ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Л. Е. Михайлов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Конспект лекций по курсу высшей
математики для вечернего факультета

Москва 2008

УДК 514.742.4 (07)
ББК 22.151я7
М 69

Михайлов Л.Е. **Аналитическая геометрия:** *Конспект лекций по курсу высшей математики для вечернего факультета.* М.: МИФИ, 2008.–88 с.

Пособие написано на основе опыта чтения лекций и ведения семинаров на вечернем факультете МИФИ. Содержит материал по следующим темам: Системы линейных уравнений, матрицы и определители, векторная алгебр и произведения векторов, прямая на плоскости, прямая и плоскость в пространстве, кривые второго порядка. Приведены решения типичных задач. Подобраны задачи для упражнений.

Предназначено для студентов вечернего факультета, может быть использовано преподавателями при проведении занятий по аналитической геометрии.

Редактор

Подписано в печать .08. Формат 60х84 1/16
Печ. Л. 5,25. Уч.-изд. Л. 5,25. Тираж 200 экз.
Изд. №000-1. Закз №

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш.,31

Предисловие

Основной целью изучения аналитической геометрии является овладение векторным языком, достаточно широко используемым при изучении специальных дисциплин.

Это пособие является, по сути, самоучителем. Каждый из его 9-и разделов соответствует одной лекции и одному весьма насыщенному занятию в аудитории. Чтобы усвоить содержание раздела необходимо приложить определенные усилия и затратить время, соответствующее времени занятий в аудитории плюс выполнение домашнего задания.

Может быть даже чуть больше! Это уже зависит от способностей учащегося и степени усвоения им материала школьного курса математики.

. После проработки первого раздела вами должны быть усвоены методы нахождения решений систем линейных уравнений с использованием матриц и определителей.

Третий и четвертый разделы курса содержат изложение основ векторного языка, на котором излагается материал последующих разделов. Не освоив векторный язык, понять материал последующих разделов будет нереально.

Разделы курса, посвященные прямым и плоскостям, ориентированы на активное овладение векторным языком. Нужно научиться думать на языке векторов, ведь именно это является показателем настоящего владения языком.

Решение задач, предложенных для самостоятельного решения, является обязательным. Приобретение навыков в решении задач возможно только путём активных усилий и поисков. Для решения каждой задачи нужно осознанно выбрать то или иное теоретическое соотношение, а также подобрать наиболее эффективную методику вычислений. Процесс этот содержит элементы творчества.

Именно решение задач делает освоение теории активным и интересным, а не сухим и скучным, как это бывает при тупой зубрёжке.

§1. Системы линейных уравнений. Матрицы и определители

1.1 Матрицы и определители второго и третьего порядка

Прямоугольная таблица из чисел, содержащая n строк и m столбцов называется *матрицей.* Для обозначения матрицы используют круглые скобки или сдвоенные чёрточки. Например,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = A \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} = B. \quad (1.1)$$

Возможно также обозначение $C = \left\{c_{ij}\right\}\ i = 1,2\ldots n\ j = 1,2\ldots m$, где i — номер строки, а j — номер столбца матрицы. c_{ij} — элемент матрицы. Если $n = m$ — матрица квадратная, $n \neq m$ — матрица прямоугольная. Квадратная матрица второго порядка имеет вид,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Определитель матрицы второго порядка $\left(\Delta = \det A\right)$ *это число, равное произведению элементов матрицы, принадлежащих главной диагонали матрицы минус произведение элементов, принадлежащих побочной диагонали.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.3)$$

Для обозначения определителя используются одинарные чёрточки.

Для того, чтобы определитель второго порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы элементы его строк (или столбцов) были пропорциональны.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что каждая из пропорций

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \text{ и } \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} \text{ эквивалентна } a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21} \quad (1.4)$$

1.2 Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Теорема Крамера

Система уравнений имеет вид,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = h_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = h_2 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Здесь x и y — неизвестные, а коэффициенты a_{ij} и свободные члены h_1 и h_2 — заданные числа.

Решением системы является пара чисел (x_0, y_0), *подстановка которых в уравнения системы (1.5) обращает эти уравнения в тождества.*

Умножив первое уравнение на a_{22}, а второе на $-a_{12}$ и сложив полученные выражения, получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = h_1a_{22} - h_2a_{12} \qquad (1.6)$$

Аналогично, умножая уравнения системы на $-a_{21}$ и a_{11} и складывая полученные выражения, будем иметь,

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})y = a_{11}h_2 - a_{21}h_1 \qquad (1.7)$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} \\ h_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix} \qquad (1.8)$$

В новых обозначениях выражения (1.6) и (1.7) будут иметь вид:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \text{ и } \Delta \cdot y = \Delta_y \qquad (1.9)$$

Определитель Δ принято называть *определителем системы*. Из соотношений (1.9) просто получаются *формулы Крамера*

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ и } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad (1.10)$$

Могут представиться два случая: 1) определитель системы Δ отличен от нуля. 2) определитель Δ равен нулю.

В случае $\Delta \neq 0$ решение системы существует и единственно, так как система уравнений (1.9) является следствием системы (1.5).

Формулы (1.10) позволяют легко найти значения x_0 и y_0.

Рассмотрим случай $\Delta = 0$. Здесь имеют место два подслучая: а) хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y отличен от нуля,

б) оба определителя Δ_x и Δ_y равны нулю.

В подслучае а) хотя бы одно из равенств (1.10) не имеет смысла, и система (1.9), а вместе с ней и система (1.5) не имеет решений.

В подслучае б) система (1.5) имеет бесконечно много решений. В самом деле, из равенства $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ заключаем, (См. (1.4)) что

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{h_1}{h_2} \qquad (1.11)$$

Это означает, что второе уравнение системы (1.5) является следствием первого и может быть отброшено. Но линейное уравнение вида $a_{11}x + a_{12}y = h_1$ имеет бесконечно много решений, так как задав значение x, из уравнения можно найти соответствующее значение y, и таких пар чисел существует бесконечно много.

Приведенные выше утверждения составляют содержание ***теоремы Крамера***, которую можно сформулировать так:

Если определитель системы (1.5) Δ *отличен от нуля, то существует и притом единственное, решение этой системы, определяемое формулами Крамера* (1.10)

Если определитель системы (1.5) $\Delta = 0$, *то система либо вовсе не имеет решений (если хотя бы один из определителей* Δ_x *или* Δ_y *отличен от нуля), либо имеет бесконечно много решений* (в случае $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$).

Замечание: В случае, когда $h_1 = 0$ *и* $h_2 = 0$ *система называется однородной. Однородная система всегда имеет тривиальное решение* $x = 0, y = 0$. *Если определитель системы* Δ *отличен от нуля, система имеет только тривиальное решение.*

Если же $\Delta = 0$ *то однородная система имеет бесконечно много решений*

.Таким образом***, однородная система уравнений имеет нетривиальные решения в том и только в том случае, если её определитель равен нулю.***

Уравнения системы (1.5) являются уравнениями прямых на плоскости. Числа x_0 и y_0, определяемые по формулам Крамера (1.10) при $\Delta \neq 0$ являются координатами точки пересечения этих прямых. В случае однородной системы уравнений точка пересечения прямых совпадает с началом координат ($x_0 = 0,\ y_0 = 0$).

В случае $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ прямые, описываемые системой (1.5) сливаются в одну, и все точки этой прямой образуют бесконечное множество решений системы. Это утверждение справедливо для однородной и неоднородной систем.

Если же при $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$, то прямые, описываемые системой (1.5) параллельны (система не имеет решений). В случае однородной системы это невозможно, так как обе прямые проходят через начало координат.

1.3 Определители третьего порядка

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{1.12}$$

Определителем третьего порядка $\Delta = \det A$ *называется число, равное алгебраической сумме произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы*

$$\begin{aligned} \det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Диагональ матрицы, образованная элементами a_{11}, a_{22}, a_{33} называется главной диагональю, а диагональ, образованная элементами a_{13}, a_{22}, a_{31} называется побочной диагональю.

Для упрощения вычислений по формуле (1.13) построим вспомогательную матрицу, добавив к матрице (1.12) первый и второй столбцы.

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix} \tag{1.14}$$

Легко видеть, что в формуле (1.13), элементы определителя, стоящие в произведениях, перед которыми стоит знак плюс, расположены на главной диагонали и двух параллельных ей диагоналях матрицы (1.14), а произведения, перед которыми стоит знак минус, содержат элементы, принадлежащие побочной диагонали и двум параллельным ей диагоналям.

Следует отметить, что обычно для вычисления определителей используются более рациональные соотношения, получаемые на основании исследования свойств определителей.

1.4. Свойства определителей

Свойство 1. *Величина определителя не изменится, если строки и столбцы определителя поменять местами, т.е.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1.15}$$

Доказать это свойство можно, вычислением определителей по формуле (1.13). Эта операция называется *транспонированием.* Свойство 1 устанавливает равноправность строк и столбцов определителя, поэтому последующие свойства будут формулироваться как для строк, так и для столбцов.

Свойство 2. *Перестановка двух строк (или двух столбцов) определителя равносильна умножению его на число* -1.

Доказывается вычислением по формуле (1.13).

Свойство 3. *Если определитель имеет две одинаковые сроки (или два одинаковых столбца), то он равен нулю.*

В самом деле, при перестановке двух одинаковых срок определитель не изменится, а согласно свойству 2, изменит знак, т.е.

$$\Delta = -\Delta \Rightarrow 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0.$$

Свойство 4. *Умножение всех элементов некоторой строки (или некоторого столбца) определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число.*

Иными словами, *общий множитель всех элементов строки (или столбца) определителя можно вынести за знак определителя.*

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что число λ войдёт в каждое произведение формулы (1.13), так как элементы определителя, входящие в произведения, выбираются «по одному из каждой стоки и каждого столбца матрицы».

Свойство 5. *Ели все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.*

Это свойство вытекает из предыдущего (при $\lambda = 0$).

Свойство 6. *Если элементы двух строк (или двух столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

В самом деле, в силу свойства 4, множитель пропорциональности можно вынести за знак определителя, после чего останется определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю согласно свойству 3.

Свойство 7. *Если каждый элемент к-го столбца определителя является суммой двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, первый из которых в к-ом столбце содержит первые слагаемые упомянутых сумм, а в к-ом столбце второго стоят вторые слагаемые, остальные же столбцы определителей совпадают со столбцами исходного определителя. Аналогичное утверждение справедливо для строк определителя.* Например,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что в каждое произведение формулы (1.13) войдет элемент к-го столбца, состоящий из двух слагаемых, вследствие чего каждое произведение распадется на два произведения.

Свойство 8. *Если к элементам некоторого столбца определителя прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на произвольное число* λ*, то величина определителя не изменится. Аналогичное утверждение справедливо и для строк определителя.*

В самом деле, полученный определитель можно разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй равен нулю согласно свойству 6, как содержащий два пропорциональных столбца.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Используя преобразования, не изменяющие величину определителя (согласно свойству 8), можно существенно упростить его вычисление. Полезным оказывается приведение определителя к треугольной форме, в которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. В этом случае вычисление определителя по формуле (1.13) упрощается, так как все её слагаемые, кроме первого, равного произведению элементов главной диагонали, оказываются равными нулю.

Числовой пример позволит пояснить суть метода.

Пример 1. Вычислить определитель, приведя его к треугольной форме:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Чтобы получить нули в первом столбце определителя, из второй строки вычитаем удвоенную первую, и записываем результаты во второй строке. Затем из третьей строки вычитаем утроенную первую, и записываем результаты в третьей строке. Первая строка не изменяется.

Чтобы получить нуль на месте элемента a_{32}, из третьей строки второго определителя вычитаем его вторую строку, умноженную на 4, и записываем результаты в третьей строке третьего определителя. Первая и вторая строки переносятся из второго определителя в третий без изменений.

В результате, величина определителя оказалась равна произведению элементов главной диагонали третьего определителя, который приведен к треугольной форме.

Аналогичными свойствами обладает определитель, в котором нулю равны все элементы, расположенные выше главной диагонали.

Нами рассмотрен простой пример. В более сложных случаях приходится применять некоторые другие преобразования, в частности переставлять столбцы и строки, выносить общие множители элементов строк или столбцов. В частности, это бывает необходимо, чтобы переместить в верхний левый угол матрицы самое простое число.

Для формулирования ещё одного свойства нам потребуется ввести понятия алгебраического дополнения и минора.

1.5. Алгебраические дополнения и миноры

Вернемся к вычислению определителя третьего порядка по формуле (1.13),

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{matrix} = \quad (1.16)$$

Сгруппируем члены правой части выражения (1.16), содержащие элементы первой строки определителя, и вынесем эти элементы за скобки.

$$= \begin{matrix} a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{matrix} \quad (1.17)$$

Выражения в скобках будем называть ***алгебраическими дополнениями*** *элементов первой строки определителя и обозначать большими буквами с теми же индексами. Выражение (1.17) называется разложением определителя по элементам первой стоки.*

Аналогичным образом можно получить разложения определителя по элементам других строк, а так же по элементам столбцов определителя.

Введем теперь понятие минора.

Минором *данного элемента определителя* n*-го порядка называется определитель* $(n-1)$*-го порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием сроки и столбца, на пересечении которых стоит элемент.*

Минор принято обозначать большой буквой M_{ij} с теми же индексами, что и у элемента. Например, в определителе 3-го порядка

элементу a_{11} соответствует $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

элементу a_{22} соответствует $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Легко убедиться в том, что алгебраические дополнения и миноры связаны соотношением

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (1.18)$$

Это «правило определения знаков» для определителя 3-го порядка удобно представить следующей матрицей:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad (1.19)$$

Разложение определителя по элементам первой строки теперь можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1.20)$$

Аналогичным образом можно вычислить определитель, записывая его разложение по любой строке или столбцу.

Теперь можно сформулировать последнее свойство определителя.

Свойство 9. *Сумма произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения этих элементов равна величине определителя.*

Сумма произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения элементов другой строки равна нулю.

Докажем последнее утверждение на примере определителя 3-го порядка:

$$a_{21}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.21)$$

Здесь в первой строке записаны произведения элементов второй строки определителя на алгебраические дополнения элементов первой строки. Это выражение равно определителю 3-го порядка, который равен нулю, как содержащий две одинаковые строки.

Утверждения свойства 9 справедливы и для столбцов.

Кроме того, на основе свойства 9 возможно вычисление определителя способом, который называется «разложением определителя по элементам строки или столбца».

1.6. Система трех линейных уравнений

Рассмотрим систему уравнений следующего вида:

$$
\begin{cases}
a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = h_1 \\
a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = h_2 \\
a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = h_3
\end{cases}
\qquad (1.22)
$$

Здесь x, y и z - неизвестные, $a_{ij}, h_i -$ заданные числа. Упорядоченная тройка чисел $x_0,\ y_0,\ z_0$ называется *решением* системы (1.22) если подстановка этих чисел в систему обращает все три уравнения в тождества. Теорема Крамера остается справедливой и для систем третьего и более высоких порядков. (Доказательство см. в Л 1).

Формулы Крамера для системы (1.22) приобретают вид,

$$
x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \qquad (1.23)
$$

Где,

$$
\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} h & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} \\ a_{21} & h & a_{23} \\ a_{31} & h_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & h_3 \end{vmatrix}
$$

Если определитель системы уравнений (1.22) $\Delta \neq 0$ *то существует единственное решение системы, определяемое формулами Крамера* (1.23).

