $h = 500$ м и $a_0 = 0,3 \text{ м} \cdot \text{год}^{-1}$ ($Pe \approx 4.2$) с точностью до $0,01^\circ\text{C}$ профиль температуры в леднике хранит в себе информацию об изменениях температуры поверхности за период ~ 1000 лет.

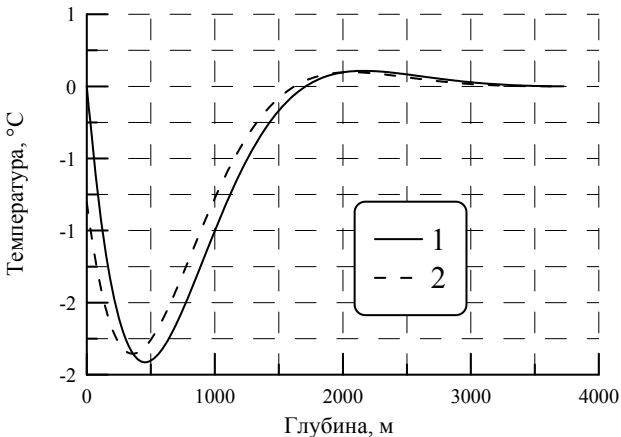


Рис. 13.8. Возмущение температуры в леднике с высотой $h = 3725$ м для гармонических колебаний температуры поверхности с периодом 20 тыс. лет:

1 соответствует случаю, когда на границе раздела ледник-порода задан тепловой поток (граничное условие 2-го рода) и на поверхности (при $z = 0$) задана температура $\mu(t)$ (граничное условие 1-го рода); 2 соответствует фиксированному значению температуры на границе раздела ледник-порода (граничное условие 1-го рода), что имеет место при наличии фазового перехода на этой границе, и теплообмену по закону Ньютона на поверхности ледникового покрова (граничное условие 3-го рода)

13.3.2 Результаты реконструкции температуры поверхности ледников методом регуляризации по экспериментальным данным

В данном пункте представлены результаты реконструкции граничных температур по температурным профилям, измеренным в скважинах, пробуренных в некоторых ледниковых куполах Евразийской Арктики, а также в ледниках Ледяная Шапка Барнес (Канадская Арктика) и Гулия (Китай) (рис. 13.9). Измерения проводились в период с 1975 по 1992 г. Точность измерения температуры в скважине порядка $0,01^{\circ}\text{C}$. Предполагаемый диапазон, в котором может быть заключена скорость аккумуляции осадков, составляет от 0,1 до 0,6 м/год. Также предполагалось, что скорость адвекции изменяется линейно от значения скорости аккумуляции на поверхности до нуля у основания ледника. В тех случаях, когда на границе раздела ледник-порода использовалось фиксированное значение геотермического потока, это значение непосредственно определялось с помощью измеренного профиля температуры.

Граничные температуры, восстановленные для ледниковых куполов Аустфонна, Академия Наук, Ледяная шапка Барнес и Гулия, представлены попарно на рис. 13.10 и 13.11. Основываясь на результатах реконструкции температуры поверхности в тестовых задачах, промежутки времени $-2000 < t < 0$ лет, на котором представлены результаты реконструкции, можно условно разделить на три области. В первой области (температуры изображены сплошной линией) восстановленная температура количественно соответствует исходной (неизвестной) температуре поверхности. Во второй области (температуры изображены пунктирной линией) реконструкция, вероятно, имеет качественный характер. Например, для Аустфонна восстановлен факт существования потепления в этой области, соответствующий периоду "Средневековое потепление". В оставшейся части промежутка $-2000 < t < 0$ лет (температуры изображены штрихпунктирными линиями) информация об изменениях температуры, фактически, отсутствует в температурном профиле.

Заметим также, что изменения температур на глубине 10 м в этих ледниках за последние 200 лет гораздо более значительны, чем соответствующие изменения температуры воздуха, определенные с помощью изотопного анализа [Overpeck et. al., 1997]. По-видимому,

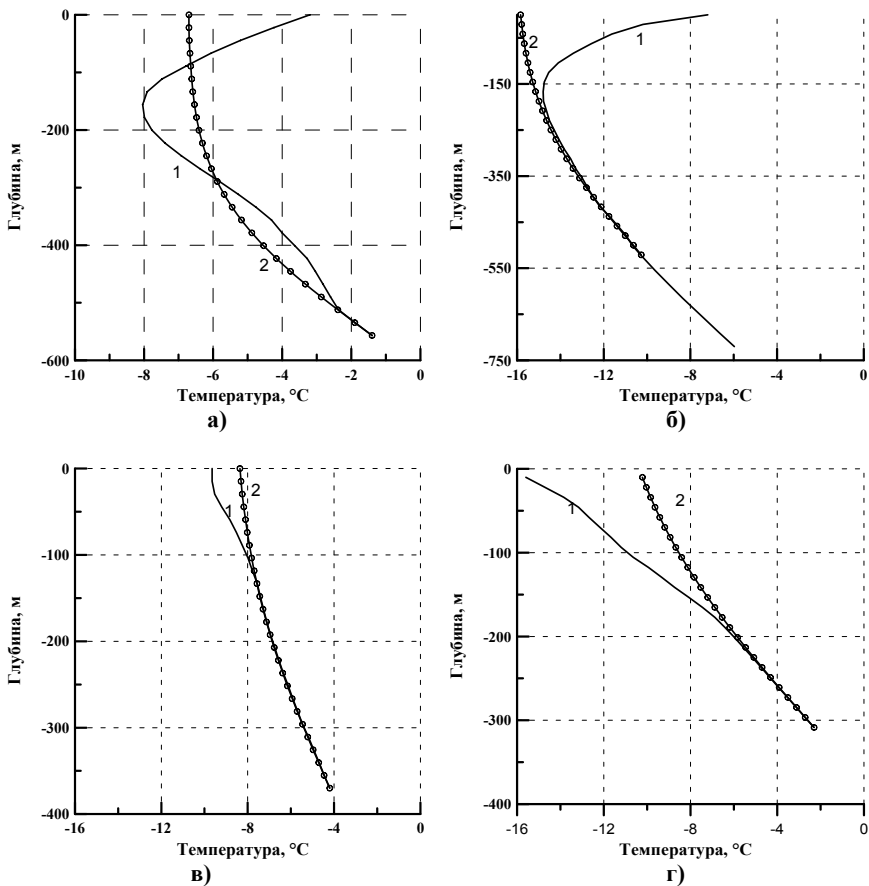


Рис. 13.9. Профили температуры в скважинах ледниковых куполов: а) Аустфонна, б) Академия Наук, в) Ледяная шапка Барнес и г) Гулия соответственно: 1 – профиль температуры, полученный в результате измерений температуры в скважине; 2 – стационарное распределение температуры в леднике

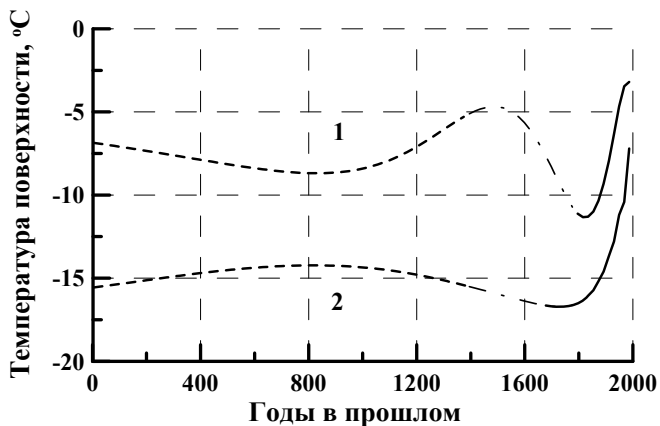


Рис. 13.10. Температуры поверхности, восстановленные соответственно для ледниковых куполов Аустфонна (1) и Академия Наук (2)

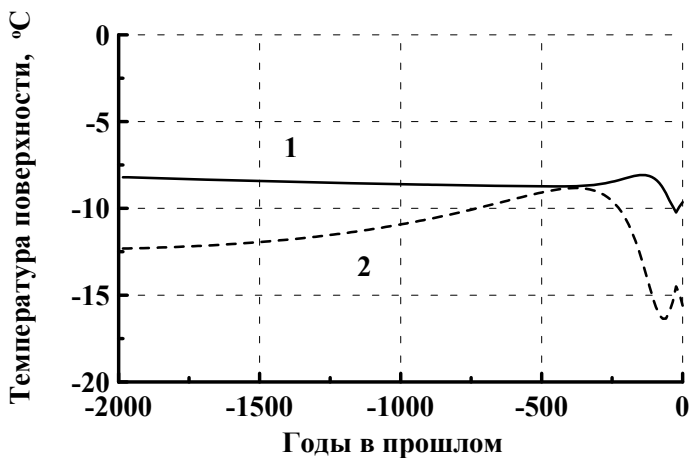


Рис. 13.11. Температуры поверхности, восстановленные соответственно для ледниковых куполов Ледяная шапка Барнес (1) и Гулия (2)

это связано со сложным взаимодействием между водой, образующейся в результате таяния льда, или вследствие выпадения на поверхность ледника мокрых осадков, и фирном. Таким образом, температура на глубине 10 м может изменяться более значительно по сравнению с соответствующим изменением температуры воздуха.

Результаты реконструкции температуры поверхности арктических ледников (Аустфонна и Академия Наук (рис. 13.10)), в общем, подтверждают факты существования "Средневекового потепления" (MWP) (до 13-14 в.) и следующего за ним малого ледникового периода (LIA) (с 14 по 19 в.). Таким образом, результаты реконструкции поверхностных температур для ледников Аустфонна и Академия Наук согласуются с данными о существовании вышеуказанных периодов, полученными из других источников [Thompson and Mosley-Thompson, 1987; Lamb, 1995; O'Brien et al., 1995]. Отметим, что по данным изотопного анализа кернов из Гренландии [O'Brien et al., 1995], переход к малому ледниковому периоду сопровождался резким похолоданием, и продолжительность этого перехода составила всего несколько десятков лет. В данном случае невозможно установить этот факт, так как решение обратной задачи определяется на множестве гладких функций.

Предложенный метод также был использован для восстановления температуры поверхности по относительно недавно полученным данным (профилям) для ледникового купола Земля Франца Иосифа. Значение скорости аккумуляции осадков (0,3..0,6 м/год) фактически не влияет на восстанавливаемую температуру поверхности за последние 200 лет, так как этому периоду времени соответствуют данные в верхней части измеренного профиля температуры, где суммарный (интегральный) эффект от адвекции незначителен (рис. 13.12). Отклонение профиля, соответствующего восстановленной температуре поверхности, от экспериментального профиля не превышает 5% за исключением небольшой области вблизи поверхности, что вероятно связано с ошибками в измерениях (рис. 13.13). Последний период, когда имело место похолодание, подобен соответствующим периодам для ледниковых шапок Барнес и Гулия.

Профиль температуры в скважине в начальный момент времени $t=0$ является одним из параметров задачи. Было установлено, что при $t_0 < t < t_f$ решение обратной задачи нечувствительно к этим

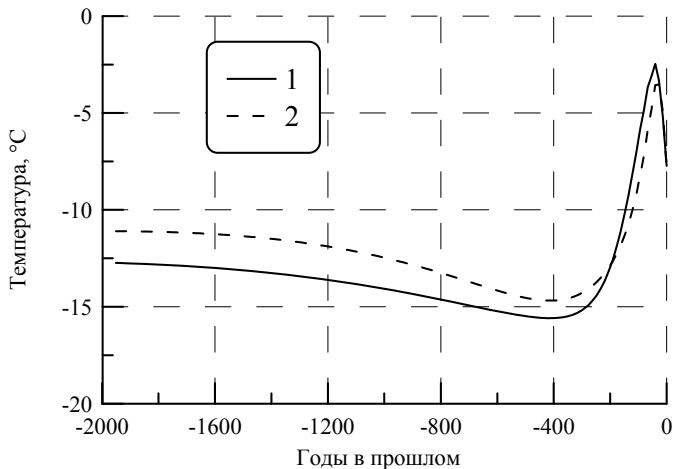


Рис. 13.12. Температуры поверхности, восстановленные для различных значений скорости аккумуляции (Земля Франца Иосифа):
1) 0,3 м/год; 2) 0,6 м/год

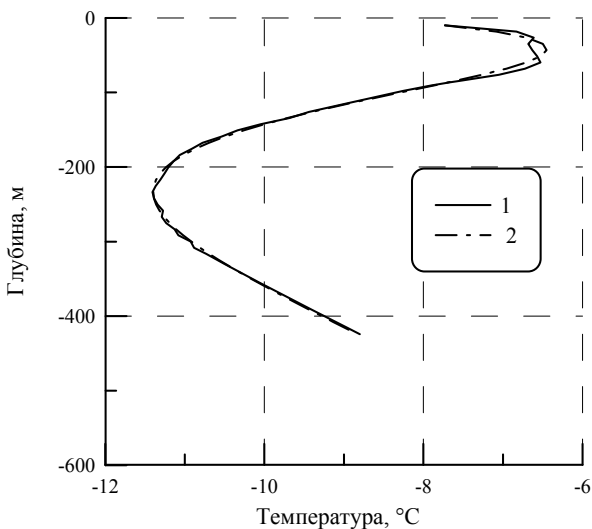


Рис. 13.13. Профиль температуры, полученный в результате измерений температуры в скважине на Земле Франца Иосифа, (1); профиль, соответствующий восстановленной температуре поверхности, (2)

начальным данным. Для ледникового купола Аустфонна граничная температура была восстановлена при различных начальных условиях, в качестве которых были взяты стационарные профили с температурой поверхности, соответственно равной $-7,5$ и -30 °С. Реконструкция проводилась на промежутке $-10^4 < t < 0$. Такое отличие начальных условий существенно не повлияло на реконструированную температуру поверхности в последние 500-600 лет (рис. 13.14). Расхождение граничных температур при $t < -500$ лет, в частности, может быть обусловлено влиянием стабилизатора на результат реконструкции температуры поверхности (абсолютные значения граничной температуры $\mu(t)$ и ее производной при $t < -2 \cdot 10^3$ лет во втором случае ($\mu(0) = -30$ °С) больше, чем в первом ($\mu(0) = -7,5$ °С)).

