

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ  
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**А.М. Кузьмин**

**Основы теории критичности, методы расчёта и  
возмущение реактивности реактора**

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика  
и технологии» в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 621.039  
ББК 31.46я7  
К 89

*Кузьмин А.М.* **Основы теории критичности, методы расчёта и возмущение реактивности реактора:** Учебное пособие. — М.: МИФИ, 2008 – 156 с.

Учебное пособие по дисциплине «Теория ядерных реакторов» состоит из введения, четырёх разделов и приложения. В них представлены основные выводы о развитии цепной реакции деления ядер, условия критичности реактора, методы расчёта плотности потока нейтронов в односкоростном и многогрупповом диффузионном приближении, соотношения теории возмущений для эффективного коэффициента размножения нейтронов и применения их для расчёта коэффициентов реактивности реактора. Включено описание одного из приближённых методов расчёта потока нейтронов – метода условного разделения переменных. Изложение основ теории сопровождается примерами решения условно-критических задач для простых моделей реактора. Каждому разделу предшествует краткое описание приближений, с учётом которых рассматривается распределение нейтронов.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов университета, обучающихся по специальности «Ядерные реакторы и ядерные энергетические установки». Оно может оказаться полезным также для магистров и поступающих в аспирантуру МИФИ по указанной специальности.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензенты: д-р. физ.-мат. наук В.В.Орлов  
д-р. физ.-мат. наук Н.В.Щукин

ISBN 978-5-7262-1091-9    Московский инженерно-физический институт (государственный университет), 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
Введение	5
Глава 1. Основные выводы о развитии цепной реакции деления	11
Глава 2. Условия критичности в односкоростном приближении	19
2.1. Реактор без отражателя	19
2.2. Задача о критичности многозонного реактора	25
2.3. Влияние отражателя на критические параметры реактора	30
2.4. Численный метод решения условно-критической задачи	37
2.5. Конечно-разностные уравнения двумерного реактора	44
Глава 3. Методы расчёта пространственно-энергетического распределения нейтронов	54
3.1. Реактор без отражателя в диффузионно-возрастном приближении	54
3.2. Многогрупповые уравнения и сечения реакций	64
3.3. Подготовка групповых микроскопических сечений	72
3.4. Спектр нейтронов в многогрупповом приближении	79
3.5. Двухгрупповой метод для многозонного реактора	82
3.6. Распределения нейтронов в реакторе с отражателем	86
3.7. Условно-критическая задача в $P_1$ - приближении	92
Глава 4. Теория возмущений для коэффициента размножения нейтронов	95
4.1. Основные соотношения теории возмущений	97
4.2. Итерационный метод решения сопряжённых уравнений	102
4.3. Сопряжённые уравнения для простых моделей реактора	103
4.4. Физический смысл сопряжённой функции	110
4.5. Применения соотношений теории возмущений	120
Список литературы	136
Приложения	138
Приложение 1. Метод условного разделения переменных	138
Приложение 2. Интегро-дифференциальное уравнение ценности нейтронов	148

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие подготовлено на основе лекций, которые автор в течение многих лет читает студентам МИФИ по дисциплине «Теория ядерных реакторов», и включает лишь вопросы, относящиеся к теории критичности и методам расчёта реакторов, состоящих из однородных зон. При этом автор не претендует на строгое обоснование теории, всесторонний обзор и рассмотрение методов расчёта. Это делается в специальных курсах, которые студентам МИФИ предлагаются на последнем году обучения. Необходимый для ознакомления с пособием уровень подготовки ограничивается знанием основ нейтронной физики, способов описания распределений нейтронов в неразмножающих средах и методов решения уравнений математической физики.

Вошедшие в пособие разделы теории реакторов более или менее подробно изложены в известных монографиях [1]–[5] и конспекте лекций профессора В.В.Орлова [6]–[8]. К сожалению, эта литература давно не переиздавалась (более 20-ти лет) и в настоящее время практически отсутствует в библиотеках. Это обстоятельство послужило главной причиной написания предлагаемого пособия. Другая причина связана с желанием изложить те математические преобразования, которые, с одной стороны, необходимы для получения критических параметров реактора, а с другой стороны, часто не удаётся выполнить на лекциях из-за недостатка времени. Надеюсь, что такое пособие поможет студентам самостоятельно решать задачи по статике неоднородного реактора [13], которые рекомендуются для успешного освоения теории реакторов.

В отличие от конспекта лекций [6] в пособии больше внимания уделяется численным методам расчёта распределений нейтронов, получивших в последнее время широкое распространение. Вместе с тем рассматриваются также аналитические методы решения условно-критических задач. Владение такими методами позволяет не только быстро получить решение задачи для простых моделей реактора. Важно, что с помощью аналитических выражений

удаётся сделать выводы для большой группы задач, лучше понять физику протекающих в реакторах процессов и объяснить результаты, получаемые численными методами.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю перспективных разработок НИКИЭТ, профессору В.В.Орлову и профессору МИФИ Н.В.Щукину, которые прочитали рукопись пособия и высказали полезные замечания. Эти замечания были учтены при подготовке пособия к печати.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория критичности рассматривается для реакторов, состоящих из одной или нескольких зон разного состава, свойства которых со временем не меняются. Реактор имеет выпуклую внешнюю границу с вакуумом и достаточно большие размеры, поглощение нейтронов не велико. В этом случае угловое распределение нейтронов не должно сильно отличаться от сферически симметричного, и поток нейтронов можно получить, решая уравнение переноса нейтронов в  $P_1$ -приближении [1].

При нахождении распределения нейтронов ограничимся рассмотрением основных для реакторных задач процессов взаимодействия нейтронов с ядрами: радиационным захватом, делением ядер, упругим и неупругим рассеянием. В дальнейшем принимается, что распределение нейтронов деления сферически симметрично в лабораторной системе координат, одинаково для всех делящихся ядер и не зависит от энергии нейтрона, вызывающего деление. Кроме того, не учитываются различия между мгновенными и запаздывающими нейтронами, поскольку в основном исследуются условия существования в реакторе стационарного нейтронного поля.

В  $P_1$ -приближении поток нейтронов  $\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ , зависящий в общем случае в момент времени  $t$  от пространственных (координат вектора  $\vec{r}$ ), энергетической  $E$  и угловых (описывающих направление полёта  $\vec{\Omega}$ ) переменных, представляется двумя первыми членами разложения в ряд по сферическим функциям  $Y_n(\vec{\Omega})$ :

$$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \frac{1}{4\pi} \left[ \phi(\vec{r}, E, t) + 3\vec{\Omega} \vec{J}(\vec{r}, E, t) \right], \quad (\text{B.1})$$

где коэффициенты разложения  $\phi(\vec{r}, E, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{r}, T, t)$  имеют смысл проинтегрированных по телесному углу потока и тока нейтронов, соответственно. Для размножающей среды с внешним изотропным

источником мощностью  $\frac{1}{4\pi} q(\vec{r}, E, t)$  они находятся из следующих уравнений (для сокращения записи совокупности аргументов  $\vec{r}, E$  или  $\vec{r}, E'$  обозначаются в дальнейшем через  $x$  или  $x'$ , соответственно):

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = -\text{div} \vec{J}(x, t) - \Sigma_t(E) \phi(x, t) + \int_{E'} \Sigma_{s,0}(E', E) \phi(x', t) dE' + \chi(E) \int_{E'} \nu_f \Sigma_f(E') \phi(x', t) dE' + q(x, t), \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \vec{J}(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{3} \text{grad} \phi(x, t) - \Sigma_t(E) \vec{J}(x, t) + \int_{E'} \Sigma_{s,1}(E', E) \vec{J}(x', t) dE'. \quad (\text{B.3})$$

Здесь  $\nu = \nu(E)$  – скорость нейтронов,  $\chi(E)$  – спектр нейтронов деления,

$$\Sigma_t(E) = \Sigma_c(E) + \Sigma_f(E) + \Sigma_s(E), \quad \Sigma_s(E) = \Sigma_{es}(E) + \Sigma_{in}(E),$$

$\Sigma_c(E)$ ,  $\Sigma_f(E)$ ,  $\Sigma_{es}(E)$ ,  $\Sigma_{in}(E)$  – макроскопические сечения радиационного захвата, деления, упругого и неупругого рассеяния, соответственно, а сечения  $\Sigma_{s,0}(E', E)$  и  $\Sigma_{s,1}(E', E)$  совпадают с первыми 2-мя коэффициентами разложения дифференциального сечения рассеяния  $\Sigma_s(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega})$  в ряд по полиномам Лежандра.