Проверка существования решения системы (1.22) осуществляется подстановкой полученных решений в уравнения системы.

Каждое из уравнений системы (1.22) является уравнением плоскости в пространстве, а три числа $x_0, y_0 \text{ è } z_0$, являющиеся решением системы, суть координаты точки пересечения этих плоскостей.

1.7. Однородная система двух линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему двух линейных уравнений с тремя неизвестными,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases} \qquad (1.24)$$

Если все три определителя второго порядка, которые можно составить из коэффициентов при неизвестных равны нулю,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.25)$$

то коэффициенты при неизвестных в уравнениях системы будут пропорциональны, то есть:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}. \qquad (1.26)$$

Следовательно, второе уравнение является следствием первого и его можно отбросить.

Система (1.23) в этом случае имеет бесконечно много решений, так как координаты всех точек, принадлежащих плоскости, описываемой первым уравнением, являются решениями системы.

Рассмотрим теперь случай, когда один из определителей (1.24) отличен от нуля. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.27)$$

Тогда систему (1.24) можно записать иначе,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z \end{cases}. \qquad (1.28)$$

Решение системы представится, в соответствии с формулами (1.10), в таком виде:

$$x=-z\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad y=-z\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (1.29)$$

Если принять, что $\frac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=t$, решение системы можно записать в симметричной форме,

$$x=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot t,\quad y=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\cdot t,\quad z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot t \qquad (1.30)$$

Формулы (1.29) представляют уравнение прямой, по которой пересекаются две плоскости системы (1.23). Координаты всех точек этой прямой являются решениями системы (1.23), то есть система имеет бесконечно много решений.

1.8. Однородная система трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0 \end{cases} \qquad (1.31)$$

Очевидно, что эта система всегда имеет тривиальное решение $x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=0$ (проверяется подстановкой в уравнения). Когда определитель системы $\Delta\neq 0$ тривиальное решение является единственным (в силу формул (1.23)).

Докажем, что при $\Delta=0$ система (1.30) имеет бесконечно много решений.

Если все миноры второго порядка в определителе

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1.32)$$

равны нулю, то соответствующие коэффициенты в уравнениях системы (1.31) пропорциональны. Следовательно, второе и третье уравнения системы являются следствиями первого и могут быть отброшены, а оставшееся единственное уравнение имеет бесконечно много решений (как отмечалось в предыдущем пункте).

Осталось рассмотреть случай, когда хотя бы один минор второго порядка в определителе (1.32) отличен от нуля. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тогда, как установлено в предыдущем пункте, система первых двух уравнений будет иметь бесконечное множество решений, определяемых формулами (1.30).

Подставим эти решения в третье уравнение и убедимся, что оно обращается в тождество,

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \left(a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right) \cdot t =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot t = \Delta \cdot t = 0 ,$$

так как определитель системы равен нулю по условию.

Тем самым доказано, что *однородная система уравнений* (1.31) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю*.

1.9. Неоднородная система трех линейных уравнений с определителем, равным нулю

Вернемся к системе уравнений (1.22). Здесь возможны два случая: а) хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y или Δ_z

отличен от нуля, б) все три определителя Δ_x, Δ_y и Δ_z равны нулю.

В случае а) невозможно хотя бы одно из решений (1.23), следовательно, система уравнений (1.22) не имеет решений.

В случае б) если система (1.22) имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечно много решений. Докажем это.

Пусть система имеет решение x_0, y_0, z_0. Тогда справедливы тождества

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 = h_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 = h_2 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 = h_3 \end{cases} \tag{1.32}$$

Вычитая из уравнений системы (1.22) тождества (1.32), получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}(x - x_0) + a_{12}(y - y_0) + a_{13}(z - z_0) = 0 \\ a_{21}(x - x_0) + a_{22}(y - y_0) + a_{23}(z - z_0) = 0 \\ a_{31}(x - x_0) + a_{32}(y - y_0) + a_{33}(z - z_0) = 0 \end{cases} \tag{1.33}$$

эквивалентную системе (1.22). Но система (1.33) является однородной системой трех линейных уравнений относительно неизвестных $(x - x_0), (y - y_0)$ и $(z - z_0)$ с определителем $\Delta = 0$.

Согласно пункту 1.8. система (1.33), а вместе с ней и эквивалентная ей система (1.22), имеет бесконечно много решений.

1.10. Метод исключения неизвестных для решения систем линейных уравнений (метод Гаусса)

Вернемся к рассмотрению системы линейных уравнений (1.22)

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = h_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = h_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = h_3 \end{cases} \tag{1.22}$$

Мы можем менять уравнения местами, умножать уравнения на произвольные числа, кроме нуля, а также складывать и вычитать уравнения. Видоизмененная система уравнений, полученная в результате проведения перечисленных преобразований, будет эквивалентна исходной.

Матрица, составленная из коэффициентов системы a_{ij} дополненная столбцом свободных членов h_i, называется расширенной матрицей. Она имеет вид,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & h_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & h_3 \end{Vmatrix} \qquad (1.35)$$

Применяя названные выше преобразования, можно привести матрицу (1.35) к треугольной форме. Восстановленная по этой матрице система уравнений будет эквивалентна исходной системе.

Продолжая преобразования матрицы, можно привести её к диагональной форме, в которой останутся отличные от нуля элементы главной диагонали и столбца свободных членов.

Подставив в диагональную матрицу переменные x, y и z, получим решение системы.

Рассмотрим на примерах случаи единственного решения, бесконечного множества решений и несовместной системы.

Пример 1.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \qquad (1.36)$$

Проведем необходимые преобразования с расширенной матрицей:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{Vmatrix}$$

Для приведения матрицы к треугольной форме мы вычли из второй строки удвоенную первую, а из третьей строки первую строку. Далее умножили вторую строку на -1, а третью строку на $1/2$. Для приведения матрицы к диагональной форме мы вычли из первой строки вторую и третью.

Решение системы
$$\begin{cases} x = -1/2, \\ y = 1, \\ z = 1/2, \end{cases}$$
получается после подстановки в последнюю матрицу переменных x, y и z.

Пример 2.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \qquad (1.37)$$

Расширенную матрицу системы (1.37) приведем к треугольной форме и упростим, используя вычитание строк:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Нулевая строка в третьей матрице может быть отброшена. Система уравнений, восстановленная по последней матрице, имеет вид:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Геометрической интерпретацией решения системы является прямая с уравнением $y = 1 - x$, лежащая на плоскости $z = 0$.

Множество точек этой прямой образует бесконечное множество решений системы уравнений (1.36).

Пример 3.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \qquad (1.38)$$

Преобразования расширенной матрицы системы уравнений, аналогичные преобразованиям, поделанным при решении предыдущего примера, приводят нас к абсурдному результату:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \approx \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Восстанавливая систему уравнений по третьей матрице, на основании последней строки мы получим результат:

$$0 = 1!$$

Такой, или подобный результат свидетельствует о том, что рассматриваемая система уравнений несовместна и решений не имеет.

Однозначный ответ на вопрос о совместности системы линейных уравнений дает

теорема *Кронекера-Капелли,* формулируемая следующим образом:

Если система линейных уравнений совместна, то ранг её основной матрицы равен рангу расширенной матрицы. Это условие необходимое.

Если же ранг расширенной матрицы не равен рангу основной матрицы, то система уравнений несовместна.

Рангом матрицы называется порядок наибольшего отличного от нуля минора матрицы. Ранг матрицы совпадает с числом линейно независимых строк матрицы

Эти вопросы и понятия рассматриваются в соответствующих разделах *линейной алгебры* во втором семестре.

Задачи № 1207(1,3), 1210(1.2), 1213, 1217, 1236, 1239, 1242, 1246, 1250. (Л. 2)

§2. Системы координат

2.1. Декартовы координаты

1. Направленные отрезки на оси.

Прямую линию с указанным на ней направлением будем называть осью. Выберем также единицу масштаба.

Рис. 2.1

Отрезок $\overrightarrow{AB}$ *на оси называется направленным если указано, какая из его граничных точек является началом, а какая концом.*

Величиной направленного отрезка AB *называется число, равное длине отрезка, взятое со знаком плюс, если направление отрезка и оси совпадают, и со знаком минус в противном случае.* Если точки начала и конца отрезка совпадают, то отрезок «нулевой». Условием равенства двух направленных отрезков на оси является равенство их величин.

Линейными операциями над направленными отрезками будем называть *операции сложения* таких отрезков и *умножения направленного отрезка на вещественное число.*

Для определения *суммы* направленных отрезков $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ совместим начало C второго отрезка с концом B первого отрезка. Полученный при этом отрезок $\overrightarrow{AD}$ называется суммой направленных отрезков.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \qquad (2.1)$$

Теорема 2.1 *Величина сумы направленных отрезков на оси равна сумме величин слагаемых. При любом расположении точек*

A, B, C è D на оси величины направленных отрезков удовлетворяют соотношению

$$AB + CD = AD \qquad (2.2)$$

Рис.2.2 наглядно иллюстрирует утверждение теоремы.

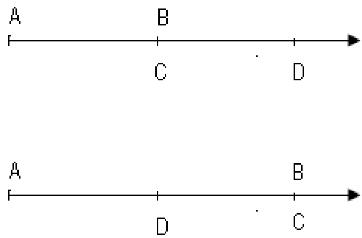

Рис. 2.2

Произведением направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ *на число* α *называется направленный отрезок, обозначаемый* $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$, *направленный так же как* $\overrightarrow{AB}$ *при* $\alpha > 0$ *и противоположно направленный при* $\alpha < 0$.

Величина направленного отрезка $\alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ равна $\alpha \cdot AB$.

2. **Декартовы координаты на прямой** вводятся указанием направления на оси, выбором единицы измерения и точки O начала отсчёта. *Декартовой координатой* x_1 *точки* M_1 *будем называть величину направленного отрезка* $\overrightarrow{OM}_1$.

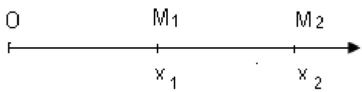

Рис. 2.3

Пусть $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ - две точки на оси. Установим выражение величины M_1M_2 направленного отрезка $\overrightarrow{M_1M_2}$ через координаты x_1 и x_2 его начала и конца.

Теорема 2.2 *Величина* M_1M_2 *направленного отрезка* $\overrightarrow{M_1M_2}$ *равна* $x_2 - x_1$*, т.е.*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1 \tag{2.3}$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим на оси три точки O, M_1 è M_2. Согласно теореме 2.1 справедливо равенство

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2 \tag{2.4}$$

Так как $OM_1 = x_1$ а $OM_2 = x_2$ то из соотношения (2.4) следует соотношение (2.3). Теорема доказана.

Следствие. *Расстояние между точками* $\rho(M_1\ M_2)$ *определяется по формуле*

$$\rho\ (M_1\ M_2) = |\,x_2 - x_1| \tag{2.5}$$

Декартовы координаты на плоскости *образуют две взаимно перпендикулярные оси с общим началом отсчета и общей масштабной единицей. Ось* Ox *называется осью абсцисс ось* Oy *- осью ординат.* Проекции точки M на оси Ox и Oy обозначим M_x и M_y.

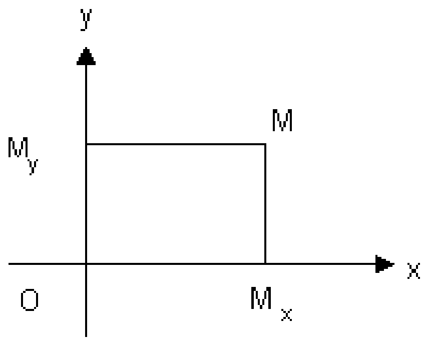

Рис.2.4

Декартовыми прямоугольными координатами x *и* y *точки* M *будем называть величины направленных отрезков* OM_x *и* OM_y

Оси координат разбивают плоскость на четыре квадранта. В первом квадранте $x > 0$ и $y > 0$, во втором $x < 0$, $y > 0$ и так далее при обходе начала координат в направлении против часовой стрелки.

Декартовы координаты в пространстве вводятся аналогично декартовым координатам на плоскости. *Три взаимно перпендикулярные координатные оси с общим началом* O *и одинаковой маситабной единицей образуют декартову прямоугольную систему координат в пространстве. Оси абсцисс и ординат здесь те же самые* Ox *и* Oy. *Третья ось* Oz *называется осью аппликат.*

Система координат называется правой, если из конца оси Oz кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy виден происходящим в направлении против часовой стрелки.

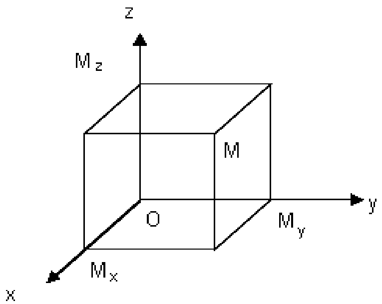

Рис. 2.5

Декартовыми прямоугольными координатами x, y è z *точки* M *будем называть величины направленных отрезков* OM_x, OM_y и OM_z.

Через каждую пару осей можно провести координатные плоскости xOy, xOz è yOz, которые разбивают пространство на восемь октантов. Нумерация октантов проводится в направлении против часовой стрелки. Первые четыре октанта расположены над плоскостью xOy, остальные под ней.

2.2 Полярные координаты

Точку начала отсчета O совместим с точкой O декартовой системы координат на плоскости, полярную ось Ox совместим с осью абсцисс декартовой системы и выберем единицу масштаба.

Полярными координатами точки M *называются два числа* ρ *è* φ, первое из которых (*полярный радиус* ρ) равно расстоянию от точки M до полюса O, а второе (*полярный угол* φ) – угол, на который нужно повернуть полярную ось до совмещения с радиусом OM.

$$0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi \tag{2.6}$$

Положительное направление отсчёта угла φ - против часовой стрелки.

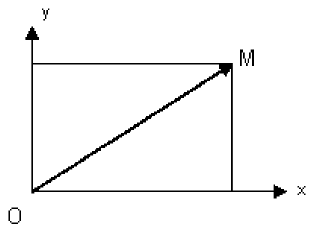

Рис. 2.6

Связь между декартовыми и полярными координатами точки устанавливают следующие соотношения:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \; y = \rho \sin\varphi, \tag{2.7}$$

2.3 Цилиндрические координаты

На плоскости xOy трехмерной декартовой системы координат введём полярные координаты. Ось Oz сохраним.

Цилиндрическими координатами точки M *называются три числа* ρ, φ *è* z, смысл которых понятен из предыдущего.

Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами точки устанавливают следующие соотношения:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \; y = \rho \sin\varphi, \; z = z. \tag{2.7*}$$

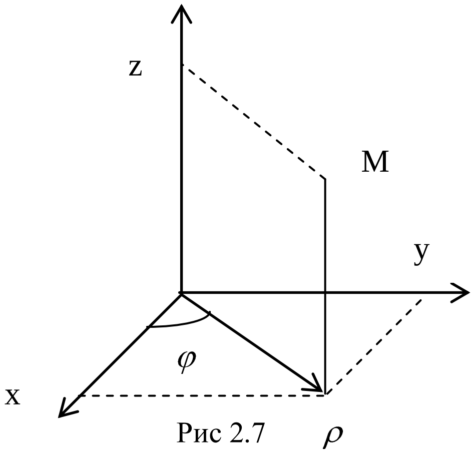

Рис 2.7

2.4 Сферические координаты

Совместим начало отсчёта O сферической системы координат с началом отсчета трехмерной декартовой системы.