В нижней части, вблизи основания все рассматриваемые ледники за исключением ледникового купола Аустфонна находятся в стационарном (или квазистационарном) состоянии. Значения геотермических тепловых потоков были получены из соответствующих распределений температуры вблизи оснований ледников. Мы предполагаем, что значение геотермического теплового потока для ледникового купола Аустфонна заключено в интервале $0,03 \leq Q \leq 0,06$ Вт/м², и восстановили температуру поверхности для некоторых значений из этого интервала (0,035, 0,05 и 0,06 Вт/м²). Заметные отличия в восстановленных температурах наблюдаются для моментов времени $t < -200$ лет (рис. 13.15).

После того как была пробурена скважина в ледниковом куполе Аустфонна, уровень воды в ней поднялся на 50 м. Это дает возможность предположить, что на границе раздела ледник-порода температура достигает точки плавления льда, что может быть связано с существованием течений морской воды вдоль границы раздела. Низкая температура таяния льда ($-1,4$ °С) обусловлена наличием примесей солей в этой воде. Восстановленная температура поверхности для случая, когда на границе раздела вместо теплового потока задана постоянная температура ($-1,4$ °С), представлена на рис. 13.15 (кривая 4). Эта граничная температура больше всего соответствует температуре поверхности, восстановленной для геотермического

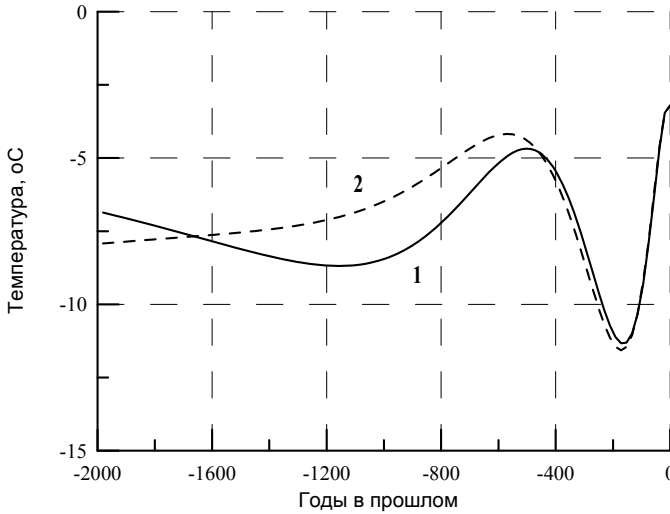


Рис. 13.14. Температуры поверхности, восстановленные для различных значений начальной температуры на поверхности ледников Аустфонна:

1) $\mu(0) = -7,5^{\circ}\text{C}$; 2) $\mu(0) = -30^{\circ}\text{C}$

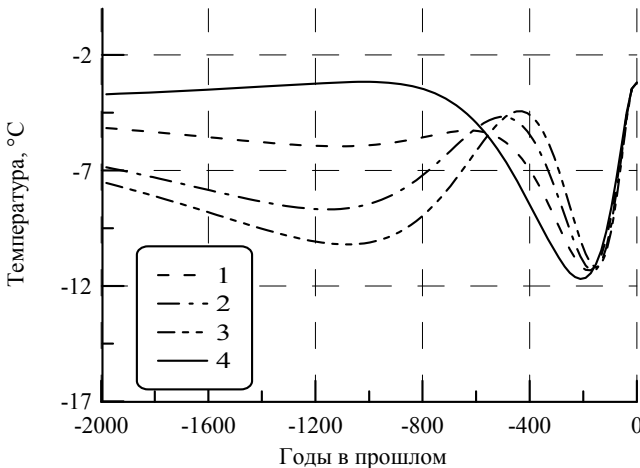


Рис. 13.15. Температуры поверхности, восстановленные для различных значений геотермического потока: 1) $0,035 \text{ Вт/м}^2$; 2) $0,05 \text{ Вт/м}^2$; 3) $0,06 \text{ Вт/м}^2$;

4) на границе раздела ледник-порода задана постоянная температура, равная температуре фазового перехода

теплового потока, который равен $0,029 \text{ Вт/м}^2$. Предполагая, что геотермический тепловой поток из породы известен, можно оценить скорость абляции на границе раздела. Разность значений тепловых потоков на границе раздела затрачивается на таяние льда и равна $\rho L \dot{a}$, где ρ – плотность льда, L – скрытая теплота плавления и \dot{a} – скорость таяния льда. Если геотермический тепловой поток из породы равен $0,05 \text{ Вт/м}^2$, то $\dot{a} = 2,1 \text{ мм/год}$, и $\dot{a} = 7,3 \text{ мм/год}$ для самой большой из возможных величины геотермического теплового потока, равной $0,1 \text{ Вт/м}^2$.

Влияние значения скорости аккумуляции на восстанавливаемую температуру поверхности для ледникового купола Аустфонна сходно с соответствующим влиянием аккумуляции для ледникового купола Земля Франца Иосифа: не существует больших отличий в восстановленных температурах поверхности за последние 200 лет.

Поведение температуры у основания ледникового купола Аустфонна имеет достаточно сложный характер. По-видимому, в этой области можно наблюдать некоторое взаимодействие температурных режимов. Как было отмечено выше, вероятно, имеет место плавление на границе раздела. Для моделирования процесса распространения тепла в данном случае использовались различные граничные условия на границе раздела.

13.4. Метод реконструкции с использованием дополнительных косвенных источников изменений климата

Метод реконструкции температуры поверхности, использующий дополнительные косвенные источники изменений климата, основан на том, что для многих регионов изменения температуры на поверхности Земли и записи, полученные из косвенных источников, связаны линейным соотношением: $\mu(t) = a\psi(t) + b$.

В качестве функции $\psi(t)$ могут быть взяты записи из различных косвенных источников, расположенных рядом со скважиной. Например, для скважин в горных породах это могут быть записи годовых колец деревьев или озерных отложений, а для скважин в ледниках это будут записи относительной концентрации изотопа кислорода $\delta^{18}\text{O}$, полученные из ледниковых кернов этой же скважины.

Впервые на возможность использования стабильных изотопов (кислорода), входящих в состав карбонатных отложений (кораллов, известняков) на морском дне, для палеореконструкции климата было указано Г. Юри в 1948 г. Было отмечено, что относительное количество изотопов кислорода в карбонате частично зависит от температуры воды, которая была при отложении карбоната. В частности, если исходное отношение изотопов ^{18}O и ^{16}O в воде 1/500, то отношение изотопов кислорода в карбонате кальция, кристаллизовавшегося при 0°N , будет 1.026/500. Если же температура воды 25°C , то отношение изотопов ^{18}O и ^{16}O в карбонате кальция составляет величину 1.022/500 [Васильчук, Котляков, 2000]. Таким образом, существует слабо выраженная температурная зависимость относительной концентрации изотопа ^{18}O в карбонате кальция по сравнению с водой.

Многочисленные геофизические исследования второй половины XX в. показали, что относительные концентрации стабильных изотопов кислорода и дейтерия ($\delta^{18}\text{O}$ и δD) в атмосферных осадках зависят от температуры, при которой эти осадки были сформированы. И, соответственно, атмосферные осадки, сохранившиеся в твердой фазе в ледниковых покровах и подземных льдах (ледяных жилах), содержат информацию об изменениях температуры атмосферы в прошлом.

В глобальном масштабе указанная температурная зависимость установлена по результатам наблюдений на 38 умеренно континентальных и островных станциях Северной Атлантики, охваченных в начале 1960-х годов программой МАГАТЕ и ВМО. А именно, было установлено, что в среднем изотопный состав осадков линейно зависит от температуры [Dansgaard, 1964]:

$$\delta^{18}\text{O} = 0.69u^{\circ} - 13.6^{\circ}/_{00}, \quad \delta^2\text{H} = 5.6u^{\circ} - 100^{\circ}/_{00}.$$

Однако в региональных масштабах (с учетом региональных особенностей климата) соотношение между изотопным составом атмосферных осадков и температурой может существенно меняться, что проявляется в вариации значений коэффициентов [Васильчук, Котляков, 2000].

Таким образом, принимая во внимание линейное соотношение между изотопным составом осадков и температурой, которое имеет место как в глобальном, так и в региональном масштабе, значения температуры атмосферы в прошлом, в частности, могут быть определены по значениям концентрации $\delta^{18}\text{O}$ (δD) в годовых слоях ледниковых покровов.

Коэффициенты линейной зависимости $\delta^{18}\text{O} = \alpha t^0 + \beta$ могут быть определены либо непосредственно по данным измерений на метеостанциях, либо с помощью температурного профиля в скважине ледника. Во втором случае рассматривается задача реконструкции температуры поверхности ледника, принимая во внимание, что восстанавливаемая температура линейно связана с заданной функцией соотношением $\mu(t) = a\psi(t) + b$, где $\psi(t) = \delta^{18}\text{O}(t)$ (т.е. обратным соотношением для $\delta^{18}\text{O}(t^0)$). Такая задача получила название задачи калибровки изотопного палеотермометра по температурному профилю [Cuffey et al., 1994].

Задача подбора квазирешения $\tilde{\mu}(t)$ на множестве функций $\{\mu\}$, которые могут быть представлены в виде: $\mu(t) = a\psi(t) + b$, где $\psi(t)$ – заданная функция, является корректно поставленной, так как области изменения коэффициентов всегда можно считать ограниченными ($a \in [a_1, a_2]$, $b \in [b_1, b_2]$) и, соответственно, множество $\{\mu\}$ – компактным и выпуклым [Тихонов, Арсенин, 1986].

Решение прямой задачи, которая в данном случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho(T)c(T)\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[k(T)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right] - \\ -\rho(T)c(T)w(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} &+ f(z,t) \\ z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f], \\ T(0,t) &= a\psi(t) + b, \\ \frac{\partial T}{\partial z}(H,t) &= -\frac{q}{k(T(H,t))}, \\ T(z,0) &= U(z) + c, \end{aligned} \tag{13.19}$$

где $\psi(t) = \delta^{18} O(t)$; $U(z)$ – стационарное решение задачи (13.19) с температурой поверхности, равной 0°C ; c – температура поверхности в начальный момент времени (в прошлом), которая в данном случае также рассматривается в качестве свободного параметра задачи.

Решение задачи (13.19) может быть представлено в виде суперпозиции: $T(z, t_f) = U(z) + aT_1(z, t_f) + bT_2(z, t_f) + cT_3(z, t_f)$, где $T_1(z, t_f)$, $T_2(z, t_f)$ и $T_3(z, t_f)$, соответственно, решения следующих задач:

$$1) \quad \frac{\partial T_1}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - w(z) \frac{\partial T_1}{\partial z}, \quad z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f];$$

$$T_1(0, t) = \psi(t); \quad \frac{\partial T_1}{\partial z}(h, t) = 0;$$

$$T_1(z, 0) = 0;$$

$$2) \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} - w(z) \frac{\partial T_2}{\partial z}, \quad z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f];$$

$$T_2(0, t) = 1; \quad \frac{\partial T_2}{\partial z}(h, t) = 0;$$

$$T_2(z, 0) = 0;$$

$$3) \quad \frac{\partial T_3}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} - w(z) \frac{\partial T_3}{\partial z}, \quad z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f];$$

$$T_3(0, t) = 0; \quad \frac{\partial T_3}{\partial z}(h, t) = 0;$$

$$T_3(z, 0) = 1;$$

Тогда условия минимальности невязки

$$\rho = \int_0^h \{ \chi(z) - U(z) - aT_1 - bT_2 - cT_3 \}^2 dz \quad \text{как функции параметров}$$

a, b, c приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно этих параметров:

$$\begin{cases} a \int_0^h T_1^2 dz + b \int_0^h T_1 T_2 dz + c \int_0^h T_1 T_3 dz = \int_0^h \theta(z) T_1 dz \\ a \int_0^h T_1 T_2 dz + b \int_0^h T_2^2 dz + c \int_0^h T_2 T_3 dz = \int_0^h \theta(z) T_2 dz \\ a \int_0^h T_1 T_3 dz + b \int_0^h T_2 T_3 dz + c \int_0^h T_3^2 dz = \int_0^h \theta(z) T_3 dz \end{cases} \quad (13.20)$$

где $\theta(z) = \chi(z) - U(z)$.

Относительно полученной системы (13.20) необходимо сделать следующее замечание. Решение задачи 3) $u_3(z, t_f) \xrightarrow{t_f \rightarrow \infty} 0$, т.е. система (13.20) вырождается при $t_f \rightarrow \infty$ (для достаточно больших t_f будет плохо обусловленной системой). Фактически, это означает, что параметр c для достаточно больших промежутков времени $[0, t_f]$ следует считать заданной величиной (система (13.20) вырождается в систему двух уравнений относительно a и b), которую можно определить из условия соответствия (наложения) экспериментального и стационарного профилей вблизи границы раздела ледник-порода. Так, для ледниковых куполов Арктики с $h \sim 500$ м годовые слои вблизи основания датируются моментами времени $t_f \sim 10^4$ лет. Таким образом, с учетом оценок времени релаксации в данном случае при реконструкции температуры поверхности (коэффициентов a и b) с использованием $\psi(t) = \delta^{18}O(t)$ на промежутке $[0, t_f]$ ($t_f \sim 10^4$ лет) параметр c следует определять не из системы (13.20), а с помощью продолжения стационарного профиля.