Макроскопические сечения  $\Sigma_p(E)$  процессов  $p = c, s, f, es, in$  и дифференциальные сечения  $\Sigma_p(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega})$  процессов  $p = es, in$  однозначно связаны с концентрациями  $\rho_l(\vec{r})$  ядер сорта  $l$ , соответствующими микроскопическими сечениями  $\sigma_{p,l}(E)$  и

вероятностями упругого  $W_{es,l}(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega})$  и неупругого  $W_{in,l}(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega})$  рассеяния:

$$\Sigma_p(E) = \sum_l \sigma_{p,l}(E) \rho_l(\vec{r}), \quad p = c, s, f, es, in, \quad (B.4)$$

$$v_f \Sigma_f(E) = \sum_l v_{f,l}(E) \sigma_{f,l}(E) \rho_l(\vec{r}), \text{ а для } p = es, in :$$

$$\Sigma_p(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) = \sum_l \sigma_{p,l}(E') W_{p,l}(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) \rho_l(\vec{r}).$$

Если считать (как это делается во многих задачах), что упругое рассеяние сферически симметрично в системе центра инерции, а неупругое рассеяние – в лабораторной системе, то:

$$W_{es,l}(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) = W_{es,l}(E' \rightarrow E, \mu_0),$$

$$W_{in,l}(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} W_{in,l}(E' \rightarrow E),$$

$$\Sigma_{s,0}(E', E) = \Sigma_s(E') W_s(E' \rightarrow E),$$

$$\Sigma_{s,1}(E', E) = \Sigma_s(E') W_{s,1}(E' \rightarrow E), \quad (B.5)$$

где  $\mu_0$  – косинус угла рассеяния, а через  $W_s(E' \rightarrow E)$ ,  $W_{s,1}(E' \rightarrow E)$  обозначены средние по всем ядрам вероятности рассеяния. Учитывая принятые законы рассеяния, их

можно представить в виде  $\mu_0 = \frac{A_l + 1}{2} \sqrt{\frac{E}{E'}} - \frac{A_l - 1}{2} \sqrt{\frac{E'}{E}}$ ,

$$W_s(E' \rightarrow E) = \frac{1}{\Sigma_s(E')} \sum_l \left[ \sigma_{es,l}(E') W_{s,0,l}(E' \rightarrow E) + \sigma_{in,l}(E') W_{in,l}(E' \rightarrow E) \right] \rho_l(\vec{r}),$$

$$W_{s,1}(E' \rightarrow E) = \frac{1}{\Sigma_s(E')} \sum_l \sigma_{es,l}(E') W_{s,1,l}(E' \rightarrow E) \rho_l(\vec{r}),$$

где  $W_{s,0,l}(E' \rightarrow E) = 2\pi \int_{-1}^{+1} W_{es,l}(E' \rightarrow E, \mu_0) d\mu_0$ ,

$$W_{s1,l}(E' \rightarrow E) = 2\pi \int_{-1}^{+1} W_{es,l}(E' \rightarrow E, \mu_0) \mu_0 d\mu_0 .$$

В дальнейшем наряду с  $P_1$ -приближением рассматривается диффузионное приближение, к которому приходят, вводя дополнительно два допущения. Во-первых, учитывается, что при слабом отклонении углового распределения нейтронов от сферически симметричного распределения среднее по всем направлениям  $\bar{\Omega}$  значение  $\langle \bar{\Omega}\varphi \rangle$  гораздо меньше, чем  $\langle \varphi \rangle$ . Поэтому ожидается, что ток нейтронов  $\vec{J} = \int_{\Omega} \bar{\Omega}\varphi d\Omega$  будет мал, а его изменением за время  $(\Sigma_t \nu)^{-1}$  можно пренебречь. Тогда в уравнении (В.3) принимают:

$$\frac{1}{\nu(E)} \frac{\partial \vec{J}(\vec{r}, E, t)}{\partial t} = 0 . \quad (\text{В.6})$$

Во-вторых, предполагается, что значения  $E'$  и  $E$  в интеграле уравнения (В.3) мало различаются, а сечение  $\Sigma_{s,1}(E', E)$  слабо меняется в зависимости от  $E'$ . Тогда величина этого интеграла, совпадающая с вкладом от замедления нейтронов с энергией  $E' > E$ , не должна сильно отличаться от того значения, что даёт замедление нейтронов с энергией  $E$  до более низких значений. Поэтому можно считать, что:

$$\begin{aligned} \int_{E'} \Sigma_{s,1}(E' \rightarrow E) \vec{J}(\vec{r}, E', t) dE' &\approx \int_{E'} \Sigma_{s,1}(E \rightarrow E') \vec{J}(\vec{r}, E, t) dE' = \\ &= \bar{\mu}(E) \Sigma_{es}(E) \vec{J}(\vec{r}, E, t) , \end{aligned} \quad (\text{В.7})$$

где  $\bar{\mu}_0(E)$  – средний косинус угла рассеяния, определяемый равенством

$$\bar{\mu}_0(E) = \frac{1}{\Sigma_{es}(E)} \sum_l \sigma_{es,l}(E) \int_{E'} W_{s1,l}(E \rightarrow E') dE' \rho_l(\vec{r}) .$$

В результате уравнение (В.3) превращается в равенство:

$$\vec{J}(\vec{r}, E, t) = -D(E) \text{grad} \phi(\vec{r}, E, t) , \quad (\text{В.8})$$

если коэффициент  $D(E)$ , называемый коэффициентом диффузии, представить в виде:

$$D(E) = (3\Sigma_{tr}(E))^{-1}, \quad \Sigma_{tr}(E) = \Sigma_t(E) - \bar{\mu}_0(E)\Sigma_{es}(E). \quad (\text{B.9})$$

Как известно, в таком виде записывается закон Фика, используемый при получении уравнения для потока нейтронов в диффузионном приближении. При этом для сечения  $\Sigma_{tr}(E)$ , получившего название транспортного сечения, будем иметь равенство вида (B.4), если для каждого ядра сорта  $l$  ввести в рассмотрение транспортное микроскопическое сечение:

$$\sigma_{tr,l}(E) = \sigma_{t,l}(E) - \mu_l(E)\sigma_{es,l}(E), \quad (\text{B.10})$$

где  $\mu_l(E) = \int_{E'} W_{s1,l}(E \rightarrow E') dE'$  – среднее значение косинуса угла рассеяния нейтронов на  $l$ -м ядре.

Отметим, что предположение (B.6) хорошо выполняется во всех реакторных задачах (за исключением областей вблизи границы с вакуумом, где несправедливо, вообще говоря, и разложение (B.1)). Поэтому обычно при рассмотрении  $P_1$ -приближения исключают

производную  $\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$  в уравнении (B.3). Что касается допущения (B.7), то оно не выполняется, если в реакторе присутствуют лёгкие ядра замедлителя (прежде всего, ядра водорода), при упругих столкновениях с которыми может сильно уменьшиться энергия нейтронов. В этом случае следует отказаться от равенства (8) и использовать более точное соотношение:

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi(\vec{r}, E, t) + 3\Sigma_t(E)\vec{J}(\vec{r}, E, t) = \\ = 3\int_{E'} \Sigma_s(E')W_{s,1}(E' \rightarrow E)\vec{J}(\vec{r}, E', t) dE'. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Очевидно, в односкоростном приближении оно преобразуется к виду (B.8).

Выше отмечалось, что  $P_1$ -приближение не справедливо вблизи границы с вакуумом. Чтобы уменьшить связанную с этим погрешность расчёта, граничное условие при решении уравнений (B.2), (B.8) или (B.11) формулируют в виде равенства нулю потока нейтронов на так называемой экстраполированной границе реактора.

Под экстраполированной границей подразумевают такую эквидистантно удалённую от внешней границы  $S$  реактора поверхность  $S_s$  с точками  $\vec{r}_s = \vec{r}_s + d \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали,  $\vec{r}_s$  – одна из точек внешней поверхности  $S$ ,  $d$  – длина линейной экстраполяции), что при линейной аппроксимации потока нейтронов в вакууме решение уравнения диффузии в реакторе вдали от границы  $S$  будет мало отличаться от точного решения [2]. При этом величина  $d$  меняется с изменением кривизны поверхности в пределах:  $0,71\lambda_{tr} \leq d \leq \frac{4}{3}\lambda_{tr}$ , где

$\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_{tr}}$  – усреднённая по энергиям нейтронов транспортная длина (значение  $0,71\lambda_{tr}$  соответствует плоской границе с вакуумом).

Таким образом, решение уравнения переноса нейтронов, сформулированного в диффузионном или  $P_1$ -приближении, будем искать среди функций, удовлетворяющих известному начальному условию и требованиям:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, E, t) \text{ и } (\vec{J}, \vec{n}) - \text{непрерывны } \vec{r} \in V, \quad 0 \leq E \leq E_0; \\ \phi(\vec{r}_s, E, t) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

$\phi(\vec{r}, E, t)$  – положительные и ограниченные внутри объёма  $V$  функции.

В дальнейшем множество функций, для которых выполнены условия (B.12), будем обозначать через  $\Omega$ , а принадлежность функций этому множеству – символами:  $\phi \in \Omega$ .