Здесь ρ - расстояние от точки M до начала координат, θ - угол между отрезком $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси Oz, φ - полярный угол.

$$0 \le \rho < +\infty, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi \qquad (2.8)$$

По аналогии с географическими координатами φ именуют долготой, а θ- широтой. Однако, в отличие от географических координат, $\theta = 0$ на северном полюсе и $\theta = \pi$ на южном.

Связь между декартовыми и сферическими координатами точки устанавливают следующие соотношения:

$$x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \quad z = \rho \cdot \cos\theta \qquad (2.9)$$

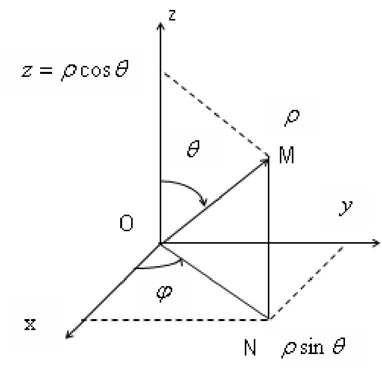

Рис. 2.8

Задачи № 47, 49, 54(2), 55, 72, 93, 738,

§3. Векторная алгебра

3.1 Понятие вектора и линейные операции над векторами

Геометрическим вектором, или просто вектором будем называть направленный отрезок.

Будем обозначать вектор либо как направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B обозначают начало и конец вектора, либо малыми латинскими буквами со стрелкой $\vec{a}, \vec{b}$.

Для обозначения длины вектора будем использовать символ модуля: Так $|\vec{a}|$ это длина вектора $\vec{a}$.

Вектор называется нулевым, если начало и конец его совпадают.

Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой, или на параллельных прямых..

Два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Мы не различаем два равных вектора, имеющих различные точки приложения. В соответствии с этим вектора в аналитической геометрии считаются *свободными*.

Линейными операциями над векторами принято называть *операцию сложения векторов* и *операцию умножения вектора на вещественное число.*

Определение 3.1 *Суммой* $\vec{a}+\vec{b}$ *двух векторов называется вектор* $\vec{c}$*, идущий из начала вектора* $\vec{a}$ *в конец вектора* $\vec{b}$*, при условии , что начало вектора* $\vec{b}$ *совмещено с концом вектора* $\vec{a}$.

Для операции сложения векторов справедливы четыре аксиомы:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство);

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство);

3) Существует нулевой вектор $\vec{0}$, такой, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) Для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный ему вектор $\overrightarrow{a'}$ такой, что $\vec{a}+\overrightarrow{a'}=\vec{0}$.

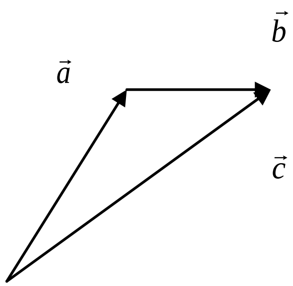

Рис. 3.1

Определение 3.2 *Разностью* $\vec{a}-\vec{b}$ *двух векторов называется вектор* $\vec{d}$*, который в сумме с вектором* $\vec{b}$ *дает вектор* $\vec{a}$*. Можно показать, что* $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}'$*, где* $\vec{b}'$ *- вектор, противоположный вектору* $\vec{b}$ *. В самом деле,*

$$\vec{d}+\vec{b}=(\vec{a}+\vec{b}')+\vec{b}=\vec{a}+(\vec{b}'+\vec{b})=\vec{a}+0=\vec{a}.$$

Если привести вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу и построить параллелограмм на этих векторах, то вектор $\vec{c}$ совпадет с диагональю параллелограмма, проходящей через общее начало, а вектор $\vec{d}$ совпадет с другой его диагональю. Иначе говоря, разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенных к общему началу, есть вектор $\vec{d}$, направленный из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$. Рисунок 3.2 наглядно иллюстрирует последние утверждения.

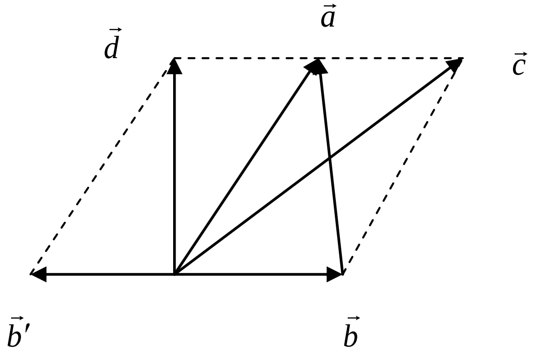

Рис.3.2

Определение 3.3. *Произведением* $\alpha \cdot \vec{a}$ *вектора* $\vec{a}$ *на число* α *называется вектор* $\vec{b}$ *имеющий длину, равную* $|\alpha| \cdot |\vec{a}|$, *и направление, совпадающее с направлением вектора* $\vec{a}$ *в случае* $\alpha > 0$ *и противоположное в случае* $\alpha < 0$.

Эта операция обладает следующими свойствами:

5) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$

6) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$

7) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$

Вектор единичной длины называется ортом и обозначается символом $\vec{e}$. $\vec{e}_a$ - это орт вектора $\vec{a}$.

Очевидно что, $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a$, откуда следует, что $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ (3.1)

3.2 Линейная зависимость векторов

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *будем называть выражение вида*

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a}_n \quad (3.2)$$

Где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *- произвольные числа.*

Определение 3.4. *Вектора* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *называются <u>линейно зависимыми,</u> если найдутся такие вещественные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *из которых хотя бы одно отлично от нуля, с которыми линейная комбинация обращается в нуль, т.е.*

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a} = 0 \quad (3.3)$$

Определение 3.5. *Вектора* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *называются <u>линейно независимыми</u> если равенство нулю их линейной комбинации возможно только при равенстве нулю всех чисел* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Теорема 3.1. *Если вектора* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *линейно зависимы, то любой из них может быть представлен линейной комбинацией остальных.*

Доказательство. Пусть в линейной комбинации

$$\alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \vec{a} = 0 \quad (3.4)$$

$\alpha_1 \neq 0$. Разделим все члены выражения (3.4) на α_1 и перенесём вправо от знака равенства все члены выражения, кроме $\vec{a}_1$.

$$\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{a}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \vec{a}_3 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \vec{a}_n \quad (3.5)$$

Введем обозначения $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, \lambda_3 = -\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1}, \ldots, \lambda_n = -\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}$.

Тогда получим

$$\vec{a}_1 = \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a}_n . \qquad (3.6)$$

Теорема доказана, а поскольку выбор $\alpha_1 \neq 0$ был сделан произвольно, утверждение теоремы будет справедливо для любого значения n.

Следствие 1. *Если в системе векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *один из векторов можно представить линейной комбинацией остальных, то система векторов линейно зависимая.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}_1$ представлен линейной комбинацией остальных векторов (См. выражение (3.6)). Перенесем $\vec{a}_1$ направо. Получим линейную комбинацию

$$(-1)\vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 + \ldots + \lambda_n \cdot \vec{a} = 0 \qquad (3.7)$$

В которой заведомо один коэффициент отличен от нуля $(\alpha_1 = -1)$.

Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Если в системе векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *ни один из векторов нельзя представить линейной комбинацией остальных, то система векторов линейно независимая.*

Следствие 2 легко доказать методом «от противного». Провести это доказательство предоставляется читателю.

Простейшим случаем линейной зависимости векторов является пропорциональность:

$$\vec{a}_2 = \lambda \cdot \vec{a}_1 \qquad (3.8)$$

Очевидно, что вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. На основании следствия 2 можно утверждать, что любые два неколлинеарные вектора на плоскости линейно независимы (так как связать два неколлинеарные вектора на плоскости соотношением типа (3.8) невозможно).

Определение 3.6. *Вектора называются <u>компланарными</u>, если они лежат в одной плоскости, или в параллельных плоскостях.*

Три вектора в пространстве линейно независимы, если среди них нет коллинеарных и нулевых векторов. В соответствии со следствием 2 теоремы 3.1 это следует из того очевидного факта, что в системе векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ вектор $\vec{a}_3$, не параллельный плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ невозможно представить линейной комбинацией этих векторов.

Теорема 3.2. *Необходимым и достаточным условием линейной зависимости трех векторов является их компланароность.*

Доказательство. 1) Необходимость.

Пусть три вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы. Докажем их компланарность. По определению линейной зависимости в линейной комбинации

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = 0 \qquad (3.9)$$

хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Пусть $\gamma \neq 0$. Тогда из соотношения (3.9) следует

$$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}, \text{ где } \lambda = -\frac{\alpha}{\gamma},\ \mu = -\frac{\beta}{\gamma} \qquad (3.10)$$

Следовательно, вектор $\vec{c}$ принадлежит плоскости, в которой лежат вектора $\lambda \cdot \vec{a}$ и $\mu \cdot \vec{b}$, так как получен их сложением.

Компланарность векторов доказана.

2) Достаточность. Доказательство линейной зависимости компланарных векторов вытекает непосредственно из следствия 1 теоремы 3.1. Оговаривается при этом отсутствие в тройке векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарных и нулевых, так как в этом случае линейная зависимость векторов оказалась бы их тривиальным следствием.

Следствие 1. *Три некомпланарные вектора $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ трехмерного пространства линейно независимы.*

Доказательство. Интуитивно ясно, что вектор $\bar{c}$, не параллельный плоскости, определяемой может быть представлен линейной комбинацией двух остальных, то есть это частный случай следствия 2 теоремы 3.1.

Теорема 3.3. *Любые четыре вектора трехмерного пространства линейно зависимы.*

Для доказательства теоремы, в соответствии со следствием 1 теоремы 3.1 достаточно убедиться в том, что в системе векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}$ любой из векторов может быть представлен линейной комбинацией остальных.

Приведем эти вектора к общему началу. Построив параллелепипед на векторах $\lambda \cdot \vec{a}$, $\mu \cdot \vec{b}$ и $\nu \cdot \vec{c}$ можно подобрать значения коэффициентов λ, μ и ν так, чтобы вектор $\vec{d}$ оказался диагональю параллелепипеда. Тогда, очевидно

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c}\,.$$

Аналогичное представление можно получить для любого вектора из четырех. Теорема доказана.

При этом из рассмотрения исключаются тривиальные случаи наличия среди четырех векторов компланарных, коллинеарных и нулевых.

Определение 3.7. *Три линейно независимых вектора* $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *образуют* ***базис*** *трехмерного пространства, если любой вектор* $\vec{d}$ *может быть представлен линейной комбинацией этих векторов. Любая тройка некомпланарных векторов образует базис трехмерного пространства.*

В соответствии с этим определением, для любого вектора $\vec{d}$ найдутся такие вещественные числа λ, μ и ν, что будет справедливо равенство

$$\vec{d} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} + \nu \cdot \vec{c} \qquad (3.11)$$

Принято называть равенство (3.11) разложением вектора $\vec{d}$ по базису $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ а числа λ, μ и ν координатами вектора $\vec{d}$ относительно данного базиса.

Теорема 3.4. *Разложение вектора* $\vec{d}$ *по базису* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *единственное.*

Доказательство теоремы проведем методом «от противного».

Допустим, что существует второе разложение вектора $\vec{d}$

$$\vec{d} = \lambda' \cdot \vec{a} + \mu' \cdot \vec{b} + \nu' \cdot \vec{c} \qquad (3.12)$$

Вычтем второе разложение из первого. Получим в итоге

$$(\lambda - \lambda')\vec{a} + (\mu - \mu')\vec{b} + (\nu - \nu')\vec{c} = 0 \qquad (3.13)$$

Из линейной независимости базисных векторов следует что, коэффициенты разложения, представленные круглыми скобками, обращаются в нуль, то есть:

$$\lambda - \lambda' = 0 \quad \mu - \mu' = 0 \quad \nu - \nu' = 0 \qquad (3.14)$$

Единственность разложения доказана.

Теорема 3.5. *При сложении двух векторов* $\vec{d}_1$ *и* $\vec{d}_2$ *их координаты относительно любого базиса* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *складываются. При умножении вектора* $\vec{d}_1$ *на число* α *все его координаты умножаются на это число.*

Доказательство. $M_1 M_2$

Пусть $\vec{d}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \mu_1 \cdot \vec{b} + \nu_1 \cdot \vec{c}$, $\vec{d}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{a} + \mu_2 \cdot \vec{b} + \nu_2 \cdot \vec{c}$. Тогда в силу свойств 1)-7) линейных операций будут справедливы соотношения:

$$\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} + (\mu_1 + \mu_2)\vec{b} + (\nu_1 + \nu_2)\vec{c} \qquad (3.15)$$

$$\alpha \cdot \vec{d}_1 = (\alpha \cdot \lambda_1)\vec{a} + (\alpha \cdot \mu_1)\vec{b} + (\alpha \cdot \nu_1)\vec{c} \qquad (3.16)$$

Теорема доказана.

3.3 Вектор в декартовой прямоугольной системе координат

Определим проекцию вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$ на ось Ox

Проекции точек M_1 и M_2 на ось Ox - точки M_{1x} и M_{2x}. Это точки пересечения с осью Ox плоскостей π_1 и π_2, проведенных через точки M_1 и M_2 перпендикулярно оси Ox. Проекцией вектора $\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{M_1 M_2}$ на ось Ox называется величина отрезка $M_{1x} M_{2x}$.

$$\text{Пр}_{Ox}\overrightarrow{M_1 M_2} = X = x_2 - x_1 . \qquad (3.17)$$

Здесь x_1 и x_2 - координаты точек начала и конца отрезка $M_{1x} M_{2x}$.

С другой стороны, если перенести вектор $M_1 M_2$ (оставляя

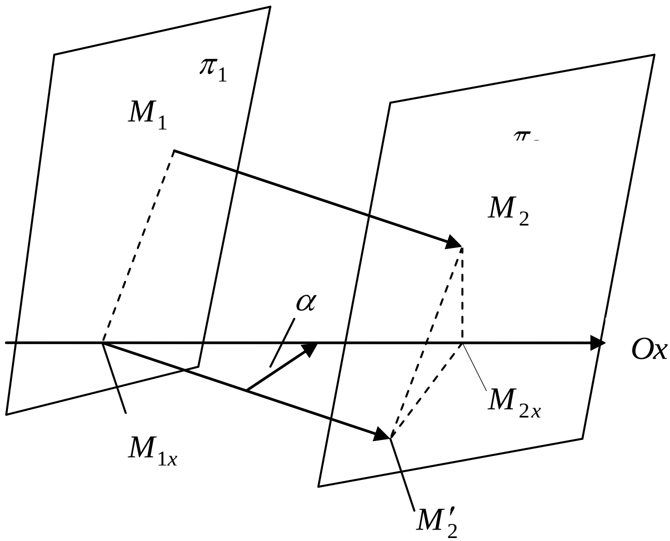

Рис. 3.3

его параллельным исходному положению) до совмещения точек M_1 и M_{1x} то проекцию вектора M_1M_2 можно представить так:

$$\text{Ïð}_{\,Ox}\overrightarrow{M_1M_2} = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cdot \cos\alpha \qquad (3.18)$$

Проекция вектора $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ на ось Ox

$$\text{Ïð}_{\,Ox}\vec{a} = X = x_2 - x_1 = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\alpha \qquad (3.19)$$

Аналогично представляются проекции вектора $\vec{a}$ на оси Oy и Oz

$$\text{Ïð}_{\,Oy}\vec{a} = Y = y_2 - y_1 = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\beta \qquad (3.20)$$

$$\text{Ïð}_{\,Oz}\vec{a} = Z = z_2 - z_1 = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\gamma \qquad (3.21)$$

В трехмерном пространстве принято использовать базис из трех взаимно ортогональных векторов единичной длины $\vec{i}, \vec{j}$ и $\vec{k}$, которые являются ортами осей декартовой прямоугольной системы координат. Такой базис называется ортонормированным.