Рассмотрим вспомогательную задачу определения коэффициентов a, b, c из системы (13.20), используя при этом следующие

исходные данные: $\psi(t) = -30 + 5 \sin \frac{4\pi t}{t_f}$; $t_f = 5 \cdot 10^3$ лет;

$h = 500$ м; $\chi = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$; $k = 2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$; профиль адвек-

ции линейный $a_0 = 0,3 \text{ м} \cdot \text{год}^{-1}$. В качестве исходных значений коэффициентов a и b возьмем значения, соответствующие зависимости изотопно-кислородного отношения от температуры, полученной по результатам наблюдений на 38 метеостанциях Северной Атлантики [Dansgaard, 1964]. Таким образом получим: $a = 1/\alpha = 1,45^\circ\text{C}$, $b = -\beta/\alpha = 19,7^\circ\text{C}$ и, соответственно,

$$\mu(t) = -23,8 + 7,25 \sin \frac{4\pi t}{t_f}, \quad c = -23,8^\circ\text{C}.$$

С помощью вспомогательной задачи проведем исследование влияния погрешности измерения температуры в скважине и изотопно-кислородного отношения на погрешность вычисления коэффициентов a, b и c с помощью системы (13.20). При этом в качестве экспериментального профиля температуры, как и в тестовых задачах, рассмотренных в предыдущих главах, будем использовать решение прямой задачи (13.19), полученное для указанных выше исходных значений коэффициентов a, b и c , с наложенными на него случайными возмущениями δu_i в узлах разбиения i с амплитудами от 0.01 до 2°C (для исследования влияния погрешности температуры в скважине). Соответственно, для определения влияния погрешности измерения $\delta^{18}\text{O}$ на решение системы (13.20) в качестве функции $\psi(t)$ будем рассматривать исходную функцию с наложенными на нее случайными возмущениями $\delta\psi_j$.

Зависимости относительных погрешностей вычисления коэффициентов a, b и c от абсолютной погрешности температуры имеют линейный характер, и коэффициенты пропорциональности, очевидно, определяются выражением: $k_i = \delta \Delta_i / \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$; где Δ_i – определитель матрицы, полученной заменой i -го столбца матрицы системы (13.20) на столбец $b_i = \int_0^h \theta T_i dz$, $\delta \Delta_i$ – определитель матрицы, полученной заменой соответствующего столбца матрицы

системы (13.20) на столбец $\delta b_i = \int_0^h \delta\theta T_i dz$, $\delta\theta$ – случайная ошибка

с амплитудой 1°C . Например, для коэффициента $a - k_a \sim 0.4 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

Полученные значения погрешностей составляют величину $\approx 1\%$ даже при относительно больших значениях флуктуаций температуры в скважине ($\delta T \sim 1^\circ\text{C}$). (В эксперименте, как уже отмечалось в предыдущих главах, погрешность температуры в скважине составляет $\sim 0.01^\circ\text{C}$.) Таким образом, наличие случайной ошибки при измерении температуры в скважине слабо отражается на погрешности вычисления коэффициентов. Это очевидно следует из условий

$\int_0^h \delta\theta T_i dz \approx 0$ ($\int_0^h \delta\theta dz \approx 0$, $\delta\bar{\theta} \approx 0$), показывающих, что значения

правых частей уравнений (13.20) фактически не изменяются при внесении случайной ошибки $\delta\theta$ в профиль температуры.

Отметим, что значения погрешностей для коэффициентов, восстановленных с помощью температурного профиля (из системы (13.20)), при внесении случайной ошибки в профиль температуры значительно меньше соответствующих погрешностей, полученных в экспериментах (по результатам измерений $\delta^{18}\text{O}$ в осадках). Например, по данным, полученным на континентальных станциях севера России, коэффициент $a = 0.96 \pm 0.1 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ($\delta a \approx 10\%$); для Вены коэффициент зависимости $\delta^{18}\text{O}$ от T , $^\circ\text{C}$ $\alpha = 0.4 \pm 0.04 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ($\delta\alpha \approx 10\%$); соответственно, для Москвы $\alpha = 0.34 \pm 0.03 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ($\delta\alpha \approx 8\%$) [Васильчук, Котляков, 2000].

Следует подчеркнуть, что в тех случаях, когда отклонения температуры в скважине $\delta\theta$ не имеют случайного характера ($\delta\bar{\theta} \neq 0$), т.е. эти отклонения обусловлены некоторыми причинами, оказывающими влияние на распределение температуры в скважине ледникового покрова, но которые не учитываются в рамках рассматриваемых моделей тепло- и массопереноса, погрешности вычисления коэффициентов a , b и c могут быть более значительными, т.к. величина определителя $\delta \Delta_i$ в этом случае возрастает.

Случайная ошибка, наложенная на значения функции $\psi(t) = \delta^{18}\text{O}(t)$ в узлах разбиения (погрешность измерения относительной концентрации $\delta^{18}\text{O}$), более существенно отражается на результатах вычислений коэффициентов a, b и c . Значения коэффициентов матрицы системы (13.20) связаны с $\psi(t)$ посредством решения $T_1(z, t_f)$ соответствующей задачи для уравнения тепло- и массопереноса. С учетом наложенных на $\psi(t)$ возмущений $\delta\psi(t)$, решение этой задачи может быть представлено в виде: $T_1(z, t_f) + \delta T_1(z, t_f)$, где $\delta T_1(z, t_f)$ – "температурная волна", соответствующая случайным возмущениям $\delta\psi(t)$. Чем больше длина (период) температурной волны, соответствующей $\delta\psi(t)$, тем более существенным оказывается влияние случайных возмущений функции $\delta^{18}\text{O}(t)$ на значения коэффициентов матрицы системы (13.20) и, следовательно, на погрешность вычисления параметров a, b и c .

Таблица 13.1. Относительные погрешности коэффициентов a, b и c для различных значений шага τ разбиения промежутка $[0, t_f]$

Шаг, год	δa	δb	δc
10	0,16	0,37	0,015
5	0,12	0,27	0,011
3,3	0,09	0,21	0,01
2	0,07	0,16	0,006
1	0,05	0,11	0,005

В свою очередь периодичность функции $\delta\psi(t)$ определяется временным разрешением исходных данных (значений $\delta^{18}\text{O}$) и в рассматриваемой тестовой задаче определяется шагом τ разбиения промежутка $[0, t_f]$. Относительные погрешности вычисления коэффициентов a, b и c для различных значений временного шага τ представлены в табл. 13.1 для амплитуды случайных возмущений $\psi(t) - 1^\circ/00$. Временной шаг $\tau \sim 10$ лет, в частности, соответствует результатам датировок $\delta^{18}\text{O}$ в ледниковом куполе Аустфонна, ко-

торые представляют собой средние значения $\delta^{18}\text{O}$ в кернах длиной ~ 2 м [Arkhipov, 1999].

Погрешность вычисления коэффициента a для $\tau = 10$ лет оказывается относительно высокой, но, в общем, соответствует погрешностям определения коэффициента a по данным метеонаблюдений (некоторые из которых приведены выше). Принимая во внимание, что с измельчением разбиения (уменьшением периода колебаний $\delta\psi(t)$) влияние погрешности $\psi(t)$ на погрешность вычисления коэффициентов ослабевает, можно рассматривать полученные при $\tau = 10$ лет оценки погрешностей коэффициентов a и b как возможные для случаев с более высоким временным разрешением данных (значений $\delta^{18}\text{O}$). В частности, если используются значения $\delta^{18}\text{O}$ в годовых слоях (данные $\delta^{18}\text{O}$ с годовым разрешением), то относительная погрешность вычисления a составляет $\sim 5^\circ/00$ (для амплитуды случайной ошибки $\sim 1^\circ/00$). Отметим, что непосредственное влияние на погрешность вычисления оказывают случайные ошибки измерения $\delta^{18}\text{O}$ вблизи поверхности ледника, соответствующие последнему периоду колебаний $\delta\psi(t)$, т.е. в рассматриваемой задаче промежутку времени $[-4\tau, 0]$.

Таким образом, отклонения восстанавливаемой температуры на поверхности ледникового купола от исходной температуры атмосферы, соответствующей изменениям $\delta^{18}\text{O}$, определяются как погрешностью измерения $\delta^{18}\text{O}$, так и в значительной степени погрешностями вычисления коэффициентов a и b . Например, в рассматриваемой тестовой задаче отклонение основной тенденции изменения восстановленной температуры от исходной, обусловленное погрешностями вычисления коэффициентов a и b , при $\tau = 10$ лет достигает величины $\approx 2^\circ\text{C}$ (рис. 13.16).

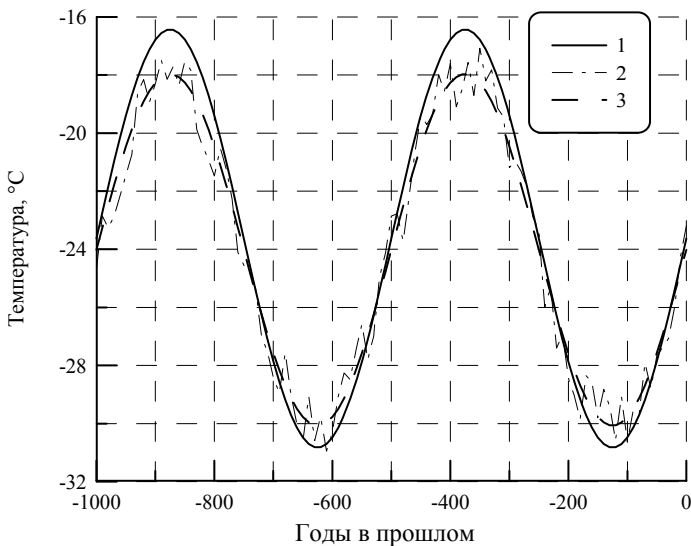


Рис. 13.16. Исходная температура поверхности (1); температура поверхности, соответствующая восстановленным с помощью системы (13.20) значениям коэффициентов a , b , c и функции $\psi(t)$ с наложенными на нее случайными возмущениями (2); основная тенденция (3) изменения восстановленной температуры (без учета случайных возмущений), соответствующая исходной температуре поверхности 1

13.4.1. Результаты калибровки изотопного палеотермометра по данным из скважины ледникового купола Аустфонна

Рассмотрим результаты реконструкции температуры поверхности по данным измерений изотопно-кислородного отношения (рис. 13.17) и температурного профиля в скважине ледникового купола Аустфонна [Arkhipov, 1999]. В данном случае под температурой поверхности подразумевается температура атмосферы вблизи поверхности ледникового купола, изменения которой соответствуют изменениям $\delta^{18}\text{O}$ в атмосферных осадках. Соответственно, (также принимая во внимание высокую чувствительность решения системы (13.20) к отклонениям температуры $\delta\theta$, не имеющим случайного характера) в качестве уравнения, описывающего процесс тепло- и массопереноса в ледниковом куполе, следует использовать уравнение, учитывающее неоднородность теплофизических свойств фирна.

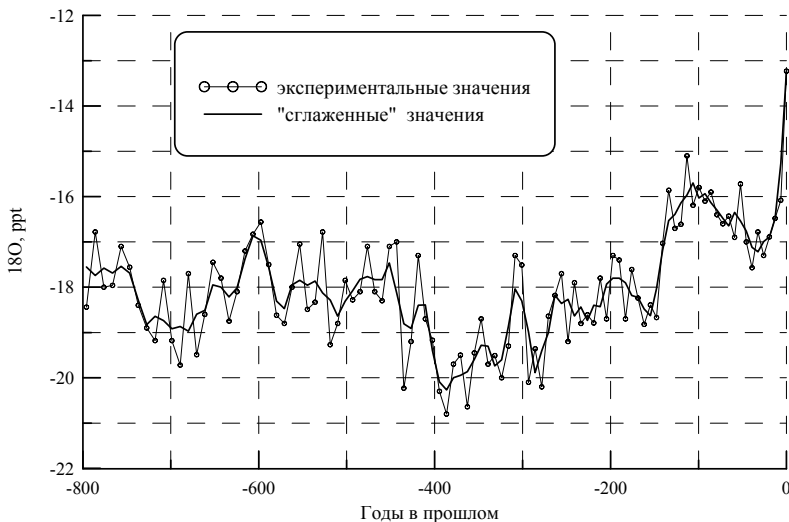


Рис. 13.17. Относительная концентрация изотопа ^{18}O в кернах из скважины ледникового купола Аустфонна [Arkhipov, 1999]. Датировка значений $\delta^{18}\text{O}$ проведена в рамках модели стационарного ледника для скорости аккумуляции $a_0 = 0.31$ м/год и линейного профиля адвекции. Длина кернов 2м [Arkhipov, 1999]

Результаты вычисления коэффициентов a и b с помощью системы (13.20) для различных значений скорости аккумуляции A_0 и соответствующие полученным значениям коэффициентов температурные профили представлены на рис. 13.18. В данном случае скорость аккумуляции определяет датировку значений $\delta^{18}\text{O}$, которая проводилась в рамках модели стационарного ледника для линейно убывающей скорости адвекции.

Отклонения температурного профиля, полученного в результате решения уравнения, от экспериментальных значений температуры в скважине ледникового купола составляет величину $\sim 1\text{-}2^\circ\text{C}$ как в области $z \geq 200$ м, так и при $10 \leq z \leq 200$ м (рис. 13.18). Кроме того, вблизи поверхности ледника температура принимает значения $u > 0^\circ\text{C}$, т.е. среднегодовая температура на момент измерений по данным $\delta^{18}\text{O}$ превышает 0°C , что не соответствует действи-

тельности. В области $z \geq 200$ м эти отклонения, как уже отмечалось в предыдущих главах, связаны с нестационарностью граничного условия при $z = H$, которая в данном случае, вероятно, обусловлена наличием фазового перехода на границе раздела ледник-порода. В области $0 \leq z \leq 200$ м профиль температуры главным образом формируется под влиянием изменений температуры на поверхности ледникового купола. Следовательно, значительные отклонения расчетных от экспериментальных значений при $0 \leq z \leq 200$ м связаны с наличием дополнительных факторов, оказывающих влияние на формирование температурного профиля в ледниковом куполе. Одним из таких факторов является процесс рекристаллизации и связанное с ним тепловыделение в деятельном слое ледникового купола.