## Глава 1. ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ О РАЗВИТИИ ЦЕПНОЙ РЕАКЦИИ ДЕЛЕНИЯ

Одной из главных в теории критичности реакторов является задача, связанная с обоснованием самоподдерживающейся цепной реакции деления ядер. В общем случае она будет рассмотрена в других разделах. Пока ограничимся решением этой задачи для реактора без отражателя (т.е. состоящего из одной однородной по составу активной зоны), распределение нейтронов в котором находится в односкоростном (или однопрупповом) диффузионном приближении. В этом приближении принимается, что все нейтроны имеют одну и ту же скорость, а микроскопические сечения взаимодействий не зависят от энергии  $E$ .

Пусть цепная реакция деления возбуждается в момент времени  $t=0$  внешним импульсным источником, создающим в этот момент в реакторе некоторое распределение плотности нейтронов  $q(\vec{r})$ . В рассматриваемой модели реактора нестационарное уравнение (В.2) для потока нейтронов  $\phi(\vec{r}, t)$  (с учётом соотношения (В.8)) приводится к виду (для  $t>0$ ):

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \Delta \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + \nu_f \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

$$\phi(\vec{r}, t) \in \Omega, \quad \phi(\vec{r}, 0) = \nu q(\vec{r}),$$

где параметры  $\nu$ ,  $D$ ,  $\Sigma_a = \Sigma_c + \Sigma_f$  и  $\nu_f$  заданы и не зависят от времени  $t$ . Здесь учтено, что  $\text{div}(D \text{grad} \phi) = D \Delta \phi$ , поскольку  $D = \text{const}$ .

Решение задачи (1.1) получим, опираясь на представление о развивающейся во времени цепной реакции деления как последовательной смены нейтронов разных поколений. В этом случае считаем, что нейтроны  $n$ -го поколения появляются за счёт деления ядер среды нейтронами предыдущего поколения, а нейтроны нулевого поколения – за счёт внешнего источника. Тогда:

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{(n)}(\vec{r}, t), \quad (1.2)$$

где  $\phi^{(n)}(\vec{r}, t)$  – потоки нейтронов  $n$ -го поколения, получаемые в результате последовательного решения уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi^{(0)}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= D\Delta \phi^{(0)}(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi^{(0)}(\vec{r}, t), \quad \phi^{(0)}(\vec{r}, 0) = \nu q(\vec{r}), \\ \frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi^{(n)}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= D\Delta \phi^{(n)}(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi^{(n)}(\vec{r}, t) + \nu_f \Sigma_f \phi^{(n-1)}(\vec{r}, t), \\ \phi^{(n)}(\vec{r}, 0) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.3)$$

при условиях:  $\phi^{(n)}(\vec{r}, t) \in \Omega$ ,  $\phi^{(n)}(\vec{r}, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Интегрируя уравнения (1.3) по времени  $t$  в пределах  $0 \leq t < \infty$ , получим уравнения сменяющихся поколений нейтронов:

$$\begin{aligned} D\Delta \phi^{(0)}(\vec{r}) - \Sigma_a \phi^{(0)}(\vec{r}) + q(\vec{r}) &= 0, \quad \phi^{(0)}(\vec{r}) \in \Omega, \\ D\Delta \phi^{(n)}(\vec{r}) - \Sigma_a \phi^{(n)}(\vec{r}) + \nu_f \Sigma_f \phi^{(n-1)}(\vec{r}) &= 0, \\ \phi^{(n)}(\vec{r}) &\in \Omega, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

в которых  $\phi^{(n)}(\vec{r}) = \int_0^\infty \phi^{(n)}(\vec{r}, t) dt$ .

Решения уравнений (1.4) будем искать в виде разложений

$$\phi^{(n)}(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(n)} \psi_m(\vec{r}) \quad (1.5)$$

по собственным функциям  $\psi_m(\vec{r})$  задачи

$$\Delta \psi_m(\vec{r}) + \alpha_m^2 \psi_m(\vec{r}) = 0, \quad \psi_m(\vec{r}) \in \Omega, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Известны следующие свойства собственных чисел и функций этой задачи:

- собственные числа  $\alpha_m^2$  вещественны; если их пронумеровать в порядке возрастания, то:  $0 < \alpha_0^2 < \alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots$ ; (1.7)

- система собственных функций  $\psi_m(\vec{r})$  полна, ортогональна и линейно-независима; функции  $\psi_m(\vec{r})$  всегда можно выбрать вещественными и ортонормальными:

$$\int_V \psi_k \psi_m d\vec{r} = 0, \quad k \neq m; \quad \int_V \psi_m^2 d\vec{r} = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.8)$$

- наименьшему собственному числу  $\alpha_0^2$  соответствует единственная функция  $\psi_0(\vec{r})$ , которая нигде внутри объёма  $V$  нуль не обращается, её всегда можно считать неотрицательной при значениях  $\vec{r} \in V$ ; остальные собственные функции  $\psi_m(\vec{r})$  таким свойством не обладают и являются знакопеременными в рассматриваемом объёме.

Отметим также, что значение  $\alpha_0^2$  целиком определяется геометрической формой и размерами реактора.

Подстановка разложений (1.5) в уравнения (1.4) и использование свойств (1.8) собственных функций  $\psi_m(\vec{r})$  даёт следующие соотношения для коэффициентов  $C_m^{(n)}$ :

$$C_m^{(n)} = k_m C_m^{(n-1)}, \quad C_m^{(n)} = k_m^n C_m^{(0)}, \quad C_m^{(0)} = \frac{\int_V q(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r}}{\Sigma_a + \alpha_m^2 D}, \quad \text{где}$$

$$k_m = \frac{\nu_f \Sigma_f}{\Sigma_a + \alpha_m^2 D}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad k_0 > k_1 \geq k_2 \geq \dots \quad (1.9)$$

В результате равенство (1.5) приводится к виду (при  $\vec{r} \neq \vec{r}_s$ ):

$$\phi^{(n)}(\vec{r}) = C_0^{(0)} k_0^n \psi_0(\vec{r}) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^{(0)} \psi_m(\vec{r})}{C_0^{(0)} \psi_0(r)} \left( \frac{k_m}{k_0} \right)^n. \quad (1.10)$$

Из анализа выражения (1.10) следует, что для достаточно больших значений  $n$  (таких, что  $n > N$ , а  $N$  удовлетворяет неравенству  $\left( \frac{k_1}{k_0} \right)^N \ll 1$ ):

- вкладом в значение  $\phi^{(n)}(\vec{r})$  от всех слагаемых, кроме первого, можно пренебречь и считать, что при  $n > N$ :  $\phi^{(n)}(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$ ,  
 $\phi(\vec{r}) = C_0 \psi_0(\vec{r})$ ,  $C_0 = C_0^{(0)} k_0^n$ ; (1.11)

-при  $n > N$  отношение потоков

$$\frac{\phi^{(n)}(\vec{r})}{\phi^{(n-1)}(\vec{r})} = k_0. \quad (1.12)$$

Напомним, что в физике реакторов отношение (1.12), принимающее после смены большого числа поколений нейтронов постоянное значение, называют эффективным коэффициентом размножения нейтронов и обозначают как  $K_{эф}$ . При этом распределение  $\phi(\vec{r})$ , определяемое равенством (1.11), называют асимптотическим потоком нейтронов.

Делая в уравнениях (1.4) замену  $\phi^{(n-1)} = \frac{1}{K_{эф}} \phi^{(n)}$  и учитывая равенства (1.11), для потока  $\phi(\vec{r})$  получим уравнение:

$$D \Delta \phi(\vec{r}) - \Sigma_a \phi(\vec{r}) + \frac{1}{K_{эф}} \nu_f \Sigma_f \phi(\vec{r}) = 0, \quad \phi(\vec{r}) \in \Omega. \quad (1.13)$$

Пропорциональность интегральных потоков функции  $\psi_0(\vec{r})$  имеет место, когда

$$\phi^{(n)}(\vec{r}, t) = T_n(t) \psi_0(\vec{r}), \quad (1.14)$$

причём, функции  $T_n(t)$  удовлетворяют условиям:

$$T_n(0) = 0, \quad T_n(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad n > N.$$

Приближённые зависимости их от времени  $t$  приведены на рис.1.1.

Среднее время жизни  $t_n$  каждого поколения нейтронов конечно  $\left( t_n \sim \frac{1}{\nu \Sigma_a} \right)$  и по прошествии достаточно большого времени

$\tilde{t}_0 = \sum_{n=0}^N t_n$  в сумму (1.2) основной вклад будет вносить

определённое число слагаемых с номерами  $n \in \delta N_t$ . Поскольку каждое из них имеет вид (1.14), то зависимость асимптотического потока нейтронов от времени выглядит следующим образом:  $\phi(\vec{r}, t) = T(t) \psi_0(\vec{r})$ ,  $t > \tilde{t}_0$ . Подставляя это выражение в нестационарное уравнение (1.1) и учитывая равенство (1.6) для функции  $\psi_0(\vec{r})$ , получим:

$$\phi(r, t) = C \exp(t/\tau_0) \psi_0(\vec{r}), \quad t > \tilde{t}_0, \quad (1.15)$$

где  $C$  – постоянный множитель, а  $T_0$  определяется соотношениями:

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{K_{эф} - 1}{\mathcal{G}}, \quad \mathcal{G} = \frac{1}{\nu(\Sigma_a + \alpha_0^2 D)}. \quad (1.16)$$

В этих равенствах параметр  $\mathcal{G}$  имеет смысл времени жизни нейтронов, разность  $1 - 1/K_{эф}$  называют реактивностью, а параметр  $\tau_0$  – асимптотическим периодом реактора.