Вектор $\vec{a}$ может быть разложен по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то есть:

$$\vec{a} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}. \qquad (3.22)$$

Коэффициенты разложения X, Y, Z определены однозначно, так как равны проекциям вектора $\vec{a}$ на оси координат. Если совместить начало вектора $\vec{a}$ с началом координат (Рис. 3.4), то вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Проекции вектора $\vec{a}$ на оси координат равны величинам отрезков OA_x, OA_y, OA_z.

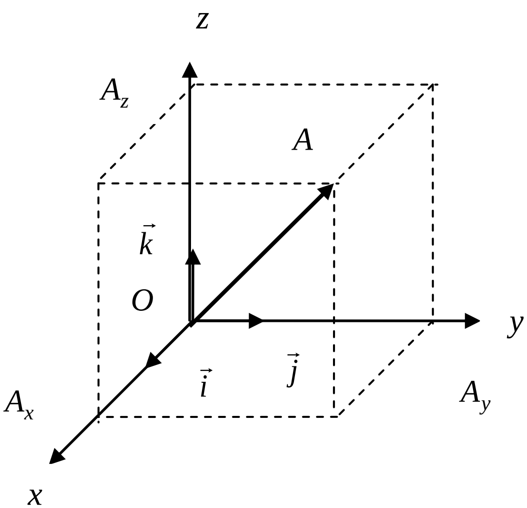

Рис. 3.4

В соответствии с правилами сложения векторов

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z} \qquad (3.23)$$

С учетом соотношений 3.19, 3.20 и 3.21 можно записать:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = \\ &= |\vec{a}| \cdot (\vec{i} \cdot \cos\alpha + \vec{j} \cdot \cos\beta + \vec{k} \cdot \cos\gamma) = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a\end{aligned} \qquad (3.24)$$

Здесь $\vec{e}_a$ - орт вектора $\vec{a}$. Разложение орта по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид

$$\vec{e}_a = \vec{i} \cdot \cos\alpha + \vec{j} \cdot \cos\beta + \vec{k} \cdot \cos\gamma \tag{3.25}$$

В соответствии теоремой Пифагора для трехмерного случая

$$\left|\vec{e}_a\right| = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma, \tag{3.26}$$

а также

$$\begin{aligned} \left|\vec{a}\right| &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Принято называть $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ направляющими косинусами вектора $\vec{a}$, α, β и γ - углы между вектором и осями Ox, Oy и Oz.

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \tag{3.28}$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \tag{3.28*}$$

Задачи № 752, 757, 763, 781, 784, 785.

§4. Произведения векторов

Определение 4.1. *Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.*

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi \tag{4.1}$$

(Скалярное произведение принято обозначать круглыми скобками.)

Используя представление проекции вектора на другой вектор, можно записать

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\vec{a}\right| \cdot \text{Ïð}_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot \text{Ïð}_{\vec{b}}\vec{a} \tag{4.2}$$

Теорема 4.1. *Необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения.*

Доказательство. Если оба вектора ненулевые, то доказательство необходимости и достаточности утверждения теоремы следует из того факта, что необходимым и достаточным условием равенства нулю $\cos\varphi$ является условие $\varphi = \pi/2 + k\cdot\pi$, то есть

$$\cos(\pi/2 + k\cdot\pi) = 0 \tag{4.3}$$

Скалярное произведение имеет следующие свойства:

1) $(\vec a\cdot\vec b) = (\vec b\cdot\vec a)$,

2) $((\alpha\cdot\vec a)\cdot\vec b) = \alpha\cdot(\vec a\cdot\vec b)$, где α − число,

3) $((\vec a+\vec b)\cdot\vec c) = (\vec a\cdot\vec c) + (\vec b\cdot\vec c)$

4) $(\vec a\cdot\vec a) > 0$, если $\vec a \neq 0$, $(\vec a\cdot\vec a) = 0$, если $\vec a = 0$.

Эти свойства позволяют при скалярном перемножении векторных многочленов выполнять действия почленно, вынося за скобки числовые множители.

Теорема 4.2. *Проекция вектора* $\vec b$ *на вектор* $\vec a$ *равна скалярному произведению вектора* $\vec b$ *на орт вектор* $\vec a$.

Доказательство. Из соотношения (4.2) следует, что

$$\text{Пр}_{\vec a}\vec b = \frac{(\vec a\cdot\vec b)}{|\vec a|} = \left(\frac{\vec a}{|\vec a|}\cdot\vec b\right) = (\vec e_{\vec a}\cdot\vec b)$$

(4.4)

Теорема 4.2. *Если вектора* $\vec a$ *и* $\vec b$ *представлены в виде разложений по базису* $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$,

$$\vec a = X_1\cdot\vec i + Y_1\cdot\vec j + Z_1\cdot\vec k,\quad \vec b = X_2\cdot\vec i + Y_2\cdot\vec j + Z_2\cdot\vec k, \tag{4.5}$$

то скалярное произведение этих векторов равно следующему выражению:

$$(\vec a\cdot\vec b) = X_1\cdot X_2 + Y_1\cdot Y_2 + Z_1\cdot Z_2 \tag{4.6}$$

Доказательство. Перемножив векторные многочлены (4.5), получим:

$$
\begin{aligned}
(\vec a\cdot\vec b) &= X_1X_2(\vec i\cdot\vec i) + X_1Y_2(\vec i\cdot\vec j) + X_1Z_2(\vec i\cdot\vec k) + Y_1X_2(\vec j\cdot\vec i) + \\
&+ Y_1Y_2(\vec j\cdot\vec j) + Y_1Z_2(\vec j\cdot\vec k) + Z_1X_2(\vec k\cdot\vec i) + Z_1Y_2(\vec k\cdot\vec j) + \\
&+ Z_1Z_2(\vec k\cdot\vec k) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

поскольку

$$(\vec i\cdot\vec i) = (\vec j\cdot\vec j) = (\vec k\cdot\vec k) = 1, \tag{4.8}$$

а остальные скалярные произведения ортов $\vec i,\ \vec j,\ \vec k$, ввиду их ортогональности, обращаются в нули.

Следствие 1.

$$\text{Пр}_{\vec a}\vec b = (\vec b\cdot\vec e_{\vec a}) = X_2\cdot\cos\alpha_1 + Y_2\cdot\cos\beta_1 + Z_2\cdot\cos\gamma_1. \tag{4.9}$$

Здесь орт вектора $\vec a$

$$\vec e_{\vec a} = \vec i\cdot\cos\alpha_1 + \vec j\cdot\cos\beta_1 + \vec k\cdot\cos\gamma_1. \tag{4.10}$$

Следствие 2.

$$\cos\varphi = \frac{(\vec a\cdot\vec b)}{|\vec a|\cdot|\vec b|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{4.11}$$

Определение 4.2. Векторным произведением *вектора $\vec a$ на вектор $\vec b$ называется вектор $\vec c$, обозначаемый символом*

$\vec c = [\vec a\cdot\vec b]$ *и удовлетворяющий трем требованиям:*

(Квадратным скобками обозначают векторное произведение.)

1) *вектор $\vec c$ ортогонален к каждому из векторов $\vec a$ и $\vec b$,*
2) *длина вектора $\vec c$ равна произведению модулей перемножаемых векторов на синус угла между ними.*

$$|\vec c| = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\varphi, \tag{4.12}$$

3) *упорядоченная тройка векторов $\vec a, \vec b, \vec c$ является правой.*

Определение 4.3. *Упорядоченная тройка некомпланарных векторов* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *является правой, если, после приведения векторов к общему началу, вектор* $\vec{c}$ *располагается так, что из его конца кратчайший поворот от* $\vec{a}$ *к* $\vec{b}$ *виден происходящим в направлении против часовой стрелки. (В противном случае тройка векторов считается левой.)*

Это утверждение справедливо для тройки векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и для системы декартовых координат в пространстве.

Векторное произведение имеет следующие алгебраические свойства:

1) $[\vec{a}\cdot\vec{b}] = -[\vec{b}\cdot\vec{a}]$, (антиперестановочность)

2) $[(\alpha\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}] = \alpha\cdot[\vec{a}\cdot\vec{b}]$,

3) $[(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}] = [\vec{a}\cdot\vec{c}] + [\vec{b}\cdot\vec{c}]$,

4) $[\vec{a}\cdot\vec{a}] = 0$.

Теорема 4.3. *Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.*

Доказательство. Если $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$, то доказательство необходимости и достаточности утверждения теоремы следует из (4.12) и того факта, что условие $\sin\varphi = 0$ при $\varphi = 0$ также является необходимым и достаточным.

Теорема 4.4. *Модуль векторного произведения* $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ *равняется площади* S *параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.

Доказательство. Поскольку площадь параллелограмма равна произведению длин его смежных сторон на синус угла между ними, доказательство теоремы следует из формулы (4.12).

Теорема 4.5. *Если вектора представлены разложениями но базису* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

$$\vec a = X_1\cdot\vec i + Y_1\cdot\vec j + Z_1\cdot\vec k,\quad \vec b = X_2\cdot\vec i + Y_2\cdot\vec j + Z_2\cdot\vec k, \qquad (4.13)$$

то их векторное произведение имеет вид:

$$\left[\vec a\cdot\vec b\right] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \qquad (4.14)$$

Доказательство. Перемножив векторные многочлены (4.13), получим, что

$$\left[\vec a\cdot\vec b\right] = X_1X_2\left[\vec i\cdot\vec i\right] + X_1Y_2\left[\vec i\cdot\vec j\right] + X_1Z_2\left[\vec i\cdot\vec k\right] + Y_1X_2\left[\vec j\cdot\vec i\right] +$$
$$+ Y_1Y_2\left[\vec j\cdot\vec j\right] + Y_1Z_2\left[\vec j\cdot\vec k\right] + Z_1X_2\left[\vec k\cdot\vec i\right] + Z_1Y_2\left[\vec k\cdot\vec j\right] + Z_1Z_2\left[\vec k\cdot\vec k\right] =$$
$$= \vec i\cdot\left(Y_1Z_2 - Y_2Z_1\right) + \vec j\cdot\left(Z_1X_2 - Z_2X_1\right) + \vec k\cdot\left(X_1Y_2 - X_2Y_1\right) =$$
$$= \vec i\cdot\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec j\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec k\cdot\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \qquad (4.15)$$

Строка (4.15) последнего выражения получена с учетом того, что

$$\begin{aligned} &\left[\vec i\cdot\vec i\right] = 0,\quad \left[\vec i\cdot\vec j\right] = \vec k,\quad \left[\vec i\cdot\vec k\right] = -\vec j,\quad \left[\vec j\cdot\vec i\right] = -\vec k,\quad \left[\vec j\cdot\vec j\right] = 0,\\ &\left[\vec j\cdot\vec k\right] = \vec i,\quad \left[\vec k\cdot\vec i\right] = \vec j,\quad \left[\vec k\cdot\vec j\right] = -\vec i,\quad \left[\vec k\cdot\vec k\right] = 0. \end{aligned} \qquad (4.16)$$

(Знак минус в этих произведениях получается вследствие нарушения порядка в тройке ортов $\vec i\ \vec j\ \vec k$.)

Очевидно, что выражение (4.15) есть разложение определителя (4.14) по элементам первой строки.

Теорема доказана.

Следствие. *Если два вектора* $\vec a = X_1\vec i + Y_1\vec j + Z_1\vec k$ *и* $\vec b = X_2\vec i + Y_2\vec j + Z_2\vec k$ *коллинеарны, то координаты их пропорциональны, т.е.*

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}. \qquad (4.17)$$

Доказательство. Поскольку векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю, из соотношения (4.15) следует, что

$$Y_1 Z_2 = Y_2 Z_1, \quad Z_1 X_2 = Z_2 X_1, \quad X_1 Y_2 = X_2 Y_1 \qquad (4.18)$$

Из первого равенства после деления на произведение $Y_2 Z_2$ получим пропорцию $\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$. Аналогичным образом из второго равенства получаем пропорцию $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{X_1}{X_2}$.

Следствие доказано.

В пропорции (4.17) возможно появление нулей в знаменателе. В соответствии с (4.18) это означает, что соответствующий числитель тоже равен нулю.

Для последующих выкладок нам удобно считать, что $[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{d}$.

Следствие 1. *Если $\vec{e}_{\vec{d}}$ −орт вектора $\vec{d}$, а $S = \left|[\vec{a} \cdot \vec{b}]\right|$ −площадь параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах, приведенных к общему началу, то*

$$\vec{d} = \left|[\vec{a} \cdot \vec{b}]\right| \cdot \vec{e}_{\vec{d}} = S \cdot \vec{e}_{\vec{d}} \qquad (4.19)$$

Определение 4.4. *Если векторное произведение $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ умножить скалярно на вектор $\vec{c}$, то число $([\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c})$ называется* ***смешанным произведением*** *векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.*

Теорема 4.6. *Смешанное произведение $([\vec{a} \cdot \vec{b}] \cdot \vec{c})$ равно объёму параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка векторов правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ левая. Если же перемножаемые вектора компланарны,* *то их смешанное произведение ровно нулю.*

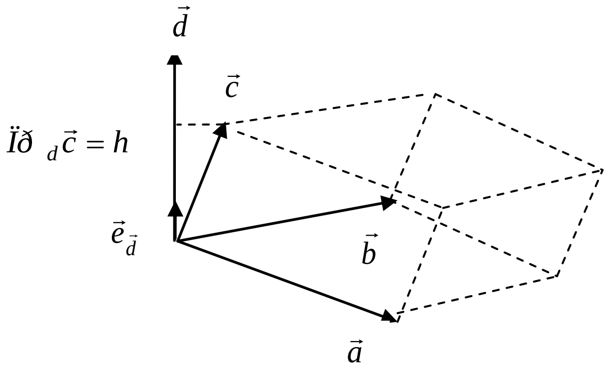

Рис. 4.1

Доказательство. Тривиальный случай коллинеарности векторов $\vec a$ и $\vec b$ исключим, так как векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю. Тогда, используя выражение (4.19), можно произвести следующее преобразование

$$(\vec a \cdot \vec b)\cdot \vec c = (\vec S \cdot \vec c) = S \cdot (\vec e_{\vec d} \cdot \vec c) = S \cdot Пр_{\vec d}\vec c = S \cdot (\pm h) = \pm V. \quad (4.20)$$

(Знак + берем в случае, если тройка векторов правая).

Если же вектора $\vec a, \vec b$ и $\vec c$ компланарны, то вектор $\vec c$ лежит в плоскости векторов $\vec a$ и $\vec b$, следовательно $h = Пр_{d}\vec c = 0$ и $V = S \cdot h = 0$.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Справедливо равенство*

$$(\vec a \cdot \vec b)\cdot \vec c = \vec a \cdot (\vec b \cdot \vec c) = V = (\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c) \quad (4.21)$$

Объём параллелепипеда не зависит от того, какая пара векторов из тройки перемножается векторно. Знак произведения не изменяется, так как сохраняется порядок векторов и ориентация тройки векторов.