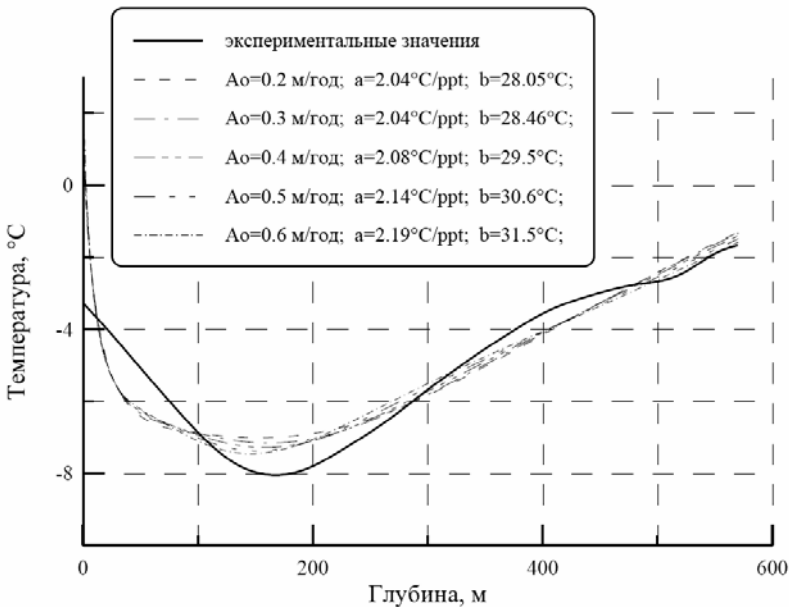


Рис. 13.18. Распределение температуры в ледниковом куполе Аустфонна. Экспериментальные значения температуры в скважине взяты из [Arkhipov, 1999]. Расчетные значения температуры получены в результате решения задачи для уравнения тепло- и массопереноса (13.25). Значение геотермического теплового потока

$$Q = 0,03 \text{ Вт/м}^2$$

В летние периоды для ряда ледниковых куполов Арктики температура на поверхности достигает 0°C , что приводит к сезонному таянию фирна, фильтрации талой воды в деятельном слое и последующей рекристаллизации этой воды. Как показывают исследования, проведенные для ледникового купола Devon Island, процесс рекристаллизации талой воды на относительно продолжительных интервалах времени ($\sim 10^3 \div 10^4$ лет) оказывает существенное влияние на формирование температурного профиля в ледниковом куполе [Paterson and Clarke, 1978]. Этот процесс может быть учтен посредством введения в уравнение переноса тепла источника тепла, расположенного в деятельном слое [Paterson and Clarke, 1978]. Т.е. предполагается, что талая вода по каналам, образующимся в деятельном слое в летние периоды, проникает в фирн и впоследствии рекристаллизуется. Таким образом, при рекристаллизации талой воды в деятельном слое в единицу времени на единицу длины выделяется количество тепла:

$$q(z, t) = (L - cT(z, t)) w_0 \rho_0 \langle P(t) \rangle g(z), \quad (13.21)$$

где L – скрытая теплота плавления, c – теплоемкость, w_0 – скорость адвекции вблизи поверхности ($w_0 \approx A_0$), ρ_0 – плотность фирна в деятельном слое, $u(z, t)$ – температура фирна в деятельном слое, $\langle P(t) \rangle$ – среднее значение относительной концентрации рекристаллизованного льда, $g(z)$ – функция распределения талой воды в деятельном слое.

Функция распределения талой воды $g(z)$ (область локализации талой воды в деятельном слое) не является однозначно установленной функцией [Paterson and Clarke, 1978]. Например, для учета количества тепла при рекристаллизации в ледниковом куполе Devon Island область распределения талой воды $g(z)$ рассматривалась в форме треугольника [Paterson and Clarke, 1978]:

$$g(z) = \begin{cases} (2/l_0^2) \cdot (l_0 - 2|z - d|), & |z - d| < l_0/2; \\ 0, & |z - d| > l_0/2; \end{cases} \quad (13.22)$$

с основанием $l_0 = 0.2$ м.

Под ρ_0 в выражении (13.21) подразумевается значение плотности фирна $\rho_0 = \rho(\tilde{z})$, удовлетворяющее соотношению:

$$\int_{z_1}^{z_2} \rho(z) P(t, z) g(z) dz \approx \rho(\tilde{z}) P(t), \quad \tilde{z} \in [z_1, z_2], \quad \text{где } [z_1, z_2] \text{ – проме-}$$

жуток отличных от нуля значений функции $g(z)$. Соответственно, для относительно узкой области в форме треугольника (13.22) с основанием $l_0 = 0.2 \text{ м}$ $\rho_0 \approx \rho(d)$, где d – глубина, на которой расположена область локализации талой воды в деятельном слое.

Функция $P(t)$ относительного содержания рекристаллизованного льда претерпевает резкие изменения на временных интервалах ~ 1 года: $P(t) \approx 0$ в зимние периоды и $P(t) \approx P_{\max}$ в летние периоды. Как показывают измерения относительного содержания рекристаллизованного льда в кернах длиной 2 м [Arkhipov, 1999], функция $P(t)$ резко флуктуирует и на временных интервалах ~ 10 лет (рис. 13.19). В связи с этим, в выражении (13.21) рассматриваются

средние значения функции $P(t)$: $\langle P(t) \rangle = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} P(t) dt$, где τ – временной шаг разностной схемы. (Для ледникового купола Аустфонна в качестве $\langle P(t) \rangle$, фактически, использовались "сглаженные" значе-

ния функции $P(t)$: $\bar{P}_j = (P_{j-1} + P_j + P_{j+1})/3 \approx \frac{1}{t_{j+\frac{3}{2}} - t_{j-\frac{3}{2}}} \int_{t_{j-\frac{3}{2}}}^{t_{j+\frac{3}{2}}} P(t) dt$

(рис. 13.19).)

Удельная теплоемкость льда, входящая в выражение (13.21): $c = 2009 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$; скрытая теплота плавления льда: $L = 3,35 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1}$. Соответственно, $c/L \sim 10^{-2} \text{ К}^{-1}$. Учитывая, что деятельный слой расположен вблизи поверхности ледника, температура фирна, до которой в процессе теплообмена охлаждается рекристаллизованный лед, $T(z, t) \approx \mu(t)$, где $\mu(t)$ – температура на поверхности ледника (температура атмосферы). Среднегодовые значения температуры на поверхности, соответствующие значениям

$\delta^{18}\text{O}$ в скважине ледникового купола Аустфонна (рис. 13.17), по результатам вычислений коэффициентов a и b , без учета рекристаллизации (рис. 13.4.1.2): $\mu(t) \sim -10^0 \text{C}$. Таким образом, величина

$\frac{\tilde{n}}{L}(-T(z,t)) \approx \frac{c}{L}(-\mu(t)) \sim 10^{-1}$. Отклонение температуры в деятель-

ном слое $T(z,t)$ от температуры поверхности $\mu(t)$ можно оценить, основываясь на результатах измерений температуры в скважине в верхней части ледникового купола. (В данном случае имеются в виду "глобальные" изменения $\mu(t)$, соответствующие средним значе-

ниям $\delta^{18}\text{O}$ (рис. 13.17, представлены средние значения $\delta^{18}\text{O}$ в кернах длиной 2 м, что соответствует усреднению по промежутку времени ~ 10 лет), т.к. измерения температуры в скважине ледникового купола Аустфонна проводились, начиная с глубины ~ 10 м. Для Аустфонна температура в верхней части ($z < 100$ м) изменяется на 1°C на каждые 10 м. Соответственно, температура в деятельном слое

$u(z,t) \approx \mu(t) + \Delta T$, где $\Delta T \sim 1^0\text{C}$ и $\frac{\tilde{n}}{L}(-\Delta T) \sim 10^{-2}$. Таким образом,

в нулевом приближении количество тепла, выделяющегося вследствие рекристаллизации, определяется выражением:

$q = L a_0 \rho_0 \langle P(t) \rangle g(z)$. В первом приближении выражение (13.21) имеет вид:

$$q(z,t) = (L - c \mu_0(t)) a_0 \rho_0 \langle P(t) \rangle g(z), \quad (13.23)$$

где $\mu_0(t) = a\psi(t) + b$, и в качестве коэффициентов a и b используются (в нулевом приближении) значения, полученные без учета рекристаллизации (табл. 13.1).

В выражение (13.23) (или (13.21)) требуется ввести дополнительный параметр P_0 , который является неизвестным и подлежит определению при решении обратной задачи (из условия минимальности невязки). Необходимость его введения, во-первых, обусловлена возможными расхождениями оценок количества талой воды по содержанию рекристаллизованного льда в кернах с реальными значениями этой величины [Paterson and Clarke, 1978]. Следует принять во внимание, что сезонные колебания температуры на поверхности

не учитываются, т.е. $T(z, t)$ вблизи поверхности соответствует среднегодовым изменениям температуры $\mu(t)$. Тем не менее, если основная масса талой воды и, следовательно, процесс рекристаллизации сосредоточены на небольшой глубине, то температура $T(z, t)$ в выражение (13.21) также может претерпевать значительные сезонные колебания. Таким образом, деятельный слой непосредственно участвует в теплообмене с атмосферой, и количество тепла, выделяющегося в верхней части ледникового купола в среднем за год, отличается от величины, полученной с помощью (13.21). (Длина температурной волны λ с периодом 1 год, проникающей в среду с теплофизическими свойствами, которые соответствуют среднему значению плотности в верхних 1,5-2 м фирна, приблизительно равна 18 м.)}

Во-вторых, как уже отмечалось, параметры области рекристаллизации (l_0, d) и, соответственно, $\rho_0 \approx \rho(d)$ в выражении (13.23), вообще говоря, неизвестны. Таким образом, введение дополнительного множителя в выражение (13.23), позволяя минимизировать невязку, дает возможность определять эти параметры из условия $P_0 \approx 1$.

В-третьих, так как, значения относительного содержания рекристаллизованного льда претерпевают существенные флуктуации на временных промежутках ~ 10 лет (рис. 13.19), то вполне обоснованным является предположение о флуктуациях размеров деятельного слоя (глубины области локализации талой воды d) на соответствующих временных промежутках.

Окончательно, уравнение переноса тепла с учетом процесса рекристаллизации для ледникового купола Аустфонна имеет вид:

$$\rho(z)c(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \right] - \rho(z)c(z)w(z)\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} + q(z,t), \quad (13.24)$$

где $q(z, t) = (L - \mu(t)c) a_0 \rho_0 P_0 \langle P(t) \rangle g(z)$.

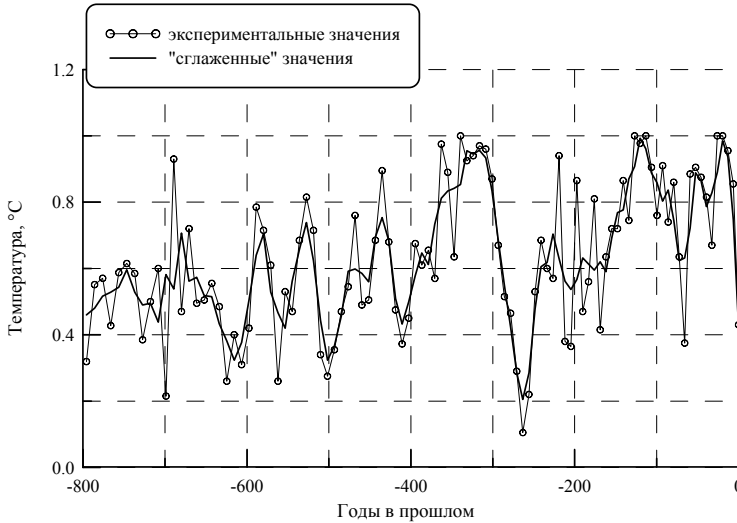


Рис. 13.19. Относительная концентрация рекристаллизованного льда в кернах из скважины ледникового купола Аустфонна [Arkhipov, 1999]. Датировка проведена в рамках модели стационарного ледника для скорости аккумуляции $a_0 = 0,31$ м/год и линейного профиля адвекции

Сделанные выше замечания относительно возможности представления количества тепла $q(z, t)$ в виде (13.23), очевидно, важны с точки зрения линеаризации уравнения переноса тепла (13.24). Таким образом, решение соответствующей задачи для уравнения (13.24), аналогично решению задачи (13.19), может быть представлено в виде суперпозиции $T(z, t_f) = U(z) + aT_1(z, t_f) + bT_2(z, t_f) + cT_3(z, t_f) + P_0T_4(z, t)$, где функции $T_1(z, t_f)$, $T_2(z, t_f)$ и $T_3(z, t_f)$ являются решениями задач, аналогичных задачам 1-3 из п. 13.4, для однородного уравнения переноса тепла. Функция $u_4(z, t_f)$ является решением задачи для неоднородного уравнения (13.24) с нулевыми дополнительными условиями:

$$\rho(z)c(z)\frac{\partial T_4(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z)\frac{\partial T_4(z,t)}{\partial z} \right] -$$

$$-\rho(z)c(z)w(z)\frac{\partial T_4(z,t)}{\partial z} + q(z,t);$$

$$z \in [0, H], \quad t \in (0, t_f];$$

$$T_4(0,t) = 0; \quad \frac{\partial T_4}{\partial z}(h,t) = 0; \tag{13.25}$$

$$T_4(z, 0) = 0,$$

где $q(z, t)$ определяется выражением (13.23).

Условия минимальности невязки приводят к системе четырех линейных алгебраических уравнений относительно a , b , c и P_0 , аналогичной системе (13.20).

Результаты вычисления коэффициентов a и b с учетом рекристаллизации в деятельном слое для значений скорости аккумуляции a_0 в диапазоне от 0,2 до 0,6 м/год и соответствующие полученным значениям коэффициентов температурные профили представлены на рис. 13.20,а. В качестве функции распределения $g(z)$ использовалась функция в виде треугольника (13.22) с основанием $l_0 = 0,2$ м. Глубина локализации источника тепла: $d = 1$ м.