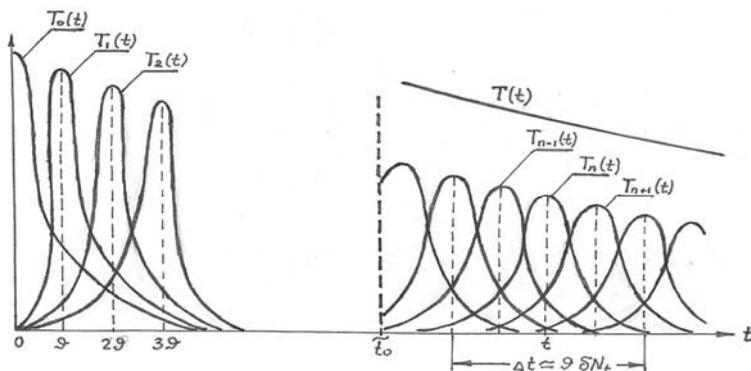


Рис.1.1. Зависимости функций  $T_n(t)$ ,  $T(t)$  от времени  $t$

На основе вышесказанного сделаем следующие выводы :

1. По прошествии достаточно большого времени (или смены большого числа поколений) после момента возбуждения цепной реакции деления и независимо от вида источника  $q(\vec{r})$  в реакторе устанавливается асимптотическое пространственное распределение нейтронов  $\phi(\vec{r})$ , пропорциональное основной гармонике  $\psi_0(\vec{r})$  уравнения (1.6). Амплитуда этого распределения в критическом реакторе (с  $K_{эф} = 1$ ) со временем не меняется и цепная реакция деления ядер является самоподдерживающейся. В некритическом реакторе амплитуда со временем возрастает (при  $K_{эф} > 1$ ) или уменьшается (если  $K_{эф} < 1$ ) по экспоненциальному закону  $\exp(t/T_0)$  (либо по закону

$K_{\text{эф}}^n$ , если цепной процесс деления рассматривается как смена поколений нейтронов).

2. Асимптотическое распределение потока нейтронов  $\phi(\vec{r})$ , определённое с точностью до постоянного множителя  $C$ , и эффективный коэффициент размножения нейтронов  $K_{\text{эф}}$  можно получить, решая стационарное уравнение (1.13), представляющее собой уравнение баланса нейтронов в условно-критическом реакторе. Такой реактор отличается от реально существующего реактора лишь тем, что в нём вместо значения  $\nu_f$  берётся  $\tilde{\nu}_f = \frac{1}{K_{\text{эф}}} \nu_f$ . Если  $K_{\text{эф}} = 1$ , то уравнение (1.13) совпадает с уравнением баланса нейтронов в критическом реакторе, а функция  $\phi(\vec{r})$  даёт в относительных единицах распределение потока нейтронов в критическом реакторе.
3. С формальной точки зрения получение  $K_{\text{эф}}$  и асимптотического потока  $\phi(\vec{r})$  можно рассматривать как частный случай более общей задачи на собственные числа  $k_m$  и соответствующие собственные функции  $\psi_m(\vec{r})$ :

$$D \Delta \psi_m(\vec{r}) - \Sigma_a \psi_m(\vec{r}) + \frac{1}{k_m} \nu_f \Sigma_f \psi_m(\vec{r}) = 0 ,$$

$$\psi_m(\vec{r}) \in \Omega, \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.17)$$

При этом не надо искать все собственные числа и собственные функции. Достаточно ограничиться нахождением функции  $\psi_0(\vec{r})$ , соответствующей самому большому по величине собственному числу  $k_0 = K_{\text{эф}}$ . В общем случае для этого следует воспользоваться процедурой решения уравнений сменяющихся поколений (1.4), получившей название метода итераций источников деления (в котором номер поколения  $n$  совпадает с номером итераций). В этом методе в качестве начального источника  $q(\vec{r})$  можно взять любую неотрицательную функцию, а

итерации прекратить при таком  $n$ , когда  $|K^{(n)} - K^{(n-1)}| \leq \varepsilon$ ,  
где  $\varepsilon$  – заданная погрешность расчёта  $K_{эф}$ , а  
 $K^{(n)} = \phi^{(n)} / \phi^{(n-1)}$ .

В теории реакторов доказано [3], что сделанные выше выводы сохраняют силу в самом общем случае и не зависят от того, в каком приближении записано уравнение переноса нейтронов. Например, если рассматривают диффузионное приближение с непрерывной зависимостью сечений от энергии  $E$ , то асимптотический поток нейтронов  $\phi(\vec{r}, E)$  находят, решая вместо (1.13) уравнения:

$$\begin{aligned}
& -\operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, E) - \Sigma_t(E) \phi(\vec{r}, E) + \int_{E'} \Sigma_s(E') W_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E') dE' + \\
& + \frac{1}{K_{эф}} \chi(E) \int_{E'} \nu_f \Sigma_f(E') \phi(\vec{r}, E') dE' = 0, \quad (1.18) \\
& \vec{J}(\vec{r}, E) = -D(E) \operatorname{grad} \phi(\vec{r}, E)
\end{aligned}$$

при условиях (B.12).

Установлено, что это всегда можно сделать, используя метод итераций источников (т.е. решая уравнения вида (1.4), записанные в том же приближении). Получаемое при этом распределение  $\phi(\vec{r}, E)$  пропорционально собственной функции  $\psi_0(\vec{r}, E)$ , соответствующей ведущему собственному числу  $k_0 = K_{эф}$ :

$$\phi(\vec{r}, E) = C \psi_0(\vec{r}, E). \quad (1.19)$$

Причём, число  $k_0$  является действительным, положительным и превышает действительные части остальных собственных чисел (которые могут быть комплексными). Ему соответствует единственная собственная функция  $\psi_0(\vec{r}, E)$ , обращающаяся в нуль лишь на экстраполированной границе.

При этом задача о критичности реактора рассматривается в одной из двух постановок:

- в уравнениях вида (1.18) принимают максимальное собственное число  $K_{эф} = 1$  и находят распределение потока нейтронов (как соответствующую этому числу

- собственную функцию) и вполне определённое соотношение между параметрами критического реактора;
- при заданных свойствах реактора (макроскопических сечениях и размерах зон) находят  $K_{эф}$ , как максимальное собственное число задачи (1.18), и соответствующую ему собственную функцию, описывающую распределение нейтронов в условно-критическом реакторе.

В заключение отметим, что на основе уравнения переноса нейтронов, записанного для условно-критического реактора, можно получить иные, чем при рассмотрении последовательных поколений нейтронов, определения  $K_{эф}$ . В частности, интегрируя уравнение (1.18) по объёму  $V$  реактора и всем энергиям  $E$ , получим:

$$K_{эф} = \frac{R_f}{R_a + R_J}, \quad (1.20)$$

где  $R_f = \int \int_V \nu_f \Sigma_f(E) \phi(\vec{r}, E) dE dV$  – скорость генерации нейтронов,  $R_a = \int \int_V \Sigma_a(E) \phi(\vec{r}, E) dE dV$  – скорость поглощения нейтронов,  $R_J = \oint \int_S (\vec{J}(\vec{r}_s, E), \vec{n}) dE dS$  – скорость утечки нейтронов через внешнюю границу  $S$  объёма  $V$  ( $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали),  $\int \chi(E) dE = 1$ , выполнены условия (B.12) и  $\int_V \text{div} \vec{J}(\vec{r}, E) dV = \oint_S (\vec{J}(\vec{r}_s, E), \vec{n}) dS$ . В свою очередь, выражение (1.20) нетрудно преобразовать к виду:

$$K_{эф} = K_\infty P_J, \quad (1.21)$$

если считать, что:  $K_\infty = \frac{R_f}{R_a}$ ,  $P_J = 1 - \frac{R_J}{R_a + R_J}$ .

## Глава 2. УСЛОВИЯ КРИТИЧНОСТИ В ОДНОСКОРОСТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В односкоростном (однотемпературном) диффузионном приближении принимается, что вероятности взаимодействий не зависят от энергии и все нейтроны имеют одну и ту же скорость. Это приближение привлекает простотой описания распределения нейтронов и позволяет в одномерных геометриях реактора получить аналитическое решение задачи о критичности. Во многих случаях оно даёт качественно правильные результаты, а в некоторых (например, для больших тепловых реакторов с малым временем замедления нейтронов) – достаточно хорошие количественные оценки эффективного коэффициента размножения нейтронов.