Следствие 2. *Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.*

Теорема 4.7. *Если три вектора представлены разложениями по базису* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{a} = \vec{i}X_1 + \vec{j}Y_1 + \vec{k}Z_1,\ \vec{b} = \vec{i}X_2 + \vec{j}Y_2 + \vec{k}Z_2,\ \vec{c} = \vec{i}X_3 + \vec{j}Y_3 + \vec{k}Z_3,$$

то их смешанное произведение равно следующему определителю:

$$\left([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (4.22)$$

Доказательство. Из формулы (4.15) следует, что:

$$[\vec{a}\cdot\vec{b}] = \vec{i}\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

Умножив скалярно этот вектор на вектор $\vec{c}$, получим,

$$\left([\vec{a}\cdot\vec{b}]\cdot\vec{c}\right) = X_3\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - Y_3\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + Z_3\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \qquad (4.23)$$

Полученное выражение (4.23) есть разложение определителя (4.22) по элементам третьей строки. Теорема доказана.

Задачи № 795, 800, 803, 812, 818, 820, 829, 834, 840, 847, 851, 858, 875, 877.

§ 5. Прямая линия на плоскости

Определение 5.1. *Уравнение*

$$F(x, y) = 0 \qquad (5.1)$$

называется уравнением линии на плоскости относительно заданной системы координат, если ему удовлетворяют координаты точек, принадлежащих некоторой линии L, *и не* *удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этой линии.*

Определение 5.2. *Линия называется алгебраической, если в некоторой прямоугольной системе координат $F(x, y)$ есть полином некоторой степени.*

Алгебраическая линия называется линией n- го порядка если $F(x, y)$ – полином степени n.

Теорема 5.1. *Если линия в некоторой прямоугольной системе координат определяется алгебраическим уравнением степени n, то и в другой прямоугольной системе координат степень уравнения будет равна n.*

Без доказательства.

В трехмерном пространстве определения 5.1 и 5.3 и утверждение теоремы 5.1 можно повторить, заменив слово линия словом поверхность.

Теорема 5.2. *Если на плоскости фиксирована прямоугольная система координат Oxy, то любая прямая L, принадлежащая плоскости, определяется в этой системе координат уравнением первой степени.*

Доказательство. При специальном выборе системы координат, если ось Ox совпадает с прямой, уравнение прямой «$y = 0$» совпадает с уравнением оси Ox. В соответствии с утверждением теоремы 5.1 в любой другой прямоугольной системе координат степень уравнения сохранится.

Пусть уравнение прямой имеет вид:

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0, \qquad |A| + |B| > 0 \qquad (5.1)$$

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению.

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C = 0. \qquad (5.2)$$

Вычитая (5.2) из (5.1), получаем:

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0. \qquad (5.3)$$

Дадим векторное истолкование уравнения (5.3).

Пусть A и B − координаты некоторого вектора $\vec{n} = (A, B)$, а $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$ −компоненты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, начало которого совпадает с точкой $M_0(x_0, y_0)$, а конец совпадает с произвольной точкой $M(x, y)$, принадлежащей прямой.

Очевидно, что скалярное произведение

$$(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}) = A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0$$

является условием ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$.
Вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется нормальным вектором прямой.

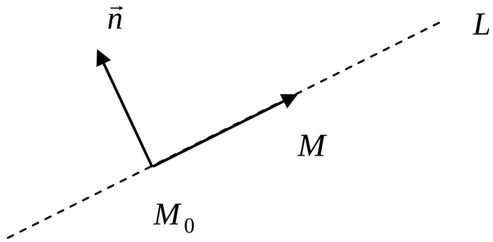

Рис. 5.1

Уравнение (5.3) есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$. Уравнение (5.3) эквивалентно уравнению (5.1), которое называется ***общим уравнением прямой.***

При условии $|A| + |B| > 0$ рассмотрим неполные уравнения прямой.

1). $C = 0$. Уравнение $A \cdot x + B \cdot y = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат.

2) $A=0$. Уравнение $B\cdot y+C=0$ определяет уравнение прямой, параллельной оси Ox.

3) $B=0$. Уравнение $A\cdot x+C=0$ определяет уравнение прямой, параллельной оси Oy.

4) $A=0, C=0$. Уравнение $B\cdot y=0$ определяет уравнение оси Ox.

5) $B=0, C=0$. Уравнение $A\cdot x=0$ определяет уравнение оси Oy.

Из уравнения (5.1) можно получить ***уравнение прямой в отрезках.***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{5.4}$$

В самом деле, уравнение

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \tag{5.5}$$

получено из уравнения (5.1) с помощью элементарных алгебраических преобразований.

Обозначив $a=-\frac{C}{A}, b=-\frac{C}{B}$, получим уравнение (5.4).

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой с осью Ox, решим систему уравнений, состоящую из уравнения (5.4) и уравнения оси Ox.

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a}=1 \Rightarrow x=a. \tag{5.6}$$

Аналогично можно получить, что $y=b$ координата точки пересечения с осью Oy.

Определение 5.3. *Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой будем называть направляющим вектором прямой.*

Задача 5.1. *Составить уравнение прямой* L, *проходящей через точку* $M_1(x_1, y_1)$ *параллельно вектору* $\vec{q}(l, m)$.

Решение. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$, начало которого совпадает с точкой M_1, а конец – в произвольной точке $M(x, y)$.

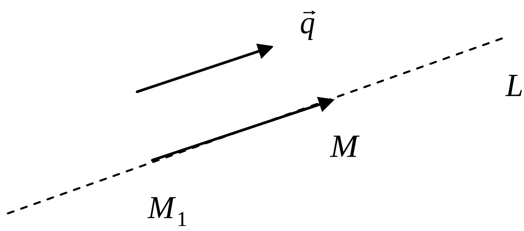

Рис. 5.2

Чтобы точка M лежала на прямой L, вектор $\overrightarrow{M_1M}$ должен быть параллелен вектору $\vec{q}$. Условие параллельности векторов состоит в пропорциональности сходственных координат, из чего следует

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \qquad (5.7)$$

(Нуль в знаменателе в этой пропорции означает, что соответствующий числитель тоже обращается в нуль.)
Это уравнение называется ***каноническим уравнением прямой***.

Приравняв выражение (5.7) параметру t, получим ***параметрические уравнения прямой.***

$$\begin{cases} x = x_1 + l \cdot t \\ y = y_1 + m \cdot t \end{cases} \qquad (5.8)$$

Если принять что, t−время, а $\vec{v} = \vec{i} \cdot l + \vec{j} \cdot m$ вектор скорости, то уравнения (5.8) определяют две проекции уравнения движения точки на координатные оси.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ получим из уравнения (5.7), приняв, что направляющий вектор

$$\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \qquad (5.9)$$

и подставив выражение (5.9) в (5.7):

$$\frac{x - x}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (5.10)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k получим, приняв, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона направляющего вектора $\vec{q}$:

$$k = \mathrm{tg}\alpha = \frac{m}{l} \qquad (5.11)$$

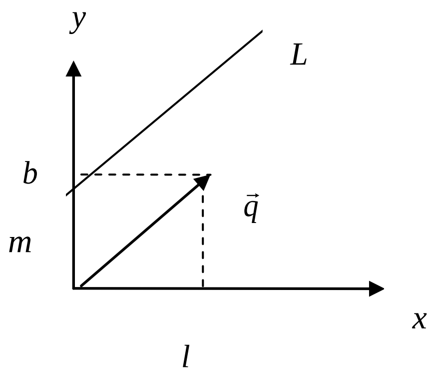

Рис. 5.3

Умножив выражение (5.7) на число m и подставив в него (5.11), получим:

$$y-y_1=\frac{m}{l}(x-x_1)=k(x-x_1)\qquad(5.12)$$

Если принять обозначение $y_1-k\cdot x_1=b$, уравнение примет следующий вид:

$$y=k\cdot x+b.\qquad(5.13)$$

Здесь $y=b$ координата точки пересечения прямой L с осью Oy, в чем легко убедиться, подставив в (5.13) уравнение оси Oy − $x=0$.

Косинус угла между прямыми, а также условия перпендикулярности и параллельности прямых очевидным образом связаны с соответствующими соотношениями между векторами: нормальным − $\vec{n}$, и направляющим − $\vec{q}$.

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}},\qquad(5.14)$$

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2)}{|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|}=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}.\qquad(5.15)$$

Условия перпендикулярности двух прямых:

$$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2=0.\qquad(5.16)$$

Условия параллельности прямых:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},\text{ или }\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}\qquad(5.17)$$

(Нуль в знаменателях этих пропорций означает, что соответствующие числители тоже обращаются в нуль.)

В случае двух прямых с угловым коэффициентом

$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1,\ \mathrm{tg}\varphi=\mathrm{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1}{1-\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\mathrm{tg}\alpha_2}=\frac{k_2-k_1}{1-k_1k_2}.\qquad(5.18)$$

Условие параллельности $k_2=k_1$, (5.19)

условие перпендикулярности $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$ (5.20)

Чтобы получить ***нормальное уравнение прямой*** из начала координат опустим перпендикуляр на прямую L. (Рис. 5.4). Пусть P − точка пересечения перпендикуляра с прямой L, длина отрезка $\left|\overrightarrow{OP}\right| = p$, орт нормали $\vec{e}_n = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Чтобы точка $M(x, y)$ лежала на прямой, необходимо и достаточно, чтобы проекция вектора $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ на нормаль равнялась p.

$$\text{Пр}_n \overrightarrow{OM} = (\vec{e}_n \cdot \overrightarrow{OM}) = x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi = p \qquad (5.21)$$

Уравнение

$$x \cdot \cos\varphi + y \cdot \sin\varphi - p = 0 \qquad (5.22)$$

есть ***нормальное уравнение прямой.***

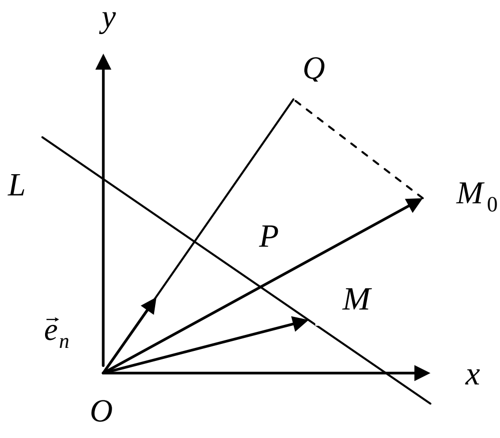

Рис. 5.4

Пусть d − расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой. Отклонение точки от прямой $\delta = +d$, если точка и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и $\delta = -d$, если точка и начало координат лежат по одну сторону от прямой.

$$\delta = PQ = OQ - p = x_0 \cdot \cos\varphi + y_0 \cdot \sin\varphi - p \qquad (5.23)$$

Здесь

$$OQ = \text{Ïð}_{\,n}\overrightarrow{OM_0} = \left(\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM_0}\right) = x_0\cdot\cos\varphi + y_0\cdot\sin\varphi \qquad (5.24)$$

Нормальное уравнение прямой

$$x\cdot\cos\varphi + y\cdot\sin\varphi - p = 0$$

и общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

определяют одну и ту же прямую, следовательно существует такое число μ, что

$$\mu\cdot A = \cos\varphi,\quad \mu\cdot B = \sin\varphi,\quad \mu\cdot C = -p,\ (p \geq 0). \qquad (5.25)$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \mu^2\cdot\left(A^2 + B^2\right) \Rightarrow \mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.26)$$

Из третьего равенства выражения (5.25) следует, что знак μ противоположен знаку C. Число μ называется ***нормирующим множителем.***

Для получения нормального уравнения прямой достаточно умножить общее уравнение на нормирующий множитель μ.

Определение 5.3. *Множество прямых, принадлежащих плоскости π, пересекающихся в точке S_0, называется пучком прямых.*

Теорема 5.3. *Уравнение*

$$\alpha\cdot\left(A_1x + B_1y + C_1\right) + \beta\cdot\left(A_2x + B_2y + C_2\right) = 0 \qquad (5.27)$$

есть уравнение пучка прямых, пересекающихся в точке S, если α и β не обращаются в нуль одновременно, а уравнения

$$A_1x + B_1y + C = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C = 0 \qquad (5.28)$$

суть уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S_0. Любая прямая, проходящая через точку S_0, определяется уравнением (5.27) *при некоторых значениях чисел α и β.*

Доказательство. Преобразуем уравнение к следующему виду:

$$(\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2)x + (\alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2)y + (\alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2) = 0 \quad (5.29)$$

Это уравнение прямой, если выражения в скобках не равны нулю одновременно. Предположим противное: пусть обе первые скобки равны нулю. Тогда, из

$$\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 = 0 \quad \text{следует} \quad \frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha},$$

из $\alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2 = 0$ следует $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

В итоге
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (5.30)$$

Это условие параллельности прямых (5.28), что противоречит условиям теоремы. Тем самым доказано, что уравнение (5.27) всегда определяет некоторую прямую.

Эта прямая проходит через точку $S_0(x_0, y_0)$, так как подстановка её координат обращает в нуль каждое из уравнений (5.28), а следовательно, и уравнение (5.27).

$$\alpha \cdot (A_1 x_0 + B_1 y_0 + C_1) + \beta \cdot (A_2 x_0 + B_2 y_0 + C_2) = 0. \quad (5.31)$$

Покажем, что любая прямая, принадлежащая пучку определяется уравнением (5.27) при некоторых значениях чисел α и β. Фиксируем точку $M_1(x_1, y_1)$, отличную от точки $S_0(x_0, y_0)$. Эти две точки определяют прямую, принадлежащую пучку, единственным образом.

Подставив координаты точки M_1 в уравнение (5.27), получим уравнение относительно неизвестных α и β.

$$\alpha \cdot (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1) + \beta \cdot (A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2) = 0. \quad (5.32)$$

В этом уравнении круглые скобки не могут обратиться в нуль одновременно, так как точка M_1 не может принадлежать двум различным прямым, так как не совпадает с точкой S_0 (5.28).

Пусть

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0,$$

Тогда

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1} \cdot \beta \qquad (5.33)$$

Из (5.33) значения α и β определяются с точностью до произвольного общего множителя.

Можно представить уравнение пучка прямых в другом виде, разделив (5.27) на α $(\alpha \neq 0)$ и положив $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$:

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2) = 0 \qquad (5.34)$$

Уравнение (5.34) не эквивалентно (5.27), так как не позволяет получить прямую $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Случай $\beta \neq 0$ предоставляется рассмотреть читателю.

Типовые задачи.

Задача 5.1.

Дана прямая $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$. (5.35)

. Составить уравнение прямой, походящей через данную точку параллельно заданной прямой.

Решение.

Нормальный вектор прямой $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$, он же будет нормальным вектором искомой прямой.

Чтобы «свободная точка» $M(x, y)$ принадлежала искомой прямой, вектор $\overrightarrow{M_0M} = ((x - x_0), (y - y_0))$ должен быть перпендикулярен вектору $\vec{n}_1$. Условие перпендикулярности векторов

$$(\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{M_0M}) = A_1 \cdot (x - x_0) + B_1 \cdot (y - y_0) = 0 \qquad (5.36)$$

есть искомое уравнение. Раскрыв скобки и введя обозначение $C_2 = -A_1x_0 - B_1y_0$ запишем найденное уравнение в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_2 = 0 \qquad (5.37)$$

Задача 5.2.

Дана прямая $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$. (5.35)

. Составить уравнение прямой, походящей через данную точку перпендикулярно заданной прямой.

Решение.

Нормальный вектор прямой $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$ будет направляющим вектором для искомой прямой.