Для датировок $\delta^{18}\text{O}$, полученных с помощью стационарной модели, отклонения рассчитанных от экспериментальных значений температуры в области $10 \leq z \leq 200$ не превышают $0,5^\circ\text{C}$ при $0,4 \leq a_0 \leq 0,6$ м/год и достигают минимальных значений при $a_0 \approx 0,5$ м/год (рис. 13.20, б). В области $0 \leq z \leq 10$ м соответствующие отклонения температуры являются величиной $\sim 1^\circ\text{C}$ и достигают максимальных значений в непосредственной близости от поверхности ледникового купола, т.е. в деятельном слое. При этом следует учитывать, что в качестве экспериментальных значений температуры в области $0 \leq z \leq 10$ м взяты значения, полученные в результате экстраполяции из области $z \geq 10$ м, т.к. измерения температуры в

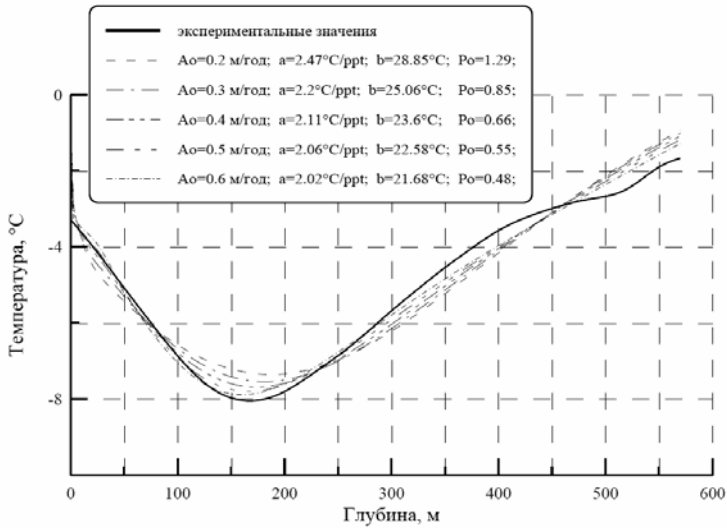


Рис. 13.20а. Распределение температуры в ледниковом куполе Ауостфонна. Экспериментальные значения температуры в скважине взяты из [Arkhipov, 1999]. Расчетные значения температуры получены с учетом процесса рекристаллизации в деятельном слое. Глубина локализации источника тепла $d = 1$ м. Значение геотермического теплового потока $Q = 0,03$ Вт/м²

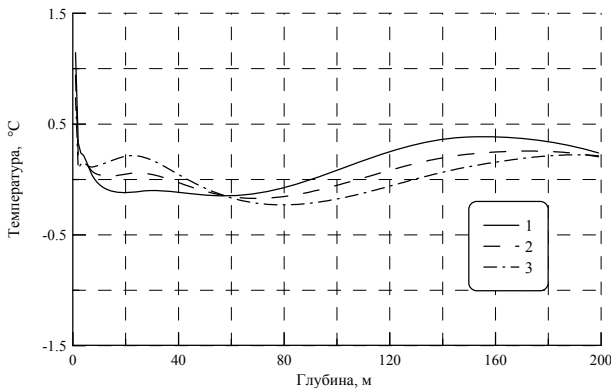


Рис. 13.20,б. Отклонения рассчитанных с учетом рекристаллизации значений температуры от экспериментальных: 1 – $a_0 = 0,4$ м/год ; 2 – $a_0 = 0,5$ м/год и 3 – $a_0 = 0,6$ м/год . Соответствующие температурные профили представлены на рис. 13.20,а

скважине ледникового купола Аустфонна проводились, начиная с глубины 10 м [Arkhipov, 1999].

Принимая во внимание нестационарность граничного условия при $z = H$ для ледникового купола Аустфонна, необходимо также исследовать влияние геотермического потока на результаты вычисления коэффициентов a и b . При вариации теплового потока на границе $z = H$ в диапазоне от 0,01 до 0,05 Вт/м² коэффициент a изменяется в диапазоне от 2,37 до 1,75 °C/ppt, соответственно, b – в диапазоне от 25,7 до 19,5 °C (рис. 13.21). При этом коэффициент обратной зависимости $\delta^{18}\text{O}$ от температуры α изменяется в диапазоне от 0,42 до 0,57 ppt/°C, что также соответствует диапазону возможных значений коэффициента α для Гренландии [Caffey et.al., 1994]. Таким образом, если полагать, что значение теплового потока при $z = H$ $Q \approx 0,03$ Вт/м² (с учетом возможности существования фазового перехода на границе раздела лед-порода), то относительная погрешность вычисления коэффициента a , связанная с неопределенностью значения теплового потока при $z = H$, составляет величину ~15%.

Для аккумуляции $A_0 = 0,5$ м/год и значения теплового потока $Q = 0,04$ Вт/м² полученные значения коэффициента a соответствуют значению коэффициента обратной зависимости $\delta^{18}\text{O}$ от температуры $\alpha \approx 0,53$ ppt/°C, которое, согласуется с результатом калибровки изотопного палеотермометра для Гренландии температурному профилю в верхней части ледникового покрова $0 \leq z \leq 600$ м ($\alpha = 0,53$ ppt/°C) [Caffey et.al., 1994]. Относительная погрешность вычисления коэффициента a , связанная с неопределенностью датировок значений $\delta^{18}\text{O}$, не превосходит 20% в рассмотренном диапазоне изменений a_0 , если в качестве исходного значения скорости аккумуляции взять $a_0 = 0,5$ м/год (рис. 13.20,а).

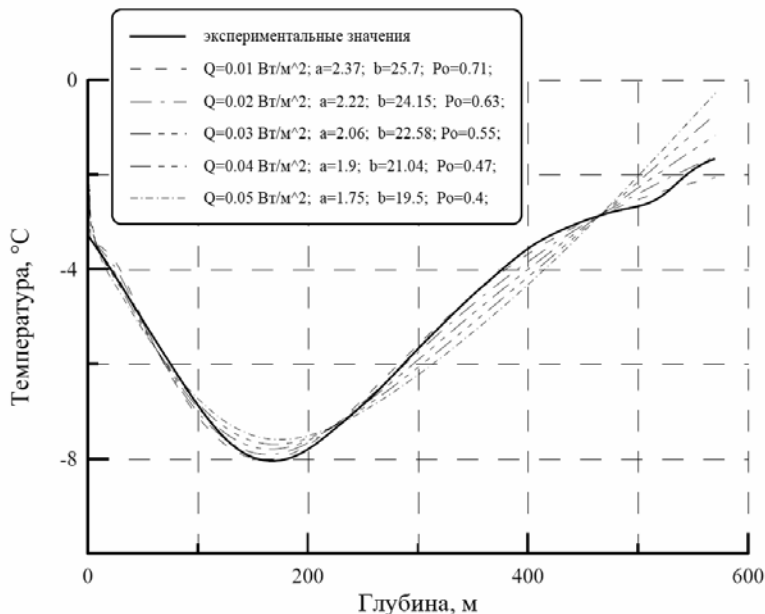


Рис. 13.21. Распределение температуры в ледниковом куполе Аустфонна для различных значений геотермического теплового потока. Скорость аккумуляции $a_0 = 0,5$ м/год. Глубина локализации талой воды $d = 1$ м

Таблица 13.2. Коэффициенты a и b , вычисленные по данным измерений $\delta^{18}\text{O}$ в ледниковом куполе Аустфонна с учетом процесса рекристаллизации в деятельном слое для различных значений глубины d области локализации источника тепла, $a_0 = 0,5$ м/год, $Q = 0,03$ Вт/м²

d , м	a , °C/ppt	b , °C	P_0
0,4	2,03	21,9	1,69
0,6	2,04	22,1	1,02
0,8	2,05	22,37	0,72
1	2,06	22,58	0,55
1,2	2,07	22,77	0,45
1,4	2,08	22,9	0,37
1,6	2,08	23,1	0,32

Вариации глубины области локализации талой воды (источника тепла, связанного с рекристаллизацией) в диапазоне от 0,4 до 1,6 м приводят к соответствующим изменениям параметра P_0 от 1,93 до 0,37 (табл. 13.2). Этот результат обусловлен относительно высокой чувствительностью решения задачи (13.25) к вариациям глубины d (рис. 13.22), и, следовательно, подтверждает необходимость введения в выражение (13.23) дополнительного параметра P_0 . При этом в рассматриваемом диапазоне значений глубины d коэффициенты a , b изменяются незначительно (по сравнению с изменениями этих коэффициентов при вариации скорости аккумуляции и геотермического теплового потока). Соответствующие этим коэффициентам температурные профили при $z \geq 10$ м (начиная с глубины деятельного слоя) отличаются не более чем на 10^{-2} °С.

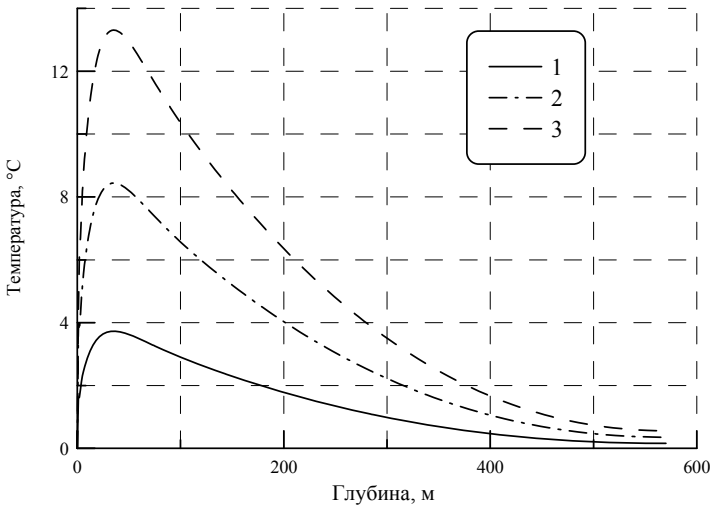


Рис. 13.22. Решения вспомогательной задачи (13.25) (профили $u_4(z, t_f)$) для следующих значений глубины d : 1 – 0,5 м; 2 – 1 м; 3 – 1,5 м. Скорость аккумуляции $a_0 = 0,31$ м/год

Вариации параметра l_0 фактически не влияют на решение задачи (13.25). Для относительно небольших значений l_0 (длины основания треугольника $g(z)$) в окрестности точки d : $\rho(z) \approx \rho(d) + \rho'_z(d)(z - d)$. Соответственно,

$$\rho_0 \approx \frac{1}{l_0} \int_{d-l_0/2}^{d+l_0/2} \rho(z) dz \approx \rho(d). \text{ Таким образом, в выражении (13.23)}$$

непосредственно изменяются лишь параметры треугольника $g(z)$ (высота и основание l_0 при условии сохранения нормировки). С учетом сделанных замечаний, решения задачи (13.25) (профили $u_4(z, t_f)$), полученные при $l_0 = 0,2$ м и $l_0 = 0,4$ м соответственно, отличаются не более чем на $3 \cdot 10^{-3}$ °С.

Исходя из полученных значений P_0 , для стационарного ледникового купола с аккумуляцией $a_0 = 0,5$ м/год глубина локализации источника тепла, связанного с рекристаллизацией, находится в области $0,6 < d < 0,8$ м (табл. 13.2).

Изменения температуры на глубине деятельного слоя (в данном случае на глубине 10 м; кривая 4 на рис. 13.23), в общем, соответствуют изменениям температуры на поверхности ледникового купола Аустфонна по данным измерений $\delta^{18}\text{O}$ (кривые 1 и 2 на рис. 13.23). Температура на глубине 10 м имеет более высокие значения по сравнению с температурой на поверхности ледникового купола, что связано с наличием дополнительного источника тепла, обусловленного рекристаллизацией и дополнительным переносом тепла от поверхности ледникового купола к основанию за счет адвекции. Температура на глубине 10 м, восстановленная методом регуляризации, отражает основную тенденцию изменений температуры на этой глубине по данным $\delta^{18}\text{O}$ (т.е. изменения температуры на глубине 10 м без учета колебаний этой температуры на промежутках порядка нескольких десятков лет) и, таким образом, соответствует изменениям температуры на поверхности ледникового купола (рис. 13.23). Следовательно, полученный результат подтверждает возможность использовать в качестве источника информации об из-

менениях климата в прошлом (температуры поверхности ледниковых куполов Арктики) восстановленные методом регуляризации изменения температуры на глубине деятельного слоя (~10 м).

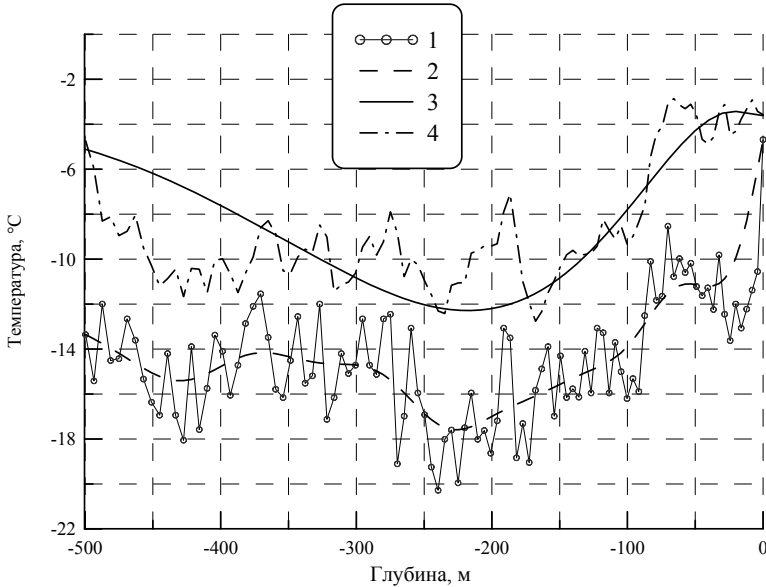


Рис. 13.23. Температура на поверхности ледникового купола Аустфонна по данным измерений $\delta^{18}\text{O}$ для значений коэффициентов a и b , соответствующих скорости аккумуляции $a_0 = 0,5$ м/год и значению геотермического теплового потока $Q = 0,03$ Вт/м² (1); сглаженные значения этой температуры(2); температура на глубине 10 м (деятельного слоя), восстановленная методом регуляризации (3); температура на глубине 10 м, соответствующая данным $\delta^{18}\text{O}$ с учетом процесса рекристаллизации (4)

Таким образом, задача калибровки изотопного палеотермометра по температурному профилю в случае линейного уравнения переноса тепла для ледникового купола сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a и b , устанавливающих зависимость температуры на поверхности ледника от $\delta^{18}\text{O}$, а также относительно параметра c , введение которого связано с неопределенностью начального условия.