### 2.1. Реактор без отражателя, геометрические параметры

Пусть реактор состоит из одной однородной по составу (гомогенной) активной зоны, ограниченной выпуклой поверхностью. На примере такого реактора в разделе 1 сделаны общие выводы о развитии цепной реакции деления. Остановимся на формулировке условия критичности и расчёте входящих в это условие параметров.

Приведём уравнение (1.13) для асимптотического потока нейтронов  $\phi(\vec{r})$  к виду:

$$\Delta \phi(\vec{r}) + \omega \phi(\vec{r}) = 0, \quad \phi(\vec{r}) \in \Omega, \quad (2.1)$$

где  $\omega = \left( \frac{K_\infty}{K_{\phi}} - 1 \right) \frac{1}{L^2}$ ,  $K_\infty = \frac{\nu_f \Sigma_f}{\Sigma_a}$ ,  $L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$  - квадрат

длины диффузии нейтронов, а  $\omega$  – не зависящий от переменных  $\vec{r}$  параметр. Воспользовавшись сделанными ранее выводами, получим:  $\phi(\vec{r}) = C \psi_0(\vec{r})$ , если  $\psi_0(\vec{r})$  – собственная функция, соответствующая наименьшему собственному числу  $\alpha_0^2$  задачи (1.6). Сравнивая уравнение (2.1) с уравнением (1.6) для функции  $\psi_0(\vec{r})$ , убеждаемся, что должно выполняться равенство

$$\omega = \alpha_0^2, \quad (2.2)$$

которое можно рассматривать как иную форму записи соотношения (1.9) при  $m = 0$  (условия критичности).

В критическом реакторе  $K_{эф} = 1$ , параметр  $\omega = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$  зависит лишь от материальных свойств активной зоны (микроскопических сечений и концентраций ядер) и его называют материальным параметром. Наименьшее собственное число  $\alpha_0^2$  задачи (1.6) как зависящее лишь от геометрии и размеров активной зоны – геометрическим параметром. В силу этого условие критичности реактора без отражателя формулируют в виде равенства материального и геометрического параметра (2.2).

В реакторе с заданными размерами и свойствами активной зоны условие (2.2) позволяет найти эффективный коэффициент размножения и записать его в виде:

$$K_{эф} = K_\infty P_J, \quad P_J = \frac{1}{1 + \alpha_0^2 L^2}. \quad (2.3)$$

Здесь  $K_\infty$  имеет смысл коэффициента размножения бесконечной среды, а  $P_J$  – вероятности нейтронам избежать утечки из реактора.

Чтобы в этом убедиться, определим вероятность утечки  $G_J$ , которая (при большой частоте рассматриваемого события) совпадает с отношением:

$$G_J = \frac{\oint_S (\vec{J}(\vec{r}_s), \vec{n}) dS}{\int_V \tilde{\nu}_f \Sigma_f \phi(\vec{r}) dV}, \quad (2.4)$$

где  $\vec{J}(\vec{r}_s)$  – ток нейтронов на поверхности  $S$ , окружающей объём  $V$  и имеющей внешнюю нормаль  $\vec{n}$ . Воспользовавшись соотношением (B.8) для тока нейтронов, равенством  $\oint_S (grad \phi, \vec{n}) dS = \int_V \Delta \phi dV$  и условием баланса нейтронов в реакторе, получим:

$$G_J = \frac{-D \int_V \Delta \phi(\vec{r}) dV}{\Sigma_a \int_V \phi(\vec{r}) dV - D \int_V \Delta \phi(\vec{r}) dV}.$$

Поскольку  $\phi(\vec{r}) = C \psi_0(\vec{r})$ , а  $\psi_0(\vec{r})$  – собственная функция задачи (1.6), соответствующая числу  $\alpha_0^2$ , то для вероятности (2.4) будем иметь:

$$G_J = \frac{\alpha_0^2 L^2}{1 + \alpha_0^2 L^2}, \text{ а для вероятности } P_J = 1 - G_J - \text{выражение (2.3).}$$

Использование в расчётах формул (2.2) и (2.3) предполагает получение геометрического параметра. Для этого необходимо найти решение задачи (1.6), отвечающее наименьшему собственному числу  $\alpha_0^2$ . Рассмотрим, как это делается, на примере реакторов, имеющих активную зону в форме шара или цилиндра конечных размеров. Поскольку эти геометрические формы обладают известными свойствами симметрии, то и собственные функции задачи (1.6) будут удовлетворять таким же свойствам.

*Сферический реактор радиуса  $R$* , симметричный относительно центра шара  $r=0$ . Собственные функции  $\psi_m(\vec{r})$  будут зависеть лишь от расстояния  $r$  от центра шара и их следует искать из решения задачи:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi_m}{dr} \right) + \alpha_m^2 \psi_m(r) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_s, \quad (2.5)$$

$$\psi_m(R_s) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $R_s$  – радиус экстраполированной границы.

Используя подстановку  $\psi_m(r) = \frac{1}{r} \varphi_m(r)$ , преобразуем (2.5) к уравнению:

$$\frac{d^2 \varphi_m(r)}{dr^2} + \alpha_m^2 \varphi_m(r) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_s, \quad \varphi_m(R_s) = 0.$$

Линейно-независимыми решениями его являются функции:  $\sin(\alpha_m r)$ ,  $\cos(\alpha_m r)$ . Поэтому общее решение уравнения (2.5) получим в виде:

$$\psi_m(r) = A_m \frac{\sin(\alpha_m r)}{r} + B_m \frac{\cos(\alpha_m r)}{r}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

где  $A_m, B_m$  – постоянные множители, одновременно не равные нулю.

Чтобы с помощью этих функций можно было получить ограниченный при всех  $0 \leq r \leq R_0$  поток нейтронов, необходимо принять:  $B_m = 0$ . Кроме того, должно выполняться граничное условие:

$$\psi_m(R_0) = A_m \frac{\sin(\alpha_m R_0)}{R_0} = 0,$$

что имеет место, когда  $\sin(\alpha_m R_0) = 0$ , а значит,

$$\alpha_m R_0 = \pi(m + 1), \quad m = 0, 1, \dots$$

(отрицательные значения  $m$  не рассматриваются, поскольку не получаем новых линейно-независимых функций). Отсюда следует, что наименьшее собственное число задачи (2.4)

$$\alpha_0^2 = \left( \frac{\pi}{R_0} \right)^2, \quad (2.6)$$

а асимптотическое распределение нейтронов  $\phi(r) = C \frac{\sin(\alpha_0 r)}{r}$ .

Отметим, что критический радиус сферического реактора, полученный с помощью равенств (2.2) и (2.6), равен:

$$R_0 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi L}{\sqrt{K_\infty - 1}}. \quad (2.7)$$

*Цилиндрический реактор радиуса  $R$  и высотой  $H$ .* В таком реакторе поток нейтронов  $\phi(\vec{r})$  симметричен относительно оси цилиндра  $r = 0$  и плоскости  $z = 0$ , проходящей перпендикулярно оси через половину высоты. Поэтому собственные функции  $\psi_m(\vec{r})$  зависят лишь от переменных  $(r, z)$  и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_m}{dr} \right) + \frac{d^2 \psi_m}{dz^2} + \alpha_m^2 \psi_m(r, z) = 0, \quad m = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

и граничным условиям  $\psi_m(R_s, z) = 0$ ,  $\psi_m \left( r, \pm \frac{H_s}{2} \right) = 0$ .

Решение уравнений (2.8) будем искать методом разделения переменных, представив  $\psi_m(r, z)$  в виде произведения:

$$\psi_m(r, z) = \varphi_m(r) \xi_m(z). \quad (2.9)$$

Подставив (2.9) в уравнение (2.8), получим равенство:

$$\frac{1}{\varphi_m(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_m(r)}{dr} \right) + \frac{1}{\xi_m(z)} \frac{d^2 \xi_m(z)}{dz^2} = -\alpha_m^2.$$

Оно может выполняться лишь в том случае, когда

$$\frac{1}{\varphi_m(r)} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_m(r)}{dr} \right) = -\alpha_{r,m}^2, \quad \varphi_m(R_s) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\xi_m(z)} \frac{d^2 \xi_m(z)}{dz^2} = -\alpha_{z,m}^2, \quad \xi_m \left( \pm \frac{H_s}{2} \right) = 0, \quad (2.11)$$

где принято, что  $\alpha_{r,m}^2 + \alpha_{z,m}^2 = \alpha_m^2$ .