Чтобы «свободная точка» $M(x, y)$ принадлежала искомой прямой, вектор $\overrightarrow{M_0M} = ((x - x_0), (y - y_0))$ должен быть параллелен вектору $\vec{n}_1$. Условие параллельности векторов

$$\frac{x - x_0}{A_1} = \frac{y - y_0}{B_1} \qquad (5.38)$$

есть искомое уравнение в каноническом виде. Умножив (5.38) на произведение $A_1 \cdot B_1 \neq 0$ и введя обозначение $C_3 = -B_1x_0 + A_1y_0$ запишем искомое уравнение в общем виде

$$B_1x - A_1y + C_3 = 0. \qquad (5.39)$$

Условия $A_1 = 0$ или $B_1 = 0$ означают, что соответствующие числители обращаются в нуль.

Заметим, что в случае перпендикулярности прямых коэффициенты при переменных x и y меняются местами, а у одного из них меняется знак.

Задача 5.3.

Задано

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2) = 0, \qquad (5.40)$$

уравнение пучка прямых и прямая L_3:

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0. \qquad (5.41)$$

Составить уравнение прямой, принадлежащей пучку, параллельной прямой L_3.

Решение.

Преобразуем уравнение (5.40)

$$(A_1 + \lambda \cdot A_2)\,x + (B_1 + \lambda \cdot B_2)\,y + C_1 + \lambda \cdot C_2 = 0 \qquad (5.42)$$

$$\vec{n} = (A_1 + \lambda \cdot A_2, B_1 + \lambda \cdot B_2)$$

параллелен вектору $\vec{n}_3 = (A_3, B_3)$.

Условие параллельности векторов

$$\frac{A_1 + \lambda \cdot A_2}{A_3} = \frac{B_1 + \lambda \cdot B_2}{B_3} \qquad (5.43)$$

содержит единственную неизвестную величину λ. Определив λ и подставив его в уравнение (5.40), получим искомое уравнение.

Задачи № 213, 223, 234, 236, 248, 261, 271, 292, 310, 312, 313, 315, 323, 334, 337, 349, 354.

§ 6 Плоскость в трехмерном пространстве

Теорема 6.1 *Если в пространстве выбрана некоторая прямоугольная система координат, то уравнение первой степени относительно переменных x, y, z*

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \qquad (6.1)$$

Определяет в этой системе координат некоторую плоскость. (При условии, что коэффициенты $A, B. C$ не обращаются в нуль одновременно).

Найдется точка $M_0(x_0. y_0, z_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (6.1).

$$A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D = 0. \qquad (6.2)$$

Вычитая уравнение (6.2) из (6.1), получим уравнение (6.3), эквивалентное исходному уравнению.

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0. \qquad (6.3)$$

Это уравнение есть условие ортогональности нормального вектора $\vec{n} = (A, B, C)$ и вектора

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

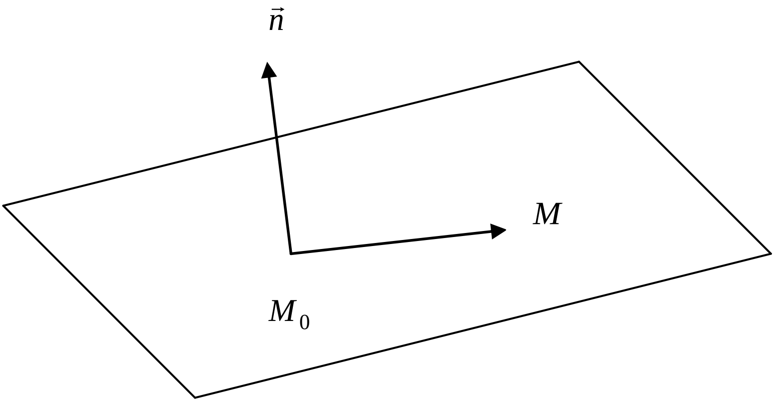

Рис. 6.1

начало которого в фиксированной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а конец в свободной точке M с произвольными координатами x, y и z. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ может изменять длину и вращаться вокруг вектора $\vec{n}$, оставаясь перпендикулярным к нему. Свободная точка $M(x, y, z)$, являющаяся концом вектора, будет при этом перемещаться по плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

Следовательно, уравнение (6.3) есть уравнение плоскости с нормальным вектором $\vec{n}$, проходящей через фиксированную точку M_0. Теорема доказана.

Уравнение (6.1), эквивалентное уравнению (6.3), называется общим уравнением плоскости.

Рассмотрим неполные уравнения плоскости при условии $|A| + |B| + |C| > 0$:

1) $D = 0$. Уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат.

2) $A=0$. Уравнение $B\cdot y+C\cdot z+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox, так как её нормальный вектор $\vec{n}=(0;B,C)$ перпендикулярен оси Ox.

3) $A=0, B=0$. Уравнение $C\cdot z+D=0$ определяет плоскость, перпендикулярную оси Oz, так как её нормальный вектор $\vec{n}=(0;0,C)$ параллелен оси Oz.

Остальные неполные уравнения плоскости рассматриваются аналогично.

Уравнение плоскости «в отрезках» легко получить из уравнения (6.1), если перенести свободный член D направо от знака равенства, разделить на него левую часть уравнения и сделать очевидные алгебраические преобразования:

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}}+\frac{y}{\frac{-D}{B}}+\frac{z}{\frac{-D}{C}}=1. \qquad (6.4)$$

Введем обозначения $-\frac{D}{A}=a, -\frac{D}{B}=b, -\frac{D}{C}=c$, уравнение (6.4) примет следующий вид:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (6.5)$$

Уравнение (6.5) имеет смысл при условиях $D\neq 0$ и $|A|+|B|+|C|>0$.

Здесь числа a, b и c равны координатам точек пересечения плоскости с осями координат.

Убедиться в этом можно, решив систему уравнений, состоящую из уравнения плоскости (6.5) и уравнений осей координат, например оси Ox:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{x}{c} = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = a. \qquad (6.6)$$

Доказательства для точек b и c проводятся аналогично.

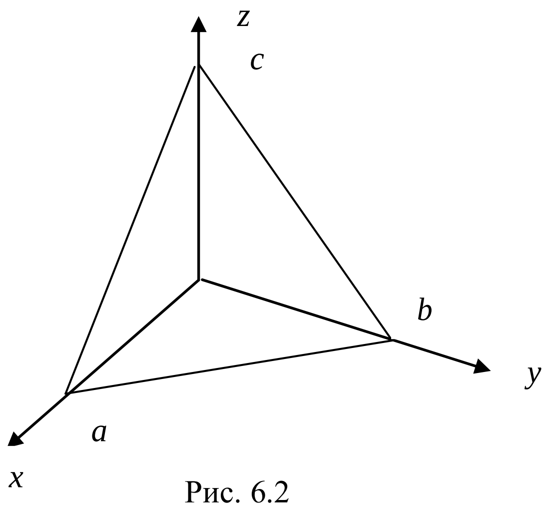

Рис. 6.2

Угол между плоскостями и условия параллельности и перпендикулярности плоскостей очевидным образом связаны с соответствующими условиями для их нормальных векторов

Пусть заданы уравнения двух плоскостей

$$\begin{aligned} \pi_1 : \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{aligned} \qquad (6.7)$$

Угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей. В данном случае это вектора

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \text{ и } \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

Косинус угла между векторами можно найти исходя из определения скалярного произведения

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos\varphi \quad \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (6.8)$$

Условие ортогональности плоскостей следует из условия ортогональности их нормальных векторов, то есть равенства нулю их скалярного произведения:

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \qquad (6.9)$$

Условия параллельности плоскостей следуют из условия коллинеарности их нормальных векторов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (6.10)$$

Задача 6.1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

Пусть заданы точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3),$$

не принадлежащие одной прямой. Тогда вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} \text{ и}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

не будут коллинеарными. Пусть точка $M(x, y, z)$ «свободная точка» с произвольными координатами x, y, z, а вектор

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

«свободный вектор». Чтобы точка $M(x, y, z)$ принадлежала плоскости, определяемой векторами $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ необходимо и достаточно, чтобы все три вектора были компланарны, а их смешанное произведение равнялось нулю.

$$\left(\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}\right)=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad (6.11)$$

Нормальное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости.

Рассмотрим плоскость π (рис 6.3). Из начала координат проведем нормаль к этой плоскости. Точку пересечения нормали с плоскостью обозначим P. Величину отрезка OP обозначим p. Орт нормали $\overrightarrow{OP}$ обозначим $\vec{e}_n$.

$$\vec{e}_n=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$$

Чтобы свободная точка $M(x,y,z)$ принадлежала плоскости π, необходимо и достаточно чтобы проекция радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}=\{x-0,\,y-0,\,z-0\}=\{x,\,y,\,z\}$ точки M на нормаль $\overrightarrow{OP}$ равнялась числу p.

$$\text{Пр}_n\overrightarrow{OM}=\left(\overrightarrow{OM}\cdot\vec{e}_n\right)=x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma=p \qquad (6.12)$$

Нормальное уравнение плоскости получим, если в (6.12) перенесем влево от знака равенства число p.

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0 \qquad (6.13)$$

Отклонение точки от плоскости.

Пусть число $d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ − расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_o)$ до плоскости. Отклонение точки от плоскости $\delta=+d$, если точка и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и $\delta=-d$, если точка и начало координат лежат по одну сторону от плоскости.

$$\delta=PQ=OQ-p=x_0\cdot\cos\alpha+y_0\cdot\cos\beta+z_0\cos\gamma-p \qquad (6.14)$$

Здесь

$$OQ=\text{Пр}_n\overrightarrow{OM_0}=\left(\vec{e}_n\overrightarrow{OM_0}\right)=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma \quad (6.15)$$

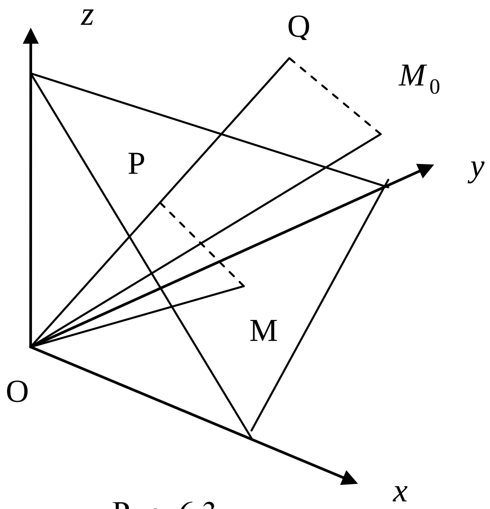

Рис. 6.3

Нормальное уравнение плоскости

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0 \qquad (6.13)$$

и общее уравнение плоскости

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \qquad (6.1)$$

определяют одну и ту же плоскость, следовательно существует такое число μ, что

$$\mu \cdot A = \cos\alpha,\ \mu \cdot B = \cos\beta,\ \mu \cdot C = \cos\gamma,\ \mu \cdot D = -p \quad (6.16)$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 = \mu^2 \cdot \left(A^2 + B^2 + C^2\right) \Rightarrow$$

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6.17)$$

Из четвертого равенства выражения (6.16) следует, что знак μ противоположен знаку D. Число μ называется ***нормирующим множителем.*** Для получения нормального уравнения плоскости достаточно умножить общее уравнение на нормирующий множитель μ.

Отклонение точки от плоскости δ получим, подставив координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ в уравнение (6.14).

Определение 6.1. *Множество плоскостей, пересекающихс по одной прямой* L*, называется пучком плоскостей*

Теорема 5.3. *Уравнение*

$$\alpha \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (6.18)$$

есть уравнение пучка плоскостей, если α *и* β *не обращаются в нуль одновременно, а уравнения*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ \text{и} \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (6.19)$$

суть уравнения двух плоскостей, пересекающихся по прямой L*. Любая плоскость, проходящая через прямую* L*, определяется уравнением* (6.19) *при некоторых значениях чисел* α *и* β.

Доказательство. Преобразуем уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned}&(\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2)x + (\alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2)y + \\ &+ (\alpha \cdot C_1 + \beta \cdot C_2)z + (\alpha \cdot D_1 + \beta \cdot D_2) = 0\end{aligned} \quad (6.20)$$

Это уравнение плоскости, если выражения в скобках не равны нулю одновременно. Предположим противное. Тогда, из

$$\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 = 0 \quad \text{следует} \quad \frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha},$$

из $\quad \alpha \cdot B_1 + \beta \cdot B_2 = 0 \quad$ следует $\quad \dfrac{B_1}{B_2} = -\dfrac{\beta}{\alpha},$

из $\quad \alpha \cdot D_1 + \beta \cdot D_2 = 0 \quad$ следует $\quad \dfrac{D_1}{D_2} = -\dfrac{\beta}{\alpha}.$

В итоге
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2}. \quad (6.21)$$

Это условие параллельности плоскостей (6.19), что противоречит условиям теоремы. Тем самым доказано, что уравнение (6.18) всегда определяет некоторую плоскость.

Покажем, что любая плоскость, принадлежащая пучку определяется уравнением (6.18) при некоторых значениях чисел α и β. Фиксируем точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не принадлежащую прямой L. Точка M_1 и прямая L определяют плоскость, принадлежащую пучку, единственным образом.

Подставив координаты точки M_1 в уравнение (6.18), получим уравнение относительно неизвестных α и β.

$$\alpha \cdot (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + \beta \cdot (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0$$

В этом уравнении выражения в круглых скобках не могут обратиться в нуль одновременно, так как точка M_1 не может принадлежать двум различным плоскостям (6.19).

Пусть

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 \neq 0,$$

Тогда

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D} \cdot \beta \qquad (6.22)$$

Из (6.22) значения α и β определяются с точностью до произвольного общего множителя.

Можно представить уравнение пучка плоскостей в другом виде, разделив (6.18) на α и положив $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (6.23)$$

Типовые задачи.

Задача 6.2.

Дана плоскость $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Составить уравнение плоскости, походящей через данную точку параллельно заданной плоскости.

Решение.

Нормальный вектор заданной плоскости $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, он же будет нормальным вектором искомой плоскости.

Чтобы «свободная точка» $M(x, y, z)$ принадлежала искомой плоскости, вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ должен быть перпендикулярен вектору $\vec{n}_1$. Условие перпендикулярности векторов

$$(\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{M_0M}) = A_1 \cdot (x - x_0) + B_1 \cdot (y - y_0) + C_1 (z - z_1) = 0 \qquad (6.24)$$

есть искомое уравнение. Раскрыв скобки и введя обозначение $D_2 = -A_1x_0 - B_1y_0 - C_1z_0$ запишем найденное уравнение в общем виде

$$A_1x + B_1y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (6.25)$$

Задача 6.3.

Задано уравнение пучка плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \qquad (6.26)$$

и плоскость π_3

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \qquad (6.26^*)$$

Составить уравнение плоскости, принадлежащей пучку, параллельной плоскости π_3.

Решение. Преобразуем уравнение (6.26)

$$(A_1 + \lambda \cdot A_2)x + (B_1 + \lambda \cdot B_2)y + (C_1 + \lambda C_2)z + D_1 + \lambda \cdot D_2 = 0.$$

Это уравнение искомой плоскости. Его нормальный вектор, имеющий вид

$$\vec{n} = (A_1 + \lambda \cdot A_2, B_1 + \lambda \cdot B_2, C_1 + \lambda C_2),$$

параллелен вектору $\vec{n}_3 = (A_3, B_3, C_3)$.