Погрешность измерения температуры в скважине слабо влияет на результат вычисления коэффициентов a , b , c . Погрешность измерения относительной концентрации изотопа ^{18}O более значительно влияет на результат вычисления этих коэффициентов. Степень этого влияния определяется временным разрешением значений $\delta^{18}\text{O}$. Чем более высоким является временное разрешение этих данных, тем меньше погрешность вычисления коэффициентов a и b , образующаяся вследствие ошибок в измерениях $\delta^{18}\text{O}$. При этом непосредственное влияние на погрешности вычисления коэффициентов a и b оказывают ошибки измерений $\delta^{18}\text{O}$ в слоях, расположенных в верхней части ледникового купола (~10-20 м).

Для арктических ледниковых куполов, для которых имеет место сезонное таяние, реконструкция температуры поверхности по данным $\delta^{18}\text{O}$ без учета процесса рекристаллизации приводит к значительным отклонениям решения задачи для уравнения тепло- и массопереноса от экспериментального профиля (что непосредственно установлено для ледникового купола Аустфонна). Т.е. количество тепла, выделяющееся в результате рекристаллизации, оказывает существенное влияние на формирование температурного профиля и, вообще говоря, на восстанавливаемые значения коэффициентов, связывающих температуру и $\delta^{18}\text{O}$.

Учет рекристаллизации приводит к введению в задачу калибровки изотопного палеотермометра дополнительного параметра P_0 , связанного с тем, что выражение, определяющее количество тепла, которое выделяется в результате рекристаллизации, в некоторой степени носит оценочный характер. Предполагая, что количество образующейся талой воды, в общем, соответствует содержанию рек-

ристаллизованного льда в ядрах из скважины ледникового купола Аустфонна, для скорости аккумуляции $a_0 = 0,5$ м/год глубина области локализации талой воды заключена в пределах $0,6 < d < 0,8$ м (из условия $P_0 \approx 1$).

Для исследуемого ледникового купола Аустфонна лучшее совпадение рассчитанных и экспериментальных значений температуры достигается при $a_0 \approx 0,5$ м/год. Для аккумуляции $a_0 = 0,5$ м/год полученное значение коэффициента a соответствует значению коэффициента обратной зависимости $\delta^{18}\text{O}$ от температуры $\alpha = 0,52 \text{ ppt}/^\circ\text{C}$, и согласуется с результатами калибровки изотопного палеотермометра для Гренландии. Относительная погрешность вычисления коэффициента a , связанная с неопределенностью датировок значений $\delta^{18}\text{O}$, не превосходит 20% в диапазоне изменений a_0 от 0,2 до 0,6 м/год.

Сопоставление изменений температуры атмосферы по данным $\delta^{18}\text{O}$ из скважины ледникового купола Аустфонна (для аккумуляции $a_0 = 0,5$ м/год) с изменениями температуры на глубине деятельного слоя (10 м), восстановленными по температурному профилю методом регуляризации Тихонова, подтверждает, что изменения температуры на глубине деятельного слоя, восстановленные по температурному профилю, отражают основную тенденцию изменений температуры атмосферы в прошлом.

14. МЕТОДЫ РЕКОНСТРУКЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПРОФИЛЯ В СКВАЖИНАХ ДЛЯ ЛЕДНИКОВ И ГОРНЫХ ПОРОД С ПОСТОЯННЫМИ СВОЙСТВАМИ СРЕДЫ

Рассмотрим методы реконструкции температуры поверхности по данным измерений температурного профиля в скважинах для ледников и горных пород с постоянными свойствами среды. Эти методы используют аналитические решения прямых задач (6.11) и (7.4) для горных пород и (11.16) для ледников.

14.1. Метод реконструкции температуры поверхности ступенчатой функцией с использованием решения задачи на полубесконечности для горных пород

Этот метод основан на том, что в горных породах измеренный температурный профиль и стационарный температурный профиль, начиная с некоторой глубины, совпадают, а остаточный температурный профиль, начиная с этой глубины, равен нулю. Пусть до этой глубины проведены измерения температуры в $M + 1$ различных точках на глубинах $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_M$. Из (7.8) следует, что каждому интервалу глубин (z_m, z_{m+1}) соответствуют интервалы по времени (t_m, t_{m+1}) , границы которого определяются из соотношения:

$$t_m = \frac{z_m^2}{16a^2}. \quad (14.1)$$

Перейдем в систему координат, где:

$$\tilde{t}_{M-m} = t_M - t_m, \quad (14.2)$$

и в дальнейшем под t_m будем подразумевать \tilde{t}_m . Такое преобразование даст разбиение по времени, где t_0 – момент времени, с которого начались резкие изменения температуры на поверхности, а t_M – время измерений температурного профиля, до которого происходили эти изменения. Таким образом, будем искать изменение температуры на поверхности $\mu(t)$ в виде кусочно-постоянной функции (7.3) с интервалами по времени, определяющимися из соотношения

(14.2). При таком способе разбиения длительность интервалов по времени не одинакова – чем дальше от момента измерений отстоит интервал, тем больше его длительность. С одной стороны, это обеспечивает каждый интервал равным количеством измерений температуры, что позволяет реконструировать различные эпизоды температурной истории с одинаковой точностью. С другой – увеличение длительности временных интервалов согласуется с ухудшением разрешающей способности метода по мере удаления в прошлое [Дежеко, 2001]. Изменению температуры на поверхности $\mu(t)$ в виде (7.3) соответствует решение (7.4). Таким образом, будем искать такие значения μ_m , которые обеспечивают минимум функционала:

$$F = \left\| \sum_{i=1}^{M-1} \mu_i \left[Y(z, t_f - t_{i-1}) - Y(z, t_f - t_i) \right] + \mu_M Y(z, t_f - t_{M-1}) - \theta(z) \right\|^2 \quad (14.3)$$

или:

$$F = \sum_{j=0}^M \left[\sum_{i=1}^{M-1} \mu_i \left[Y(z_j, t_f - t_{i-1}) - Y(z_j, t_f - t_i) \right] + \mu_M Y(z_j, t_f - t_{M-1}) - \theta(z_j) \right]^2. \quad (14.4)$$

Условием минимума функционала (14.4) является равенство нулю частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_m} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (14.5)$$

Частные производные функционала определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \mu_m} = & 2 \sum_{j=0}^M \left[\sum_{i=1}^{M-1} \mu_i \left[Y(z_j, t_f - t_{i-1}) - Y(z_j, t_f - t_i) \right] + \right. \\ & \left. + \mu_M Y(z_j, t_f - t_{M-1}) - \theta(z_j) \right] \times \\ & \times \left[Y(z_j, t_f - t_{m-1}) - Y(z_j, t_f - t_m) \right], \quad m = 1, 2, \dots, M-1; \end{aligned} \quad (14.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu_M} = 2 \sum_{j=0}^M \left[\sum_{i=1}^{M-1} \mu_i \left[Y(z_j, t_f - t_{i-1}) - Y(z_j, t_f - t_i) \right] + \right. \\ \left. + \mu_{M-1} Y(z_j, t_f - t_{M-1}) - \theta(z_j) \right] Y(z_j, t_f - t_{M-1}). \quad (14.7)$$

Таким образом, из соотношений (14.5), (14.6) и (14.7) получим матричное уравнение для определения значений μ_m :

$$A\vec{\mu} = \vec{d}, \quad (14.8)$$

где $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ – столбец значений μ_m , элементы столбца \vec{d} определяются соотношениями:

$$d_m = \sum_{j=0}^M \theta(z_j) \left[Y(z_j, t_f - t_{m-1}) - Y(z_j, t_f - t_m) \right], \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ d_M = \sum_{j=0}^M \theta(z_j) Y(z_j, t_f - t_{M-1}), \quad (14.9)$$

а матрица A квадратная и имеет вид:

$$A_{mn} = \sum_{j=0}^M \left[Y(z_j, t_f - t_{m-1}) - Y(z_j, t_f - t_m) \right] \left[Y(z_j, t_f - t_{n-1}) - Y(z_j, t_f - t_n) \right] \\ m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, M-1, \\ A_{Mn} = A_{nM} = \sum_{j=0}^M \left[Y(z_j, t_f - t_{n-1}) - Y(z_j, t_f - t_n) \right] \times \\ \times Y(z_j, t_f - t_{M-1}), \\ n = 1, 2, \dots, M-1, \\ A_{MM} = \sum_{j=0}^M Y^2(z_j, t_f - t_{M-1}). \quad (14.10)$$

Также можно минимизировать функционал (14.4) градиентным методом. На первом шаге итерации зададим начальные значения параметров μ_m^0 . В качестве начального приближения может быть задана усредненная температура поверхности в прошлом. Тогда на n -м шаге итерации значения параметров μ_m^{n+1} будут определяться как:

$$\mu_m^{n+1} = \mu_m^n - \gamma^n \frac{\partial F^n}{\partial \mu_m^n}, \quad (14.11)$$

где $\gamma^n > 0$ – градиентный шаг, а частные производные функционала по параметрам μ_m^n определяются из соотношений (14.6) и (14.7). Данная итерационная процедура выполняется до тех пор, пока не будет достигнут минимум функционала F с заданной точностью.

14.2. Реконструкции температуры поверхности кучочно-постоянной функцией

Рассмотрим решение аналитических задач для горных пород и ледников (6.11) и (11.16) соответственно. Тогда для измеренного остаточного температурного профиля $\theta(z)$ справедливо следующее выражение:

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n \varphi_n(z) \lambda_n a^2 \int_0^{t_f} \mu(\tau) e^{-a^2 \lambda_n (t_f - \tau)} d\tau, \quad (14.12)$$

где $\varphi_n(z)$ и λ_n – собственные функции и собственные значения задач (6.6) и (11.10), определяемые из (6.7), (6.8) и (11.11), (11.13), а коэффициенты I_n определяются из соотношений (6.10) и (11.15) для горных пород и для ледников соответственно. Разложим остаточный температурный профиль по собственным функциям (6.7) (или (11.11) для ледников):

$$\theta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \varphi_n(z), \quad (14.13)$$

где коэффициенты θ_n определяются из соотношения:

$$\theta_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_0^H \theta(z) \varphi_n(z) dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14.14)$$

С другой стороны, из (14.12) и (14.13) следует, что:

$$\theta_n = I_n \lambda_n a^2 \int_0^{t_f} \mu(\tau) e^{-a^2 \lambda_n (t_f - \tau)} d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14.15)$$

Представим изменения температуры на поверхности $\mu(t)$ в виде кусочно-постоянной функции (7.3). Для того чтобы избежать ложных климатических эпизодов, связанных с ухудшением разрешающей способности метода по мере удаления в прошлое, и произвести реконструкцию различных эпизодов температурной истории с одинаковой точностью, воспользуемся разбиением временного отрезка (14.2). Это разбиение соответствует проведенным измерениям на глубинах $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_M = H$. Подставив такое кусочно-постоянное изменение температуры на поверхности в (14.15), получим:

$$\theta_n = I_n \sum_{m=1}^M \mu_m \left(e^{-a^2 \lambda_n (t_f - t_m)} - e^{-a^2 \lambda_n (t_f - t_{m-1})} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14.16)$$

Возьмем $n = 1, 2, 3, \dots, N$, где $N > M$, тогда для определения $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M)$ получим переопределенную систему уравнений $A\vec{\mu} = \vec{d}$, где элементы матрицы A имеют вид:

$$A_{nm} = e^{-a^2 \lambda_n (t_f - t_m)} - e^{-a^2 \lambda_n (t_f - t_{m-1})}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (14.17)$$

а элементы столбца \vec{d} :

$$d_n = \frac{\theta_n}{I_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (14.18)$$

Решение переопределенной системы уравнений можно записать в виде:

$$\vec{\mu} = B\vec{d}, \quad (14.19)$$

где $B = (A'A)^{-1} A'$, A' – транспонированная матрица ($A'_{ij} = A_{ji}$).

14.3. Реконструкции температуры поверхности в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье

Представим температуру на поверхности в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье (13.14). Подставив это представление в соотношение (14.15) получим:

$$\theta_n = I_n \left(1 - e^{-a^2 \lambda_n t_f} \right) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^L a_l \frac{1}{1 + \beta_l^2} - b_l \frac{\beta_l}{1 + \beta_l^2} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14.20)$$

где $\beta_l = \frac{2\pi l}{a^2 \lambda_n t_f}$, $l = 1, 2, \dots, L$. Если взять $n = 1, 2, 3, \dots, N$, где $N > 2L + 1$,

то для определения коэффициентов тригонометрического ряда Фурье $\vec{c} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_L, b_1, b_2, \dots, b_L)$ получим переопределенную систему уравнений $A\vec{c} = \vec{d}$, где элементы матрицы A имеют вид:

$$A_{nl} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & l = 1 \\ \frac{1}{1 + \beta_l^2}, & l = 2, 3, \dots, L + 1 \\ \frac{\beta_l}{1 + \beta_l^2}, & l = L + 2, L + 3, \dots, 2L + 1 \end{cases}, \quad (14.21)$$

а элементы столбца \vec{d} :

$$d_n = \frac{\theta_n}{I_n} \left(1 - e^{-a^2 \lambda_n t_f}\right)^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (14.22)$$

Решение переопределенной системы уравнений для столбца коэффициентов тригонометрического ряда Фурье \vec{c} можно записать в виде:

$$\vec{c} = B\vec{d}, \quad (14.23)$$

где $B = (A'A)^{-1}A'$, A' – транспонированная матрица ($A'_{ij} = A_{ji}$).