Уравнение (2.10) путём замены  $y = \alpha_{r,m} r$  приводится к уравнению Бесселя нулевого порядка:

$$y^2 \frac{d^2 \varphi_m(y)}{dy^2} + y \frac{d\varphi_m(y)}{dy} + y^2 \varphi_m(y) = 0.$$

Поскольку частными решениями его являются функции Бесселя действительного аргумента:  $J_0(y)$ ,  $Y_0(y)$ , то для общего решения уравнения (2.10) имеем

$$\varphi_m(r) = A_m^{(1)} J_0(\alpha_{r,m} r) + A_m^{(2)} Y_0(\alpha_{r,m} r).$$

Следует учесть, что функция  $Y_0(\alpha_{r,m} r)$  имеет логарифмическую особенность в точке  $r = 0$ . Чтобы при этом поток нейтронов был всюду ограничен, необходимо принять  $A_m^{(2)} = 0$ . Общим решением уравнения (2.11) является сумма:

$$\xi_m(z) = B_m^{(1)} \cos(\alpha_{z,m} z) + B_m^{(2)} \sin(\alpha_{z,m} z),$$

в которой из соображения симметрии решения относительно плоскости  $z = 0$  примем  $B_m^{(2)} = 0$ .

Таким образом, собственные функции задачи (2.8) равны:

$$\psi_m(r, z) = A_m J_0(\alpha_{r,m} r) \cos(\alpha_{z,m} z). \quad (2.12)$$

Граничные условия (2.8) для этих функций выполняются, когда:

$$J_0(\alpha_{r,m} R_0) = 0, \quad \cos\left(\alpha_{z,m} \frac{H_0}{2}\right) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что:

$$\alpha_{r,m} R_0 = b_m, \quad \alpha_{z,m} \frac{H_0}{2} = \frac{\pi}{2}(m+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

где  $b_0 < b_1 < b_2 < \dots$ ,  $b_0 = 2,405$  – корни функции Бесселя  $J_0(y)$ . Здесь отрицательные значения  $m$  не рассматриваются по той же причине, что и раньше для сферического реактора.

Соотношения (2.12) и (2.13) позволяют сделать вывод о том, что в цилиндрическом реакторе конечных размеров:

- наименьшее собственное число задачи (2.8)  $\alpha_0^2$  равно

$$\alpha_0^2 = \alpha_r^2 + \alpha_z^2, \quad \alpha_r^2 = \left(\frac{2,405}{R_0}\right)^2, \quad \alpha_z^2 = \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2, \quad (2.14)$$

- асимптотический поток нейтронов

$$\phi(r, z) = C J_0(\alpha_r r) \cos(\alpha_z z). \quad (2.15)$$

Замечание. При неограниченном возрастании одного из размеров цилиндрический реактор трансформируется либо в плоский реактор толщиной  $H$ , либо в цилиндрический реактор радиуса  $R$  бесконечной высоты. Осуществляя в соотношениях (2.14) и (2.15) соответствующие предельные переходы, получим:

- для плоского реактора толщиной  $H$ :

$$\alpha_r^2 = 0, \quad \alpha_z^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2,$$

$$\phi(z) = C \cos(\alpha_z z), \quad -\frac{H}{2} \leq z \leq +\frac{H}{2}, \quad (2.16)$$

- для бесконечного по высоте цилиндрического реактора радиуса  $R$ :

$$\alpha_z^2 = 0, \quad \alpha_r^2 = \left( \frac{2,405}{R_0} \right)^2$$

$$\phi(r) = C J_0(\alpha_r r), \quad 0 \leq r \leq R_0. \quad (2.17)$$

## 2.2. Задача о критичности многозонного реактора

Ограничиваясь аналитическим методом решения задачи, рассмотрим многозонный реактор конечных размеров в одной из простых геометрий. В таком реакторе асимптотический поток  $\phi(r) = C \psi_0(r)$  зависит от одной переменной  $r$ , а в уравнении (1.13):

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} \phi(\vec{r})) = \frac{1}{r^\nu} \frac{d}{dr} \left( D r^\nu \frac{d\phi(r)}{dr} \right), \quad (2.18)$$

где параметр  $\nu$  принимает значения: 0 – для плоской геометрии, 1 – для цилиндрической геометрии и 2 – для сферической геометрии. Будем считать, что реактор симметричен относительно  $r = 0$  и содержит  $n$  зон ( $n \geq 2$ ).

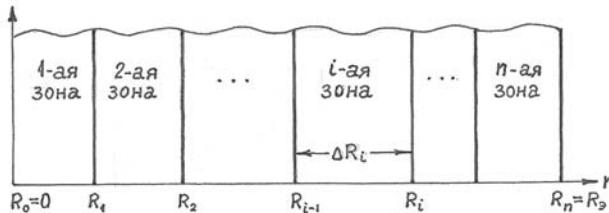


Рис.2.1. Модель одномерного многозонного реактора

Пронумеруем зоны в направлении возрастания  $r$  (рис.2.1) и примем, что  $r = 0$  совпадает с центром симметрии, а  $r = R_n$  – с экстраполированной границей реактора. Введём обозначения:

$$\Delta R_i = R_i - R_{i-1}, \quad \beta_i^2 = \left| \frac{K_\infty^{(i)}}{K_{эф}} - 1 \right| \frac{1}{L_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.19)$$

где  $R_0 = 0$ ,  $L_i^2 = \frac{D_i}{\Sigma_{a,i}}$  – квадрат длины диффузии, а

$K_\infty^{(i)} = \frac{v_f \Sigma_{f,i}}{\Sigma_{a,i}}$  – коэффициент размножения бесконечной среды со

свойствами  $i$ -й зоны. Тогда при  $r \in \Delta R_i$  материальный параметр  $\omega$  принимает значения:

$$\omega = \begin{cases} \beta_i^2, & \text{если } K_\infty^{(i)} \geq K_{\text{эф}} \\ -\beta_i^2, & \text{если } K_\infty^{(i)} < K_{\text{эф}} \end{cases}. \quad (2.20)$$

Учитывая, что параметры  $\beta_i^2$  постоянны в пределах соответствующих зон, приведём уравнение (1.17) для функции  $\psi_0(r)$  к системе  $n$  дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\Delta \psi_{0,i}(r) \pm \beta_i^2 \psi_{0,i}(r) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.21)$$

где функции  $\psi_{0,i}(r)$  определены и непрерывны вместе с производными до 2-го порядка включительно при  $r \in \Delta R_i$ . Чтобы можно было считать, что  $\psi_0(r) = \psi_{0,i}(r)$  при  $r \in \Delta R_i$ , необходимо потребовать выполнения условий:

$$\left( r^v \frac{d\psi_{0,1}}{dr} \right)_{r=0} = 0, \quad \psi_{0,n}(R_n) = 0, \quad (2.22)$$

$$\psi_{0,i}(R_i) = \psi_{0,i+1}(R_{i+1}), \quad D_i \left( \frac{d\psi_{0,i}}{dr} \right)_{r=R_i} = D_{i+1} \left( \frac{d\psi_{0,i+1}}{dr} \right)_{r=R_{i+1}} \\ i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.23)$$

Отметим, что первое равенство в (2.22) равносильно условию ограниченности решения при  $r = 0$ . Если в плоском реакторе конечных размеров отсутствует плоскость симметрии, то можно по свойствам первой зоны рассчитать длину линейной экстраполяции и, расположив начало координат на экстраполированной границе, принять  $\psi_{0,1}(0) = 0$ . Если переменная  $r$  в последней зоне может принимать сколь угодно большие значения (например, рассматривается модель бесконечного сферического реактора), то

второе условие в (2.22) заменяет требование ограниченности функции  $\psi_{0,n}(r)$  на бесконечности. Однако всегда в той или иной форме присутствует два граничных условия.

Перейдём теперь к рассмотрению схемы получения критических параметров реактора и асимптотического потока нейтронов. Для этого вначале запишем общее решение каждого из уравнений (2.21) в виде

$$\psi_{0,i}(r) = A_i f(\beta_i r) + B_i g(\beta_i r), \quad (2.24)$$

где  $A_i, B_i$  – одновременно не равные нулю коэффициенты,  $f_i(\beta_i r), g_i(\beta_i r)$  – линейно-независимые частные решения, приведённые в табл. 1 (для разных геометрий в зависимости от значения (2.20) материального параметра  $\omega$ ). Здесь и в дальнейшем принимается, что  $\beta_i = +\sqrt{\beta_i^2}$ .

Таблица 1. Линейно-независимые решения одногрупповой задачи в одномерной геометрии

Геометрия, $\nu = 0, 1, 2$	$\omega = \beta_i^2 > 0$		$\omega = -\beta_i^2 < 0$	
	$f(\beta_i r)$	$g(\beta_i r)$	$f(\beta_i r)$	$g(\beta_i r)$
Плоская, $\nu = 0$	$\cos(\beta_i r)$	$\sin(\beta_i r)$	$ch(\beta_i r)$	$sh(\beta_i r)$
Цилиндрическая, $\nu = 1$	$J_0(\beta_i r)$	$Y_0(\beta_i r)$	$I_0(\beta_i r)$	$K_0(\beta_i r)$
Сферическая, $\nu = 2$	$\frac{\sin(\beta_i r)}{\beta_i r}$	$\frac{\cos(\beta_i r)}{\beta_i r}$	$\frac{sh(\beta_i r)}{\beta_i r}$	$\frac{ch(\beta_i r)}{\beta_i r}$

*Примечание.* В том случае, когда в какой-либо зоне (включая первую зону)  $\omega_i = 0$ , решениями уравнения (2.21) будут функции:  $g(\beta_i r) = 1$  – для любой из рассматриваемых геометрий,

$$f(\beta_i r) = r \quad (npu \nu = 0),$$

$\ln r$  ( $npu \nu = 1$ ),  $r^{-1}$  ( $npu \nu = 2$ ). Если рассматривается неограниченно протяжённая зона без размножения (бесконечный отражатель), то гиперболические функции  $sh(\beta_i r), ch(\beta_i r)$  надо заменить экспонентами  $\exp(\beta_i r), \exp(-\beta_i r)$ .