Условие параллельности векторов

$$\frac{A_1 + \lambda \cdot A_2}{A_3} = \frac{B_1 + \lambda \cdot B_2}{B_3} = \frac{C_1 + \lambda \cdot C_2}{C_3} \qquad (6.27)$$

содержит единственную неизвестную величину λ. Определив число λ и подставив его в уравнение (6.26), получим уравнение искомой плоскости.

Связка плоскостей есть множество плоскостей, имеющих одну общую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Уравнение связки плоскостей имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (6.28)$$

В этом уравнении фиксированы координаты точки M_0, а коэффициенты A, B, C произвольные числа, не обращающиеся в нуль одновременно..

Задачи № 913, 919, 920, 927, 931, 942, 946, 952, 961, 964, 973.

§ 7. ***Прямая линия в трехмерном пространстве***

Прямую линию в пространстве можно определить как линию пересечения двух непараллельных плоскостей.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (7.1)$$

Часто удобнее ***канонический вид*** уравнения прямой.

Определение 7.1. *Любой ненулевой вектор $\vec{q} = \{l, m, n\}$, параллельный данной прямой будем называть направляющим вектором прямой.*

Задача 7.1. *Составить уравнение прямой L, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ параллельно вектору $\vec{q} = \{l, m, n\}$.*

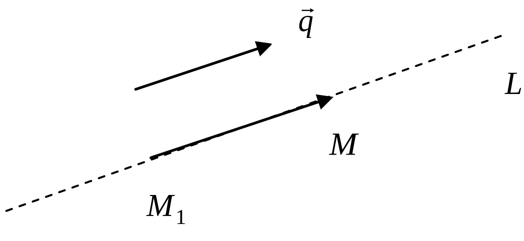

Рис. 7.1

Решение.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M} = \left(x - x_1, y - y_1, z - z_1\right)$, начало которого совпадает с точкой M_1, а конец − в произвольной точке $M(x, y, z)$.

Чтобы точка M лежала на прямой L, вектор $\overrightarrow{M_1M}$ должен быть параллелен вектору $\vec{q}$. Условие параллельности векторов состоит в пропорциональности сходственных координат, из чего следует

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (7.2)$$

Это уравнение называется ***каноническим уравнением прямой*** в пространстве.

Приравняв выражение (7.2) параметру t, получим ***параметрические уравнения прямой.***

$$\begin{cases} x = x_1 + l \cdot t \\ y = y_1 + m \cdot t \\ z = z_1 + n \cdot t \end{cases} \qquad (7.3)$$

Эти уравнения имеют наглядное физическое истолкование. Если принять что, t−время, а $\vec{v} = \vec{i} \cdot l + \vec{j} \cdot m + \vec{k} \cdot n$ вектор скорости, то уравнения (7.3) − это три проекции уравнения движения точки на координатные оси.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ получим из уравнения (7.2), приняв, что направляющий вектор

$$\vec{q} = \overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\right) \qquad (7.4)$$

и подставив выражение (7.4) в (7.2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (7.5)$$

Чтобы привести к ***каноническому виду*** уравнение прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей, нужно найти направляющий вектор прямой и точку, лежащую на прямой. Длина вектора − произвольная, точка, лежащая на прямой − любая.

Пусть прямая есть линия пересечения плоскостей (7.6)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (7.6)$$

Направляющий вектор прямой $\vec{q}$ ортогонален каждому из нармальных векторов плоскостей

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \text{ и } \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Поэтому определим вектор $\vec{q}$, как векторное произведение нормальных векторов

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \qquad (7.7)$$

Компоненты вектора $\vec{q}$ будут иметь вид

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad \vec{m} = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \quad \vec{n} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \qquad (7.8)$$

Для определения координат точки, лежащей на прямой, добавим в систему уравнений (7.6) уравнение третьей плоскости. Удобно добавить одну из координатных плоскостей $x = 0,\ y = 0$ или $z = 0$.

Чтобы получающаяся система уравнений второго порядка имела единственное решение, её главный определитель не должен обращаться в нуль. Это накладывает ограничения на выбор координатной плоскости.

Пусть $z = 0$. Пусть в полученной системе уравнений

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + D_2 = 0 \end{cases}. \qquad (7.9)$$

главный определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Тогда координаты искомой точки определяются по формулам Крамера

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 \\ -D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 \\ A_2 & -D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}; \quad z_0 = 0.$$

(7.10)

Искомое каноническое уравнение запишем в следующем виде

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - 0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (7.11)$$

Угол между прямыми, а также условия перпендикулярности и параллельности прямых очевидным образом связаны с соответствующими соотношениями между их направляющими векторами $\vec{q}$.

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (7.12)$$

Условие перпендикулярности двух прямых:

$$(\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2) = l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 = 0. \qquad (7.13)$$

Условия параллельности прямых:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (7.14)$$

(Нуль в знаменателе в этой пропорции означает, что соответствующий числитель тоже обращается в нуль.)

Угол между плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (7.15)$$

и прямой

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \qquad (7.16)$$

Определяется как дополнительный к углу между нормальным вектором плоскости $\vec{n}=\{A,B,C\}$ и направляющим вектором прямой $\vec{q}=\{l,m,n\}$. Если угол между векторами обозначить φ, а угол меду прямой и плоскостью ψ, то $\psi=\pi/2-\varphi$. Следовательно:

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{n}\cdot\vec{q})}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\sin\psi\,. \qquad (7.17)$$

Условие перпендикулярности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$

$$(\vec{n}\cdot\vec{q})=A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n=0 \qquad (7.18)$$

соответствует параллельности прямой и плоскости, а условие парллельности векторов $\vec{n}$ и $\vec{q}$

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n} \qquad (7.19)$$

означает перпендикулярность прямой и плоскости.

Для того, чтобы прямая (7.16) принадлежала плоскости (7.15) должны быть выполнены два условия:

1. условие параллельности прямой и плоскости

$$A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n=0 \qquad (7.20)$$

2. координаты точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, принадлежащей прямой, должны обращать уравнение плоскости в тождество

$$A\cdot x_1+B\cdot y_1+C\cdot z_1+D=0 \qquad (7.21)$$

Для того, чтобы две прямые (7.22) и (7.23) принадлежали

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (7.22)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_{21}}{n_2} \qquad (7.23)$$

одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора

$$\vec{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\},\ \vec{q}_2 = \{l_2, m_2, n_2\} \text{ и}$$
$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{(x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)\}$$

были компланарны.

Приравняв нулю смешанное произведение этих векторов, получим условие принадлежности двух прямых к одной плоскости.

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}\,[\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2]\right) = \begin{vmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.24)$$

Задачи № 983, 985, 991, 1003, 1005, 1007, 1009, 1012, 1018, 1024, 1029, 1030.

§8. Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве

Задача 8.1.

Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (8.1)$$

И плоскости

$$Ax + Dy + Cz + D = 0 \qquad (8.2)$$

Решение.

Приравняем выражение (8.1) к параметру t и выразим через него x, y и z

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = t \qquad (8.3)$$

$$\begin{cases} x = x_1 + l \cdot t \\ y = y_1 + m \cdot t \\ z = z_1 + n \cdot t \end{cases} \qquad (8.4)$$

Подставим x, y и z из (8.4) в уравнение плоскости.

$$A \cdot (x_1 + l \cdot t) + B \cdot (y_1 + m \cdot t) + C \cdot (z_1 + n \cdot t) + D = 0 \qquad (8.5)$$

Координаты точки пересечения прямой и плоскости получим, подставив значение t_0, найденное из (8.5) в уравнения (8.4).

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + l \cdot t_0 \\ y_0 = y_1 + m \cdot t_0 \\ z_0 = z_1 + n \cdot t_0 \end{cases} \qquad (8.6)$$

Задача 8.2.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и прямую (8.7)

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (8.7)$$

Решение.

Положение искомой плоскости определяют два вектора: направляющий вектор прямой

$$\vec{q} = \{l, m, n\}$$

и вектор

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$

точка начала которого $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит прямой. Введем в рассмотрение «свободный вектор»

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

конечная точка которого $M(x, y, z)$ –. произвольная точка пространства.

Чтобы эта точка принадлежала искомой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы три рассматриваемые вектора были компланарны, а их смешанное произведение равнялось нулю. Исходя из этого, запишем уравнение искомой плоскости в матричной форме:

$$\left(\overrightarrow{M_1M}\cdot\left[\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\vec{q}\right]\right)=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0 \qquad (8.8)$$

Частным случаем рассмотренной задачи является задача о плоскости, проходящей через две параллельные прямые. В этом случае точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ берется со второй прямой

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (8.9)$$

$$\frac{x-x_2}{l_1}=\frac{y-y_2}{m_1}=\frac{z-z_{21}}{n_1} \qquad (8.10)$$

и ход решения повторяется.

Задача 8.3.

Составить уравнение плоскости, проходящей через одну из скрещивающихся прямых параллельно второй.

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (8.11)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_{21}}{n_2} \qquad (8.12)$$

Решение.

Ориентацию в пространстве искомой плоскости определяют направляющие вектора прямых

$$\vec{q}_1 = \{l_1, m_1, n_1\} \; è \quad \vec{q}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$$

Введем в рассмотрение «свободный вектор»

$$\overrightarrow{M_1M} = (x-x_1),(y-y_1),(z-z_1),$$

конечная точка которого $M(x, y, z)$–.произвольная точка пространства, а начальная точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ взята с первой прямой.

Из условия компланарности рассматриваемых векторов запишем уравнение искомой плоскости в матричной форме.

$$\left(\overrightarrow{M_1M}\cdot\left[\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2\right]\right)=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0. \qquad (8.13)$$

Задача 8.4.

Составить уравнение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (8.14)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_{21}}{n_2} \qquad (8.15)$$

Решение.

Направляющий вектор $\vec{q}_3=\{l_3,m_3,n_3\}$ искомой прямой вычисляем как векторное произведение направляющих векторов заданных прямых

$$\vec{q}_1=\{l_1,m_1,n_1\}\ \text{è}\quad \vec{q}_2=\{l_2,m_2,n_2\}$$

Так как по условиям задачи $\vec{q}_3$ перпендикулярен $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$.

$$\vec{q}_3=\left[\vec{q}_1\cdot\vec{q}_2\right]=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} l_1 & n_1\\ l_2 & n_2\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} l_1 & m_1\\ l_2 & m_2\end{vmatrix} \qquad (8.16)$$

Из условия компланарности векторов $\vec{q}_1$, $\vec{q}_3$ и свободного вектора

$$\overrightarrow{M_1M}=\left(x-x_1\right),\left(y-y_1\right),\left(z-z_1\right),$$

начальная точка которого $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ взята с первой прямой, запишем в матричной форме уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно вектору $\vec{q}_3$.

$$\left(\overrightarrow{M_1M}\cdot\left[\vec{q}_1\cdot\vec{q}_3\right]\right)=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (8.17)$$

Аналогично, из условия компланарности векторов $\vec{q}_2$, $\vec{q}_3$ и свободного вектора

$$\overrightarrow{M_2M} = \left(x-x_2, y-y_2, z-z_2\right),$$

начальная точка которого $M_2(x_2, y_2, z_2)$ взята со второй прямой, запишем в матричной форме уравнение плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно вектору $\vec{q}_3$.

$$\left(\overrightarrow{M_2M}\cdot\left[\vec{q}_1\cdot\vec{q}_3\right]\right)=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (8.18)$$

Линия пересечения этих плоскостей и есть искомый общий перпендикуляр.

Чтобы получить искомый общий перпендикуляр в каноническом виде можно найти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в которой пересекается вторая прямая с плоскостью (8.17). (Способ нахождения этой точки рассмотрен в задаче 8.1) и записать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\vec{q}_3$.

$$\frac{x-x_0}{l_3}=\frac{y-y_0}{m_3}=\frac{z-z_0}{n_3} \qquad (8.19)$$

Задача 8.5.

Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_3(x_2, y_3, z_3)$ и пересекающейся с каждой из скрещивающихся прямых (8.20) и (8.21)

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \qquad (8.20)$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \qquad (8.21)$$

Решение.

Через точку M_3 и каждую из прямых можно провести плоскость (задача 8.2). Линия пересечения этих плоскостей и есть искомая прямая.

Задачи № 1039, 1044, 1050, 1052, 1066, 1071, 1072, 1078, 1083.

§9. Кривые второго порядка

9.1. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Если фокусы совпадают, то эллипс превращается в окружность.

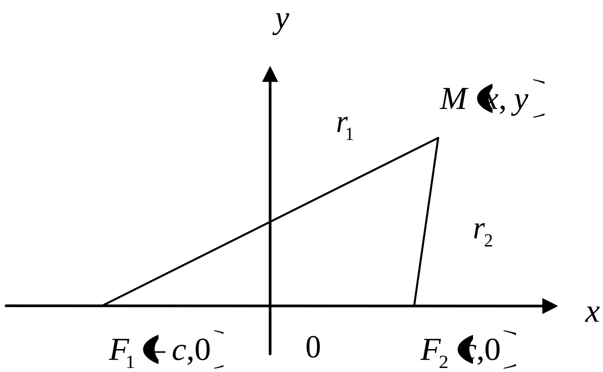

Рис. 9.1

Ось Ox проведем через точки F_1 и F_2, начало координат поместим в среднюю точку отрезка F_1F_2. Расстояние между и фокусами примем за $2c$, Обозначим через r_1 и r_2 длины отрезков F_1M и F_2M. Пусть $r_1+r_2=2a$, тогда $a>c$.

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad (9.1)$$

В соответствии с определением эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \qquad (9.2)$$

Это уже уравнение эллипса. С помощью стандартного приёма уничтожения радикалов оно приводится к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (9.3)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Величины a и b называются большой и малой полуосями эллипса. Координаты точек пересечения эллипса с осями координат

$$x = \pm a \text{ и } y = \pm b,$$

легко получить, подставив в уравнение (9.3) уравнения осей координат $y = 0$ и $x = 0$.

Графическое изображение эллипса представлено на рис. 9.2.

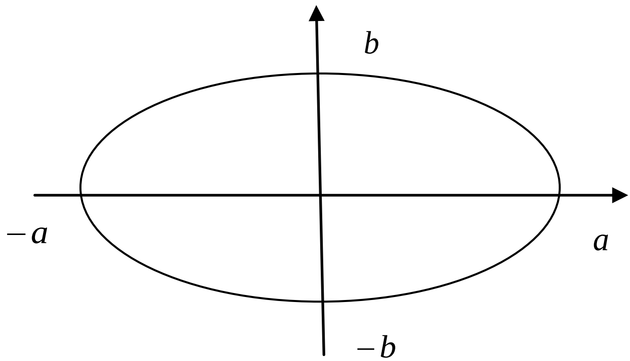

Рис. 9.2

9.2. Гипербола.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух *фиксированных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная.*

Обозначим через r_1 и r_2 длины отрезков F_1M и F_2M. Пусть $|r_1 - r_2| = 2a$, тогда будет $a < c$.

Систему координат выберем так же, как при выводе уравнения эллипса (рис. 9.1). Согласно определению гиперболы, её уравнение будет иметь следующий вид:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a \qquad (9.4)$$

С помощью стандартного приёма уничтожения радикалов оно приводится к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (9.5)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$.

Гипербола пересекает ось Ox в точках $x = a$ и $x = -a$, в чем легко убедиться, подставив в уравнение гиперболы (9.5) уравнение оси Ox - $y = 0$. Получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

решения которого имеют вид $x = a$ и $x = -a$

Асимптотами гиперболы являются прямые с уравнениями

$$Y = \pm\frac{b}{a}x. \qquad (9.6)$$

Чтобы убедиться в этом, получим из уравнения (9.5) явное выражение для y:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (9.7)$$

и рассмотрим поведение разности $Y - y$ при $x \to \infty$.

$$\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(x^2-a^2\right)}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=$$

$$=\pm\frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}\right)}=0. \tag{9.8}$$

Утверждение (9.6) доказано.