Покажем, что решение (14.22) является устойчивым. Пусть имеются два решения $\vec{c}^{(1)}$ и $\vec{c}^{(2)}$, соответствующие столбцам $\vec{d}^{(1)}$ и $\vec{d}^{(2)}$, таким, что $\vec{d}^{(1)}$ и $\vec{d}^{(2)}$ близки по норме. Тогда $\vec{c}^{(i)} = B\vec{d}^{(i)}$, $i = 1, 2$, или $\vec{\mu}^{(2)} - \vec{\mu}^{(1)} = B(\vec{d}^{(2)} - \vec{d}^{(1)})$. Оценим устойчивость задачи из свойства норм:

$$\|\vec{c}^{(2)} - \vec{c}^{(1)}\| \leq \|B\| \|\vec{d}^{(2)} - \vec{d}^{(1)}\|. \quad (14.24)$$

Используя это соотношение, можно оценить погрешность в восстановлении коэффициентов тригонометрического ряда Фурье $a_0, a_1, a_2, \dots, a_L, b_1, b_2, \dots, b_L$ в зависимости от погрешности измерений температуры в скважине. В данную оценку входит величина

$\|B\|$, зависящая от коэффициента температуропроводности, глубины скважины и времени проведения реконструкции, которая может внести существенную погрешность в определении коэффициентов. Таким образом, при реконструкции данным методом необходимо оценить величину $\|B\|$, и тем самым погрешность в определении коэффициентов.

Докажем единственность такого решения. Для этого достаточно доказать, что из задачи (6.3) для горных пород ((11.3) для ледников) с $V(z, t_f) = 0$ следует, что $V(z, t) = 0$ и $\mu(t) = 0$. Решение задачи (6.3) для горных пород ((11.3) для ледников) дается соотношением (6.11) ((11.16)). Известно, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полная ортонормированная система; $\lambda_n \in R$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Из условия $V(z, t_f) = 0$ следует, что $\forall n \in N$:

$$I_n \int_0^{t_f} \mu(\tau) e^{-a^2 \lambda_n (t_f - \tau)} d\tau = 0, \quad (14.25)$$

где I_n определяется из (6.10) для горных пород ((11.15) для ледников) и является некоторым числовым коэффициентом, зависящим от n и не равным нулю. Тогда из (14.25) получим, что функция

$$F(\lambda) = \int_0^{t_f} \mu(\tau) e^{-a^2 \lambda (t_f - \tau)} d\tau$$

имеет бесконечное число нулей $\{\lambda_n\}$. Когда $\mu(t)$ – отрезок тригонометрического ряда Фурье (13.14), это возможно лишь при $\mu(t) = 0$. Таким образом, представление изменения температуры поверхности в виде отрезка тригонометрического ряда Фурье единственно.

Отметим, что если для представления температуры поверхности в виде кусочно-постоянной функции можно доказать устойчивость аналогичным образом, единственность доказать нельзя, так как можно подобрать такие коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M$, отличные от нуля, что $F(\lambda) = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Anderson E. A., A point energy and mass balance model of a snow cover. *NOAA Technical Report NWS, 19*. Office of Hydrology, National Weather Service, Silver Spring, Maryland, 1976.

Arkipov, S.M., 1999. Data bank 'Deep drilling of glaciers: Soviet and Russian projects in Arctic, 1975–1990'. *Materialy Glyatsiologicheskikh Issledovaniy/Data of Glaciological Studies*, 87, 229–231.

Bader H. and Kuroiwa D., 1962, The physics and mechanics of snow as material, Cold regions science and engineering series, Part II-B, US Army Cold Regions Res. And Engr. Lab., Hanover, New Hampshire.

Bader H., 1960, Theory of densification of dry snow on high polar glaciers, *SIPRE Res. Rep.* 69.

Baker, D.G. and Ruschy D.L., 1993. The recent warming in eastern Minnesota shown by ground temperatures. *Geophysical Research Letters*, 20, 371-374.

Beltrami, H. and Taylor, A.E., 1995. Records of climatic change in the Canadian Arctic: towards calibrating oxygen isotope data with geothermal data. *Global and Planetary Change*, 11, 127-138.

Blatter H. 1987. On the thermal regime of an arctic valley glacier: a study of White Glacier, Axel Heiberg Island, N.W.T., Canada. *Journal of Glaciology*, v. 33, No. 114, p. 200-211.

Budd, W. F. & Young, N. W. *The Climatic Record in Polar Ice Sheets* (ed. de Q. Robin, G. 150–176 (Cambridge University Press, 1983)

Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C., *Conduction of heat in solids*, 2nd ed. Oxford University Press, 510 pp, 1959.

Cermak, V., 1971. Underground temperature and inferred climatic temperature of the past millennium. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 10, 1-19.

Cermak, V., Bodri, L., and Safanda, J., 1992. Underground temperature fields and changing climate: evidence from Cuba. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 97, 325-337.

Chisholm, T.J. and Chapman, D.S., 1992. Climate change inferred from borehole temperatures: An example from western Utah. *Journal of Geophysical Research*, 97, 14155-14176.

Chizhov, V. and O.Nagornov. 1991. Thermodynamic properties of ice, water and their mixture under high pressure. In *Glacier -Ocean -*

Atmosphere Interaction (Proceedings of the International Symposium held at St. Petersburg, September 1990), IAHS Publ. No. 208, pp. 463-470.

Clow G.D., 1998. Reconstructing past climatic changes in Greenland and Antarctica from borehole temperature measurements. EOS, Transactions, American Geophysical Union 79: F833 (Abstract)

Clow G.D., Waddington E.D., 1999. Quantification of natural climate variability in central Greenland and East Antarctica using borehole paleothermometry. IUGG XXII Gen. Assy. Abstr., B.249.

Cuffey K.M., G.D. Clow, R.B. Alley, M. Stuiver, E.D. Waddington, R.W. Saltus, 1995, Large Arctic-temperature change at the Wisconsin-Holocene transition, *Science*, 270, 455-458.

Cuffey K.M., R.B. Alley, P.M. Grootes, J.M. Bolzan and S. Anandakrishnan, 1994, Calibration of the isotopic paleothermometer for central Greenland, using borehole temperatures. *Journal of Glaciology*, V. 40, No. 135, 341-349.

Cutler N.N., C.F. Raymond, E.D. Waddington, D.A. Meese, R.B. Alley, 1995, *Annals of Glaciology*, 21, 26-32.

Dahl-Jensen, D. and Johnsen, S.J., 1986. Palaeotemperatures still exist in the Greenland ice sheet. *Nature*, 320, 250-252.

Dahl-Jensen, D., Mosegaard, K., Gundestrup, N., Clow, G.D., Johnsen, S.J., Hansen, A.W. and Balling, N. 1998. Past temperatures directly from the Greenland Ice Sheet. *Science* 282: 268-271.

Dansgaard W, 1964, Stable isotopes in precipitation, *Tellus*, 1964, v.16, 4, 436-468.

Dansgaard W. & Johnsen S.J., 1969 - A flow model and a time scale for the ice core from Camp Century, Greenland. *Journal of Glaciology*, 8: 215-223.

Dorsey N.E., 1940, Properties of ordinary water substance, N.Y. Reinhold, 1940.

Geiger R., 1965. *The Climate Near the Ground*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 611pp.

Giovinetto, M.B., 1960. South Pole Station. Report 825-2-Part IV, USNC-IGY Antarctic Glaciological Data Field Work 1958-1959, The Ohio State Univ. Res. Found.

Goodrich, L.E., 1982. The influence of snow cover on the ground thermal regime. *Canadian Geotechnical Journal*, 19, 421-432.

Gosnold, W.D., Todhunter, P.E., and Schmidt, W.L., 1997. The borehole temperature record of climate warming in the mid-continent of North America. *Global and Planetary Change*, 15, 33-45.

Hanson, B. and R.E. Dickinson, 1987, A transient temperature solution for bore-hole model testing, *Journal of Glaciology*, v. 33, No. 114, 140-148.

Huang, S., 2004. Merging information from different resources for new insights into climate change in the past and future. *Geophysical Research Letters*, 31, L13205, doi:10.1029/2004GL019781.

Huang, S., Pollack, H.N. and Shen, P.-Y. 2000. Temperature trends over the past five centuries reconstructed from borehole temperatures. *Nature* 403: 756-758.

Jones, P. D., M. New, D. E. Parker, S. Martin, and I. G. Rigor. 1999. Surface air temperature and its changes over the past 150 years, *Reviews of Geophysics*, 37(2), 173–200.

Jouzel J., C. Lorius, J.P. Petit, C.Genthon, N.I. Barkov, V.M. Kotlyakov, V.M. Petrov, 1987, Vostok ice core: a continuous isotope temperature record over the last climatic cycle (160000 years), *Nature*, 329, 403-407.

Koci B., Nagornov O., Zagorodnov V., Kelley J. 1996. Hot water drilling of large diameter holes in cold ice. *Proceedings of 5-th International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions*. Ottawa, May 19-22, 1996. P. 170-177.

Kojima K., 1964, Densifications of snow in Antarctica, In M. Mellor ed., *Antarctic snow and ice studies*, Washington, DC, American Geophysical Union, 157-218.

Kotlyakov, V.M., S.M. Arkhipov, K.A. Henderson, O.V. Nagornov. 2004 Deep drilling of glaciers in Eurasian Arctic as a source of paleoclimatic records, *Quaternary Science Rev.* 23, 1371-1390.

Lamb H.H., 1995, *Climate History and the Modern World*, second edition, Routledge, 433p.

Leon G.C., O. Nagornov, S.R. Romo, V. Tchijov. 2002. Thermodynamics of high-pressure water ice polymorphs and kinetics of multiple phase transitions in ice induced by shock waves. *Entropy*. N239/240, p. 66-71.

Lewis, T.J. and Wang, K., 1992. Influence of terrain on bedrock temperatures. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 98, 87- 100.

Lewis, T.J. and Wang, K., 1998. Geothermal evidence for deformation induced warming: Implications for the climatic impact of land development. *Geophysical Research Letters*, 25, 535-538.

Lewis, T.J., 1998. The effect of deforestation on ground surface temperatures. *Global and Planetary Change*, 18, 1-13.

Lythe, M. B. and D. G. Vaughan, D. G. 2001. BEDMAP: a new ice thickness and subglacial

MacAyeal, D.R., Firestone J., Waddington E.D. 1991. Paleothermometry by control methods. *J. of Glaciology*, V. 37, No. 127, p. 326-338.

Mellor M., 1977, Engineering properties of snow, *J. of Glaciol.*, v. 19, No 81, 15-66.

Morris E.M., 1983, Modelling the flow of mass and energy within a snow-pack for hydrological forecasting, *Ann. Glaciol.*, 4, 198-203.

Mosegaard K. Resolution analysis of general inverse problems through inverse Monte Carlo sampling. *Inverse Problems*, 1998, 14, p.405-426.

Nagornov O., V.Zagorodnov, Yu.Konovalov, L.Thompson, Inversion of the temperature-depth profiles for the Arctic glaciers. Abstracts of the XXIV General Assembly of the European Geophysical Society. 19-23 April, 1999. The Netherlands. P.575.

Nagornov O., Y. Konovalov, O. Sergienko. 2002. Reconstruction of past temperatures of glaciers subjected to sub-surface melting. AGU Fall Meeting. San Francisco, California, 6-10 December, 2002. EOS. Trans. AGU, 83(47), Fall Meet. Suppl., Abstract PP52A-0328, p. F886.

Nagornov O., Y. Konovalov, V. Mikhalenko. 2004. Evolution Of The Gregoriev Ice Cap (Tien Shan, Central Asia) For 1980-2050 Revealed By Mathematical Modeling. *Eos Trans. AGU*, 85(47), Fall Meet. Suppl., Abstract C51A-1020.

Nagornov O., Y. Konovalov. 2003. Intense warming of Arctic glaciers subjected to sub-surface melting. Abstracts of the XXIV General Assembly of IUGG. Part B, p. 1029.

Nagornov O., Yu. Konovalov. 2003. Sensitivity of Paleorecon-

structions to Measurements Accuracy of the Glacier Borehole Temperature and Ice Core Geochemical Data. AGU Fall Meeting. San Francisco, California, 7-12 December, 2003. EOS. Trans. AGU, 84(46), Fall Meet. Suppl., Abstract PP32A-0281, p. F895.

Nagornov O.V., Konovalov Yu.V. 2000. Method of glacier surface temperature reconstruction based on the measured temperature-depth profiles and the oxygen-isotopic measurements. XXV General Assembly of European Geophysical Society. Nice, France 25-29 April 2000. CD-ROM. Geophysical Research Abstracts. V. 2. Climatology and Glaciology. p. 450.

Nagornov O.V., Konovalov Yu.V. 2001. Reconstruction of Arctic glacier surface temperatures based on the bore hole temperature measurements Journal of Engineering Physics and Thermophysics. V. 74, No. 2, pp. 1-10.

Nagornov O.V., Konovalov Yu.V., Tchijov V., Cruz Leon G., Rodriguez Romo S. 2001. Method of glacier surface temperature reconstruction based on the measured temperature-depth profiles and the oxygen-isotopic ratios. Proceedings of the Forth Italian-American Conference on Applied and Industrial Mathematics, 19-23 March 2001, Habana, Cuba. Eds. D. Martinez et al., pp. 149-158.

Nagornov O.V., O. Sergienko. 2003. A one dimensional snow-firn layer model for glaciers subjected to seasonal melting. Geophysical Research Abstracts, V. 5, 03316.

Nagornov O.V., Sergienko O.V. 1998. Ice shelf response to the change in ocean temperature. In "Development and application of computer techniques to environmental studies. Editors: D.W. Pepper, C.A. Brebbia, P. Zanetti." WIT Press. Boston, Southampton. Proceedings of Seventh International Conference "EnviroSoft-98". Las Vegas, 10-12 November, 1998. p. 281-295.

Nagornov O.V., Sergienko O.V. 1998. Temperature field of an ice shelf in the vicinity of a hot water-drilled well. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Kluwer. Netherlands, Vol. 71, No. 1, p. 154-160.

Nagornov O.V., Sergienko O.V. 1999. Special features of the processes of heat- and mass transfer under a shelf glacier. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. Kluwer. Netherlands, 1999, Vol. 72, No. 3, pp.524-533.