Коэффициенты  $A_i, B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) находят с помощью равенств (2.22), (2.23). При этом полезно сначала сократить число

неизвестных, используя граничные условия (2.22). Если это сделано, то для определения оставшихся  $m = 2n - 2$  неизвестных имеем столько же равенств (2.23), называемых часто «условиями сшивки». В результате получим однородную систему линейных уравнений, которая может быть записана в форме:

$$\hat{M}(u)\vec{X} = 0, \quad (2.25)$$

где  $\vec{X}$  – вектор неизвестных коэффициентов, а  $\vec{M}(u)$  – квадратная матрица порядка  $m \times m$  с элементами, зависящими от критических параметров  $u$  реактора (значения  $K_{эф}$ , размеров и др.).

Нетривиальные решения системы уравнений (2.25) существуют, когда определитель  $\|\hat{M}(u)\|$  матрицы  $\hat{M}(u)$  равен нулю. Равенство

$$\|\hat{M}(u)\| = 0 \quad (2.26)$$

представляет собой условие критичности многозонного реактора. Оно устанавливает вполне определённое соотношение между значениями собственных чисел (включая  $K_{эф}$ ), размерами и составами зон. Рассматривая его как уравнение относительно  $u$ , можно найти критическое значение  $u = u_0$  (например, значение  $K_{эф}$ , если размеры и свойства зон известны, или обогащение топлива в активной зоне критического реактора и т.п.). При этом важно иметь в виду, что уравнение (2.26) имеет бесконечное множество решений, и следует выбрать такое  $u_0$ , которое в дальнейшем приведёт к построению собственной функции  $\psi_0(r)$ , соответствующей ведущему собственному числу задачи (1.17). Например, если задача о критичности реактора рассматривается в постановке 2, то в качестве  $K_{эф}$  нужно взять самое большое значение, при котором выполняется равенство (2.26).

После нахождения критических параметров приступают к определению численных значений коэффициентов  $A_i, B_i$ . При этом следует учитывать, что вследствие (2.26) ранг  $\mathfrak{R}(\hat{M})$  матрицы  $\hat{M}$  будет меньше или равен  $m - 1$ . Поэтому приходится искать отличный от нуля определитель матрицы  $\hat{M}$ , имеющий

наивысший порядок. Пусть таким окажется определитель порядка  $m-1$ , составленный из коэффициентов при неизвестных  $A_2, B_2, A_3, B_3, \dots, A_n$  (предполагается, что неизвестные  $B_1, B_n$  с помощью равенств (2.22) выражены через  $A_1, A_n$  соответственно). Тогда можно положить  $A_1$  равным любому, кроме нуля, значению (например, выбрать  $A_1 = 1$ ) и с помощью известных методов линейной алгебры определить численные значения  $A_2, B_2, A_3, B_3, \dots, A_n$ . После этого нетрудно, используя выражения (2.24), восстановить собственную функцию  $\psi_0(r)$  и получить асимптотический поток в виде  $\phi(r) = C\psi_0(r)$ .

При отсутствии ошибок в определении  $u_0$  ранг  $\mathfrak{R}(\hat{M}) = m-1$ . Действительно, если  $\mathfrak{R}(\hat{M}) < m-1$ , то решение системы уравнений (2.25) будет существовать, когда хотя бы два неизвестных будут независимыми. Например, если такими окажутся  $A_1, A_2$ , то, полагая сначала  $A_1 = 1, A_2 = 0$ , а затем  $A_1 = 0, A_2 = 1$ , получим две разные собственные функции  $\psi_0^{(1)}(r), \psi_0^{(2)}(r)$ . Однако это противоречит одному из ранее сделанных в главе I выводу: ведущему собственному числу  $K_{эф}$  соответствует единственная собственная функция.

Отметим, что изложенный выше способ получения асимптотического потока нейтронов легко распространить на реакторы, которые имеют конечные размеры, но свойства зон не меняются в направлениях, перпендикулярных оси  $r$ . Такие реакторы в дальнейшем будем называть конечными одномерными реакторами. Среди них важное место занимают цилиндрические реакторы конечной высоты, в которых поток нейтронов зависит от 2-х переменных: расстояния  $r$  от оси симметрии и расстояния  $z$  от плоскости симметрии, проходящей через половину высоты  $H$  цилиндра. В этом случае асимптотический поток нейтронов  $\phi_0(r, z) = C\psi_0(r, z)$ , а задача о критичности решается при условиях типа (2.30) и дополнительных требованиях:

$$\psi_0\left(r, \pm \frac{H_0}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq r \leq R_0, \quad -\frac{H_0}{2} \leq z \leq +\frac{H_0}{2},$$

где  $\pm \frac{H_0}{2}$  – координаты торцевых экстраполированных границ с вакуумом.

В этом случае пространственные переменные разделяются и решение  $\psi_0(r, z)$  ищется в виде произведения

$$\psi_0(r, z) = \varphi_0(r) \xi_0(z), \quad \xi_0(z) = B_0 \cos(\alpha_z z),$$

где  $\xi_0(z)$  – собственная функция, соответствующая наименьшему

числу  $\alpha_z^2 = \left(\frac{\pi}{H_0}\right)^2$  задачи (2.11).

Функция  $\varphi_0(r) = \varphi_{0,i}(r)$ ,  $r \in \Delta R_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  определяется из решения следующей системы уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_{0,i}(r)}{dr} \right) + (\pm \beta_i^2 - \alpha_z^2) \varphi_{0,i}(r) = 0, \quad r \in \Delta R_i \quad (2.27)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

при условиях типа (2.22), (2.23).

Задача (2.27), (2.22), (2.23) отличается от задачи (2.20) - (2.23) лишь тем, что теперь вместо значений  $\pm \beta_i^2$  стоят разности  $\pm \beta_i^2 - \alpha_z^2$ , появившиеся в связи с необходимостью учитывать утечку нейтронов в аксиальном направлении. Очевидно, решение уравнений (2.27) находится так же, как уравнений (2.21). При этом необходимо только сделать замену параметра  $\pm \beta_i^2$  на величину  $\pm \beta_i^2 - \alpha_z^2$ , а функции  $f(\beta_i r)$ ,  $g(\beta_i r)$  выбирать для цилиндрической геометрии в зависимости от знака разности  $\pm \beta_i^2 - \alpha_z^2$ .

### 2.3. Влияние отражателя на критические параметры реактора

В качестве примера рассмотрим решение задачи о критичности сферически симметричного реактора, состоящего из активной зоны

(соответствующей значению  $i = 1$ ) и отражателя (соответствует  $i = 2$ ). В таком реакторе  $R_1, R_2$  – радиусы активной зоны и экстраполированной границы соответственно, а параметр  $\omega$  принимает значения:

$$\omega = \beta_1^2 = \left( \frac{K_\infty^{(1)}}{K_{\phi}} - 1 \right) \frac{1}{L_1^2} \quad \text{– в активной зоне при } r \in \Delta R_1 ,$$

$$\omega = -\beta_2^2 = -\frac{1}{L_2^2} \quad \text{– в отражателе при } r \in \Delta R_2 , \quad (2.28)$$

$$\Delta R_1 = R_1, \quad \Delta R_2 = R_2 - R_1 .$$

Общие решения уравнений (2.21) для сферической геометрии можно записать в виде:

$$\psi_{0,1}(r) = A_1 \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} + B_1 \frac{\cos(\beta_1 r)}{\beta_1 r}, \quad r \in \Delta R_1 ,$$

$$\psi_{0,2}(r) = A_2 \frac{sh(\beta_2 r)}{\beta_2 r} + B_2 \frac{ch(\beta_2 r)}{\beta_2 r}, \quad r \in \Delta R_2 ,$$

где для определения коэффициентов  $A_1, B_1, A_2, B_2$  имеем два граничных условия (2.22) и два «условия сшивки» (2.23). Из равенств (2.22) получим:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = -A_2 th(\beta_2 R_2),$$

а из условий (2.23) – однородную и линейную относительно неизвестных  $A_1, A_2$  систему уравнений. Раскрывая определитель (2.26) этой системы и приравнявая его нулю, придём к условию критичности

$$1 - \beta_1 R_1 ctg(\beta_1 R_1) = \frac{D_2}{D_1} [1 + \beta_2 R_1 ch(\beta_2 \Delta R_2)] \quad (2.29)$$

и следующему выражению для собственной функции  $\psi_0(r)$  (полагая  $A_1 = 1$ ):

$$\psi_0(r) = \psi_{0,1}(r) = \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r}, \quad r \in \Delta R_1 ,$$

$$\psi_0(r) = \psi_{0,2}(r) = \frac{\sin(\beta_1 R_1)}{\text{sh}(\beta_2 \Delta R_2)} \frac{\text{sh}(\beta_2 (R_2 - r))}{\beta_1 r}, \quad r \in \Delta R_2.$$

Остаётся с помощью равенства (2.29) определить критические параметры реактора.