9.3. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние r *от некоторой точки* F*, именуемой фокусом, равно расстоянию* d *до некоторой прямой, именуемой директрисой.*

Для вывода уравнения параболы точку F поместим на оси Ox на расстоянии, равном $\frac{p}{2}$ вправо от начала координат, а директрису проведем параллельно оси Oy на таком же расстоянии влево от начала координат (Рис.9.3.)

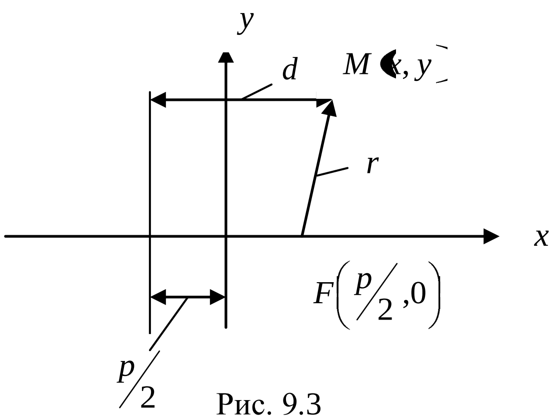

Рис. 9.3

В соответствии с определением параболы

$$r = d, \qquad r = \sqrt{\left(x - {}^{p}\!/_{2}\right)^2 + y^2}, \quad d = x + {}^{p}\!/_{2} \qquad (9.9)$$

Подставив r и d в равенство $r = d$ и возведя во вторую степень левую и правую части равенства, получим:

$$x^2 - p \cdot x + {}^{p^2}\!/_{4} + y^2 = x^2 + p \cdot x + {}^{p^2}\!/_{4}. \qquad (9.10)$$

После упрощений в выражении (9.10), получим каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2p \cdot x. \qquad (9.11)$$

9.4. Общее определение кривых второго порядка.

С помощью представлений о директрисах можно сформулировать единое определение кривых второго порядка. Для этого необходимо ввести понятие эксцентриситета кривой второго порядка.

Пусть $2 \cdot c$ ¬ расстояние между фокусами эллипса, а $2a$ ¬ длина главной оси, тогда $e = \dfrac{c}{a}$ ¬ эксцентриситет эллипса. Для гиперболы эксцентриситет определяется аналогично.

Для эллипса:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1. \ (9.12)$$

Директрисы эллипса перпендикулярны его главной оси и расположены по обе стороны от центра на расстоянии ${}^{a}\!/_{e} > a$ (т. к. $e < 1$).

Для гиперболы:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a}} > 1. \ (9.13)$$

Директрисы гиперболы перпендикулярны её главной оси и расположены по обе стороны от центра на расстоянии ${}^{a}\!/_{e} < a$ (т. к. $e > 1$).

Эксцентриситет окружности равен нулю. Эксцентриситет параболы равен единице.

Определение.

Геометрическое место точек плоскости, для которых отношение e расстояния r до точки F (фокуса) к расстоянию d до директрисы есть величина постоянная, представляет собой эллипс (при $e<1$), гиперболу (при $e>1$) или параболу (при $e=1$).

9.5. Полярное уравнение кривых второго порядка.

Если φ — угол между осью Ox и отрезком FM (Рис. 9.5), а p — расстояние от фокуса кривой до директрисы, то

$$d = p + r\cdot\cos\varphi, \quad \frac{r}{d} = \frac{r}{p + r\cdot\cos\varphi} = e, \quad r = p\cdot e + r\cdot e\cdot\cos\varphi\,.$$

Откуда следует, что

$$r\cdot(1 - e\cdot\cos\varphi) = p\cdot e, \quad r = \frac{p\cdot e}{1 - e\cdot\cos\varphi} \qquad (9.14)$$

Уравнение (9.14) справедливо для параболы, эллипса и «своей» ветви гиперболы (если фокус и директриса расположены по одну сторону от центра кривой). Для другой ветви гиперболы справедливо уравнение

$$r = \frac{-\,p\cdot e}{1 + e\cdot\cos\varphi} \qquad (9.15)$$

9.6. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду

Общее уравнение кривой второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,. \qquad (9.16)$$

Для приведения уравнения (9.16) к каноническому виду нужно, чтобы коэффициенты a_{12}, a_{13}, a_{23} приняли нулевые значения. Этого можно добиться за счёт переноса начала координат и поворота системы координат.

При переносе начала координат в точку $O_1(x_0, y_0)$ соотношения между старыми и новыми координатами имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + \tilde{x} \\ y = y_0 + \tilde{y} \end{cases} \tag{9.17}$$

При повороте осей на угол φ:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases} \tag{9.18}$$

Смысл обозначений $\tilde{x}, \vec{y}$ и x', y' очевиден из соотношений (9.17) и (9.18).

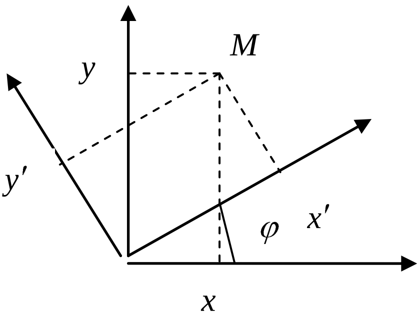

Рис. 9.4

Подставив (9.17) в уравнение (9.16), получим:

$$a_{11}\left(\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}x_0 + x_0^2\right) + 2a_{12}\left(\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{x}y_0 + x_0\tilde{y} + x_0y_0\right) +$$
$$+ a_{22}\left(\tilde{y}^2 + 2\tilde{y}y_0 + y_0^2\right) + 2a_{13}\left(x_0 + \tilde{x}\right) + 2a_{23}\left(y_0 + \tilde{y}\right) + a_{33} = 0$$

Перегруппируем члены уравнения:

$$\tilde{x}^2a_{11} + 2\tilde{x}\tilde{y}a_{12} + \tilde{y}^2a_{22} + 2\tilde{x}\left(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}\right) +$$
$$+ 2\tilde{y}\left(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}\right) + a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + \tag{9.19}$$
$$+ 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} = 0$$

Выберем x_0 и y_0 так, чтобы коэффициенты при $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ обратились в нуль. Для этого решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases} \tag{9.20}$$

Решение системы существует только в случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому начинать следует с вычисления значения Δ.

($\Delta > 0$ для эллипса, $\Delta < 0$ для гиперболы, $\Delta = 0$ для параболы.)

Последнее обстоятельство заставляет начинать преобразование уравнения параболы с поворота осей координат.

Из выражения (9.19) очевидно, что коэффициенты при старших степенях x и y при переносе начала координат не изменяются. Последние шесть членов выражения (9.19) перегруппируем следующим образом:

$$\begin{gathered} x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y_0(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) + \\ + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = \tilde{a}_{33} \end{gathered} \tag{9.21}$$

Содержимое круглых скобок в соответствии с (9.21) обращается в нуль, а три оставшиеся члена выражения позволяют найти новое значение свободного члена $\tilde{a}_{33}$ преобразованного уравнения кривой.

В итоге, уравнение (9.16) приобретает следующий вид:

$$a_{11}\tilde{x}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\cdot\tilde{y} + a_{22}\tilde{y}^2 + \tilde{a}_{33} = 0 \tag{9.22}$$

Кривая, описываемая этим уравнением симметрична относительно центра, так как выполняется условие

$$f(x, y) = f(-x, -y).$$

Очевидно, что центр симметрии кривой это точка $\tilde{O}(x_0, y_0)$.

Поворот системы координат вокруг центра симметрии кривой позволяет избавиться от перекрестного члена уравнения (9.22).

Подставив в уравнение (9.22) соотношения (9.18) и перегруппировав члены полученного выражения, из условия обращения в нуль коэффициента при перекрестном члене, получим следующее соотношение:

$$a_{12}\sin^2\varphi - (a_{22} - a_{11})\sin\varphi\cdot\cos\varphi - a_{12}\cos^2\varphi = 0\,.$$

Разделив его на $\cos^2\varphi$ получим квадратное уравнение для $\mathrm{tg}\varphi$:

$$a_{12}\cdot\mathrm{tg}^2\varphi - (a_{22} - a_{11})\mathrm{tg}\varphi - a_{12} = 0\,. \qquad (9.23)$$

Это уравнение имеет два решения: $\mathrm{tg}\varphi_1$ и $\mathrm{tg}\varphi_2$, причём $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$.

Существуют три инварианта для уравнения (9.16), значения которых не изменяются при преобразованиях декартовой системы координат.

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22} = a'_{11} + a'_{22}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a'_{11}a'_{22} \qquad (9.24)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & 0 \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\tilde{a}_{33}$$

$I_2 > 0$ для эллипса, $I_2 < 0$ для гиперболы, $I_2 = 0$ для параболы.

Используя инварианты, уравнение (9.22) можно записать так:

$$a_{11}\tilde{x}^2 + 2a_{12}\tilde{x}\cdot\tilde{y} + a_{22}\tilde{y}^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \qquad (9.25)$$

Решая примеры, убедимся, что использование инвариантов существенно упрощает приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

Пример 9.1.

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка:

$$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28\,.$$

В этом уравнении

$$a_{11}=8,\quad a_{12}=2,\quad a_{22}=5,\quad a_{13}=8,\quad a_{23}=2,\quad a_{33}=28\,.$$

Подставив значения коэффициентов в инвариант I_2, убедимся, что

$$I_2=\begin{vmatrix}8 & 2\\ 2 & 5\end{vmatrix}=36>0\,,$$

то есть мы имеем дело с эллипсом.

Подставив значения коэффициентов в уравнения (9.20), и решив систему

$$\begin{cases}8x+2y+8=0\\ 2x+5y+2=0\end{cases},$$

найдем координаты центра симметрии эллипса

$$x_0=-1,\quad y_0=0\,.$$

Подставив эти числа в уравнения (9.21), найдем новое значение свободного члена

$$\tilde{a}_{33}=8\cdot(-1)+2\cdot 0-28=-36\,.$$

После переноса начала координат в центр симметрии эллипса его уравнение приобретает следующий вид:

$$8\cdot\tilde{x}^2+4\cdot\tilde{x}\cdot\tilde{y}+5\cdot\tilde{y}^2-36=0 \qquad (9.26)$$

Перекрестный член в этом уравнении уничтожается за счет поворота осей координат. Тангенс угла поворота определяем из уравнения (9.23):

$$2\cdot tg^2\varphi-(5-8)\cdot tg\varphi-2=0,\quad tg^2\varphi-\frac{3}{2}tg\varphi-1=0,$$

$$tg\varphi=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9+16}{16}},\quad tg\varphi=\frac{3}{4}\pm\frac{5}{4},\quad tg\varphi_1=2,\quad tg\varphi_2=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \sin\varphi=\frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}=\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Коэффициенты a'_{11} и a'_{22} найдем, используя инварианты:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} = 8 + 5 = 13, \Rightarrow a'_{22} = 13 - a'_{11},$$

$$I_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 36 = a'_{11}(13 - a'_{11}), \Rightarrow a'^2_{11} - 13a'_{11} + 36 = 0,$$

$$a_{11} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169 - 144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}, \Rightarrow a'_{11} = 9, \quad a'_{22} = 13 - 9 = 4.$$

(Если $a_{11} = \frac{13}{2} - \frac{5}{2}$, то $\Rightarrow a_{11} = 4, \quad a_{22} = 13 - 4 = 9$.)

В итоге уравнение эллипса примет следующий вид:

$$9 \cdot x'^2 + 4 \cdot y'^2 = 36, \text{ или } \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1 \qquad (9.27)$$

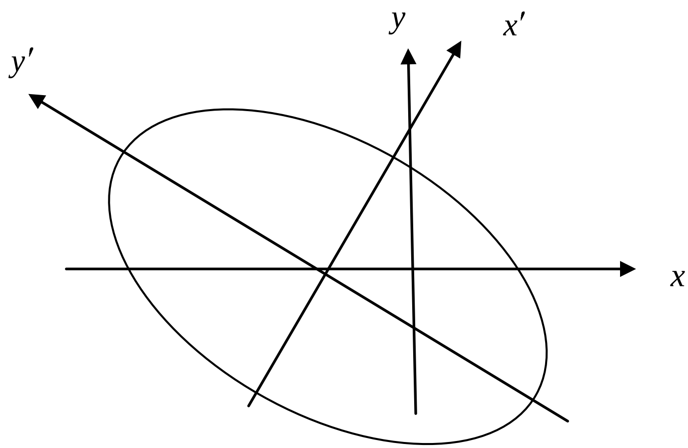

Рис. 9.5

Пример 9.2.

Привести к каноническому виду уравнение второго порядка:

$$4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2 - 2 \cdot x - 14 \cdot y + 7 = 0.$$

Значения коэффициентов уравнения:

$$a_{11} = 4, a_{12} = -2, a_{22} = 1, a_{13} = -1, a_{23} = -7, a_{33} = 7.$$

Подставив эти значения в инвариант I_2, убедимся, что

$$I_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

то есть мы имеем дело с параболой.

Преобразования начнем с поворота осей координат Тангенс угла поворота определяем из уравнения (9.23):

$$-2 \cdot tg^2\varphi - (-4) \cdot tg\varphi + 2 = 0, \quad tg^2\varphi - \frac{3}{2} tg\varphi - 1 = 0,$$

$$tg\varphi = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9+16}{16}}, \quad tg\varphi = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}, \quad tg\varphi_1 = 2, \quad tg\varphi_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(Последние формулы справедливы для $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

Подставим в уравнение

$$x = x' \cdot \cos\varphi - y' \cdot \sin\varphi = \frac{x' - 2 \cdot y'}{\sqrt{5}},$$

$$y = x' \cdot \sin\varphi + y' \cdot \cos\varphi = \frac{2 \cdot x' + y'}{\sqrt{5}}.$$

Получим:

$$\frac{4}{5}\left(x'^2 - 4x' \cdot y' + 4y'^2\right) - \frac{4}{5}\left(2x'^2 - 2y'^2 - 3x' \cdot y'\right) +$$

$$+ \frac{1}{5}\left(4x'^2 + 4x' \cdot y' + y'^2\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(x' - 2y'\right) - \frac{14}{\sqrt{5}}\left(2x' + y'\right) + 7 = 0.$$

Перегруппируем члены уравнения:

$$x'^2\left(\frac{4}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{5}\right) + x'y'\left(-\frac{16}{5} + \frac{12}{5} + \frac{4}{5}\right) + y'^2\left(\frac{16}{5} + \frac{8}{5} + \frac{1}{5}\right) +$$

$$+ x'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{28}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(\frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{14}{\sqrt{5}}\right) + 7 = 0.$$

После упрощений получим:

$$5y^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x' + 7 = 0, \quad 5\left[\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{5}\right] = 0,$$

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{6}{\sqrt{5}}\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

В итоге получено уравнение параболы, ось симметрии которой повернута на угол $\varphi = arctg2$, а вершина находится в точке $O\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А. Позняк Э. Г Аналитическая геометрия: М.: Физматлит, 2001, 2002
2. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии.-СПб: Мифрил, 2001
3. Бугров Я. С., Никольский С. М Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, Феникс, 1997

СОДЕРЖАНИЕ