Nagornov O.V., Sergienko O.V., Zagorodnov V.S., Kelley J.J. Impact of Ocean Temperature Change on Mass Balance of An Ice Shelf Base // Program and Abstracts 49th Arctic Science Conference 25-28 October 1998. Fairbanks, Alaska. Pub. American Association for the Advancement of Science. Arctic Division. P.59.

Nagornov O.V., Y.V. Konovalov and V. Tchijov. 2005. Reconstruction of past temperature for arctic glaciers subjected to intense sub-surface melting. *Annals of Glaciology*. V 40. p. 61-66.

Nagornov O.V., Y.V. Konovalov and V. Tchijov. 2006. Temperature reconstruction for Arctic glaciers. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*. V. 236, Issues 1-2, pp. 125-134.

Nagornov O.V., Yu.V. Konovalov. 2002. Reconstruction of Past Surface Temperatures of Eurasian Arctic Ice Caps. Arctic System Science Program All-Hands Workshop. U.S. National Science Foundation. 20-22 February 2002. Seattle, USA, p. 118.

Nagornov O.V., Zagorodnov V.S. and Kelley J.J. Effect of a heated drilling bit and borehole liquid on the thermoelastic stresses in ice core. *Ice drilling technology// Proceedings of the Fourth International Workshop on Ice Drilling Technology, Tokyo, April 20-23, 1994, p.314-326.*

Nagornov, O.V., V.S. Zagorodnov, and J.J. Kelley. 1994. Effect of a heated drilling bit and borehole liquid on thermoelastic stresses in an ice core. *Proceedings of Fourth International Workshop on Ice Drilling Technology, April 20-23, 1993. Tokyo, Japan. Mem. Natl. Inst. Polar Res., Spec. Issue, v. 49, pp. 328-340.*

Nagornov, O.V., V.S.Zagorodnov, and J.J.Kelley. 1993. Interaction of hydrophilic liquid with ice. *Proceedings of Fourth International Symposium on Thermal Engineering and Science for Cold Regions, September 28-October 1, 1993, U.S. Army CRREL, Hanover, New Hampshire. p. 160-169.*

Nagornov, O.V., V.S.Zagorodnov, and J.J.Kelley. 1994. Effect of a heated drilling bit and borehole liquid on thermoelastic stresses in an ice core. *Proceedings of Fourth International Workshop on Ice Drilling Technology, April 20-23, 1993. Tokyo, Japan. Mem. Natl. Inst. Polar Res., Spec. Issue, v. 49, pp. 328-340.*

Nagornov, Oleg V., Kononov, Yuri V., Tchijov, Vladimir, 2005. Reconstruction of past temperatures for Arctic glaciers subjected to intense subsurface melting. *Annals of Glaciology*, 40, 61-66.

Nagorov O.V., Sergienko O.V. Ice shelf response to the change in ocean temperature.// *Development and Application of Computer Techniques to Environmental Studies*. WITpress Boston, Southampton, 1998, p.281-295.

Nagorov O.V., Sergienko O.V., Zagorodnov V.S. and Kelley J.J. Impact of Ocean Temperature Change on Mass Balance of an Ice Shelf Base.// *Program and Abstracts 49th Arctic Science Conference*. 25-28 October 1998. Fairbanks, Alaska. Published by American Association for the Advancement of Science. Arctic Division., 1998, p.59.

Nagorov O.V., Sergienko O.V., Zagorodnov V.S. Influence of Global Warming on Ice Ablation/Accumulation Rate at Ice Shelf Bottom.// *Abstracts of XXIV General Assembly on European Geophysics Society*. Hague 19-23 April 1999.

Nye J.F., 1959, The motion of ice-sheets and glaciers, *Journal of Glaciology*, 3, 26, 493-507.

O'Brien S.R., P.A. Mayewski, L.D. Meeker, D.E. Meese, M.S. Twickler, S.I. Whiltlow, 1995, Complexity of Holocene climate as reconstructed from a Greenland ice core. *Science*, 270, 1962-1964.

Osterkamp, T.E. and Romanovsky, V.E., 1996. Characteristics of changing permafrost temperatures in the Alaskan Arctic, U.S.A. *Arctic and Alpine Research*, 28, 267-273

Overpeck J., Hughen K., Hardy D., Bradley R., R. Case, M. Douglas, B. Finney, K. Gajewski, G. Jacoby, A. Jennings, S. Lamoureux, A. Lasca, G. MacDonald, J. Moore, M. Retelle, S. Smith, A. Wolfe, & G. Zielinski. *Science*, v. 278, n. 5341 p. 1251-1256, 1997

Paley R., Wiener N.. 1934. *The Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Ser. Vol. 19, Providence, RI.

Paterson W.S.B., G.K.C. Clarke. 1978. Comparison of theoretical and observed temperature profiles in Devon Island ice cap, Canada. *Geophys. J.R. Astron. Soc.*, 55(3), p. 615-632.

Paterson, W.S.B., 1994. *The Physics of Glaciers*, 3rd ed. Butterworth-Heinemann, Burlington, p. 481.

Pollack, H.N. and Huang, S., 2000. Climate reconstruction from subsurface temperatures. *Ann. Rev. Earth Planetary Sci.*, 28, 339-365.

Pollack, H.N., 1993. Climate change inferred from borehole temperatures. *Palaeogeography, Palaeoclimatology, Palaeoecology*, 99, 173-179.

Pollack, H.N., Demezhko, D.Yu., Duchkov, A.D., Golovanova, I.V., Huang, S., Shchapov, V.A., and Smerdon, J.E., 2003. Surface temperature trends in Russia over the past five centuries reconstructed from borehole temperatures. *J. Geophys. Res.* 108 (B4): art. no. 2180, doi:10.1029/2002JB002154.

Pollack, H.N., Huang, S. and Shen, P.-Y., 1998. Climate change record in subsurface temperatures: A global perspective. *Science*, 282, 279-281.

Pollack, H.N., Hurter, S.J., & Johnson, J.R., 1993. Heat loss from the Earth's interior: analysis of the global data set. *Reviews of Geophysics*, 31, 267-280.

Price P.B., O.V. Nagornov, R. Bay, D. Chirkin, Y. He, P. Miodinovic, A. Richards, K. Worschnagg, B.Koci, V. Zagorodnov. Temperature profile for glacial ice at the South Pole: Implications for life in a nearby subglacial lake. *Proceedings of the National Academy of Sciences of United States*. 2002, vol. 99, No. 12, pp. 7844-7847.

Price, P.B., Worschnagg, K. and Chirkin, D., 2000. Age vs depth of glacial ice at South Pole. *Geophys. Res. Letts.* 27, 2129-2132.

Putnam, S.N. and Chapman, D.S., 1996. A geothermal climate change observatory - first year results from Emigrant Pass in northwest Utah. *Journal of Geophysical Research*, 101, 21877-21890.

Raisbeck, G. M., Yiou, F., Bourles, D., Lorius, C., Jouzel, J. and Barkov, N.I., "Evidence for two intervals of enhanced Be deposition in Antarctic ice during the last glacial period." *Nature*, 326 (1987): 273-277.

Safanda, J., 1994. Effects of topography and climatic changes on the temperature in borehole GFU-1. *Prague, Tectonophysics*, 239, 187-197.

Sellers, P.J., 1992. Biophysical models of land surface processes. In: *Climate System Modeling*. Trenberth, K.E. (Ed), Cambridge University Press, 451-490.

Sellers, P.J., Dickinson, R.E., Randall, D.A., Betts, A.K., Hall, F.G., Berry, J.A., Collatz, G.J., Denning, A.S., Mooney, H.A., Nobre, C.A., Sato, N., Field, C.B., Henderson-Sellers, A., 1997. Modeling the exchanges of energy, water, and carbon between continents and the atmosphere. *Science*, 275, 502-509.

Shen, P.Y. and Beck, A.E., 1983. Determination of surface temperature history from borehole temperature gradients. *J. Geophysical Research*, 88, 7485-7493.

Shen, P.Y. and Beck, A.E., 1991. Least squares inversion of borehole temperature measurements in functional space. *J. Geophysical Research*, 96, 19965-19979.

Skinner, W.R. and Majorowicz, J.A., 1999. Regional warming and associated 20th-century land-cover changes in north-western North America. *Climate Research*, 21, 39-52.

Stuiver M., T.F. Braziunas, 1989, Atmospheric ^{14}C and century scale solar oscillations. *Nature*, 338, 405-408.

Tchijov V.E., Keller J., Romo-Rodrigues S.R., Nagornov O.V. 1997. Kinetics of phase transitions induced by shock waves loading in ice. *J. of Physical Chemistry B*. Vol. 101, No. 32. P. 6215-6218.

Thompson L.G. and E. Mosley-Thompson, 1987, Evidence of abrupt climate during the last 1500 years recorded in ice cores from the tropical Quelccaya ice cap, Peru, in: *Abrupt Climate Change*, edited by, W.H. Berger and L.D. Labeyrie, pp. 99-110, D. Reidel, Dordrecht.

topographic model of Antarctica, *J. Geophys. Res.* 106(B6), 11,335-11351

Van Wijk, W.R., 1963. *Physics of plant environment*. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 382 pp.

Whiteford, P., 1993. Evaluation of past climate using borehole temperature measurements. *Weather and Climate*, 13, 3-8.

Zagorodnov V.S., Nagornov, O.V., and L.G. Thompson. 2006. Influence of air temperature on a glacier's active-layer temperature. *Annals of Glaciology*, V. 43, pp. 285-291.

Zagorodnov, V.S., 1988. Recent Soviet activities on ice core drilling and core investigations in Arctic region. *Bulletin of Glacier Research, Data Center for Glacier Research, Japanese Society of Snow and Ice*, 6, 81-84.

Божинский А.Н., Шурова И.Е., 1977, Модель структуры зернистого снега, МГИ, 31, 159-164.

Васильчук Ю.К., Котляков В.М., 2000, Основы изотопной геокриологии и гляциологии. Издательство МГУ.

Демежко Д.Ю. Геотермический метод реконструкции палеоклимата. Екатеринбург: УрО РАН, 2001, с.64-67.

Коновалов Ю.В., О.В. Нагорнов, В.С.Загороднов, L.Thompson. Восстановление температуры поверхности ледника по данным скважинных измерений. Математическое моделирование, 2001, т. 13, № 11, с. 48-68.

Котляков В.М., Архипов С.М., Хендерсон К., Нагорнов О.В. 2004. Глубокое бурение ледников. Материалы гляциологических исследований. № 96, с. 15-35.

Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учеб. пособие для мех.-мат. и физ. спец. вузов. - М.: Наука, 1976.

Нагорнов О.В., Коновалов Ю.В. 1999. Определение температуры арктических ледников в прошлом по данным скважинных измерений в настоящем. Научная сессия МИФИ-99. Сборник научных трудов. Том 1, с. 193-195.

Нагорнов О.В., Коновалов Ю.В. 2001. Чувствительность метода реконструкции температуры поверхности ледника к ошибкам измерений. Материалы гляциологических исследований. Вып. 91, с.253-261.

Нагорнов О.В., Коновалов Ю.В. 2005. Прогноз эволюции ледника Григорьева (Тянь Шань). Материалы гляциологических исследований. Вып. 98, с. 183-193.

Нагорнов О.В., Коновалов Ю.В., Загороднов В.С., Томпсон Л.Г. Восстановление температуры поверхности Арктических ледников по данным измерений температуры в скважинах. Инженерно-физический журнал, 2001, том 74, №2, с.3-12.

Нагорнов О.В., Сергиенко О.В. 2001. Влияние изменений температуры океана на отклик основания шельфового ледника. Известия РАН. Физика атмосферы и океана. т. 37, №. 5, с. 671-677.

Нагорнов О.В., Сергиенко О.В. 2002. Отклик нижней поверхности шельфового ледника на изменение температуры. Математическое моделирование. т 14, №. 6, с. 43-50.

Нагорнов О.В., Сергиенко О.В. Особенности процессов тепломассопереноса под шельфовым ледником.// Инженерно-Физический Журнал, т.72, № 3, 1999, с.541-551.

Нагорнов О.В., Сергиенко О.В. Температурное поле шельфового ледника в окрестности скважины, пробуренной горячей водой//Инженерно-Физический Журнал, т. 71, № 1, Минск, 1998. С. 155-160.

Нагорнов О.В., Чижов В.Е. Термодинамические свойства льда, воды и их смеси при высоких давлениях //ЖПМТФ, 1990. № 3. С.41-48.

Нагорнов О.В., Ю.В. Коновалов, В.С. Загороднов, Л.Г. Томпсон. Восстановление температуры поверхности Арктических ледников по данным измерений температуры в скважинах Инженерно-физический журнал, 2001. Т. 74. № 2. С. 3-13.

Николаев В.И., Саламатин А.Н., Дудкина А.В., Клементьев О.Л. Реконструкция колебаний баланса массы и толщины куполовидного ледника в прошлом по годовым слоям льда. М.: МГИ, 1996, 83. С. 3-8.

Саламатин А.Н., Липенков В.Я., Блинов К.В., Восстановление климатических изменений температуры на поверхности Антарктического ледникового покрова в прошлом по результатам температурных измерений в глубоких скважинах на станции Восток. М.: МГИ, 1995. 79. С. 59-63.

Саламатин А.Н., Липенков В.Я., Смирнов К.Е., Жилова Ю.В. Плотность ледникового льда и его реологические свойства. - Антарктида. Докл. комиссии, 1985, вып.24, 94-106.

Самарский, А.А., 1971. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 552 с.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. – 288 с.

Тихонов, А.Н., Самарский, А.А., 1977. Уравнения математической физики. М.: Наука, 736 с.

**О.В. Нагорнов, С.А. Тюфлин,
Ю.В. Коновалов, А.Б. Костин**

Обратные задачи палеотермометрии

Учебное пособие

Редактор Т.В. Волвенкова

Верстка книги полностью соответствует
предоставленному авторами оригиналу-макету

Подписано в печать 05.12.08. Формат 60x84 1/16
П.л. 11,0. Уч.-из.л. 13,0. Тираж 150 экз.
Изд № 1/41. Заказ №

Московский инженерно- физический институт
(государственный университет).
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

Типография издательства «Тровант».
г. Троицк Московской обл.