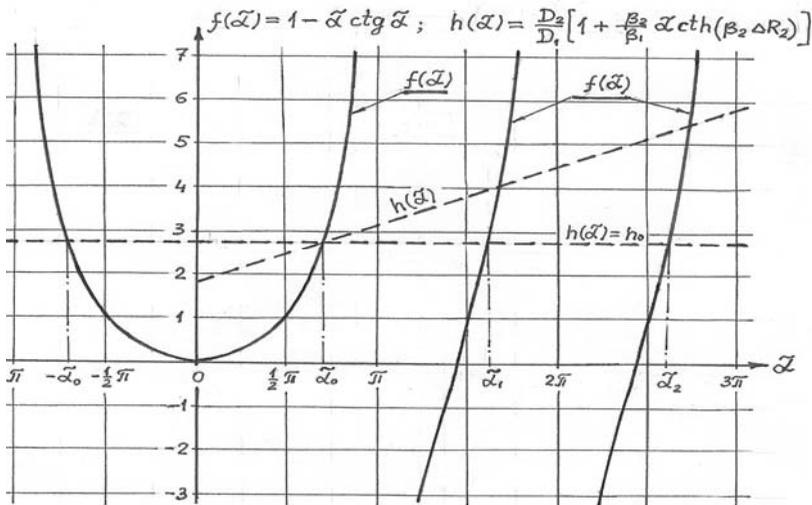


Рис.2.2. Определение корней уравнений (2.30) и (2.33)

Пусть задача о критичности реактора решается в постановке 2 (когда нужно найти  $K_{эф}$  при заданных размерах и свойствах зон). В этом случае равенство (2.29), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестного  $K_{эф}$ , определяет собственные числа задачи  $k_0, k_1, \dots$ . Чтобы пояснить их получение, сделаем замену  $\tilde{\alpha} = \beta_1 R_1$  и запишем условие критичности в виде

$$1 - \tilde{\alpha} \text{ctg}(\tilde{\alpha}) = h_0, \quad (2.30)$$

где  $h_0$  известно и совпадает с правой частью равенства (2.29).

Рис.2.2 иллюстрирует решение уравнения (2.30) и размещение его корней  $\tilde{\alpha}_n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) на плоскости. Видно, что все  $\tilde{\alpha}_n$  действительны, располагаются симметрично относительно оси  $\tilde{\alpha} = 0$ , а при значениях  $\tilde{\alpha} \geq 0$ :

$$n\pi < \tilde{\alpha}_n < (n+1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Поскольку значения корней  $\tilde{\alpha}_n$  и собственных чисел  $k_n$  связаны (как это следует из (2.28)) равенствами

$$k_n = K_\infty^{(1)} \frac{R_1^2}{R_1^2 + \tilde{\alpha}_n^2 L_1^2}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \text{а} \quad \text{эффективный}$$

коэффициент размножения нейтронов  $K_{эф}$  совпадает с максимальным собственным числом  $k_0$ , то получим

$$K_{эф} = K_\infty^{(1)} \frac{R_1^2}{R_1^2 + \tilde{\alpha}_0^2 L_1^2} = K_\infty^{(1)} \frac{1}{1 + \alpha_0^2 L_1^2}, \quad (2.31)$$

где  $\alpha_0^2 = \frac{\tilde{\alpha}_0^2}{R_1^2}$ , а  $\tilde{\alpha}_0$  – наименьший по модулю корень уравнения

(2.30), удовлетворяющий неравенству  $0 < \tilde{\alpha}_0 < \pi$ . Из равенства (2.31) следует, что в критическом реакторе (когда  $K_{эф} = 1$ ) радиус активной зоны должен совпадать с величиной:

$$R_1 = \frac{\tilde{\alpha}_0 L_1}{\sqrt{K_\infty^{(1)} - 1}}. \quad (2.32)$$

Очевидно, к такому же значению радиуса придём, решая задачу о критичности реактора в постановке 1 и считая, что неизвестным параметром является  $R_1$ . В этом случае вместо (2.30) придётся анализировать корни уравнения:

$$1 - \tilde{\alpha} \operatorname{ctg}(\tilde{\alpha}) = h(\tilde{\alpha}), \quad (2.33)$$

где  $h(\tilde{\alpha}) = \frac{D_2}{D_1} \left[ 1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \tilde{\alpha} \operatorname{cth}(\beta_2 \Delta R_2) \right]$  является линейной функцией

параметра  $\tilde{\alpha}$ . При этом необходимо ограничиться лишь значениями  $\tilde{\alpha} > 0$ , чтобы не получить отрицательных значений для  $R_1$ , и выбирать, как и раньше, наименьшее число  $\tilde{\alpha}_0$ .

Сравнивая значения  $K_{эф}$ ,  $R_1$ , рассчитанные по формулам (2.31), (2.32) для реактора с отражателем, со значениями  $K_{эф}^{(0)}$ ,  $R_1^{(0)}$ , полученными по формулам (2.3), (2.7) для реактора без отражателя,

полезно отметить следующее. В условно-критических реакторах с одинаковыми составами и радиусами  $R_1 = R_1^{(0)}$  зон  $K_{эф} > K_{эф}^{(0)}$ , а в критических реакторах с одними и теми же составами активных зон  $R_1 < R_1^{(0)}$ . Это связано с тем, что в реакторе с отражателем часть нейтронов, вылетающих из активной зоны, возвращаются обратно и принимают участие в развитии цепной реакции деления ядер. В реакторе без отражателя эта часть нейтронов оказывается безвозвратно потерянной.

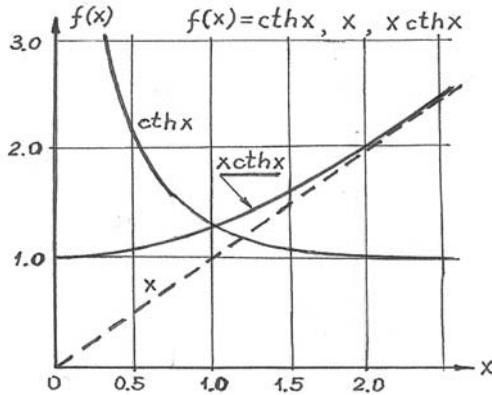


Рис.2.3. Особенности функции  $f(x) = x \cdot cth(x)$

Изменение свойств отражателя (прежде всего, толщины  $\Delta R_2$  и сечения поглощения  $\Sigma_a^{(2)}$ ) влияют на критический размер активной зоны. С ростом  $\Delta R_2$  (при сохранении остальных параметров) уменьшается значение производной  $\frac{dh}{d\tilde{\alpha}} \sim cth(\beta_2 \Delta R_2)$  и, как видно из рис.2.2, снижаются  $\tilde{\alpha}_0$  и  $R_1$ . Однако при  $\Delta R_2 \geq 2L_2$  это снижение практически прекращается.

Для выяснения влияния  $\Sigma_a^{(2)}$  на значение  $R_1$  правую часть равенства (2.33) преобразуем к виду

$$h(\tilde{\alpha}) = \frac{D_2}{D_1} \left[ 1 + \frac{\tilde{\alpha} x \cdot cth(x)}{\beta_1 \Delta R_2} \right], \quad x = \frac{\Delta R_2}{L_2}.$$

Учитывая зависимости, представленные на рис.2.2 и 2.3, нетрудно установить, что:

- при  $\Sigma_a^{(2)} \rightarrow \infty$  значения  $L_2 \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \operatorname{cth}(x) \rightarrow \infty$ ,

а поэтому  $\tilde{\alpha}_0 \rightarrow \pi$ ,  $R_1 \rightarrow R_1^{(0)} = \frac{\pi}{\beta_1}$ ,

- при стремлении  $\Sigma_a^{(2)}$  к нулю:  $L_2 \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$ ,  $x \operatorname{cth}(x) \rightarrow 1$ , а

функция  $h(\tilde{\alpha}) \rightarrow \frac{D_2}{D_1} \left( 1 + \frac{\tilde{\alpha}}{\beta_1 \Delta R_2} \right)$ .

Если в последнем случае принять, что  $\frac{\tilde{\alpha}}{\beta_1 \Delta R_2} \ll 1$  (а это выполняется, когда  $\Delta R_2 \gg R_1^{(0)}$ ) и  $D_2 = D_1$ , то  $1 - \tilde{\alpha}_0 \operatorname{ctg}(\tilde{\alpha}_0) = h(\tilde{\alpha}_0) \approx 1$ . Наименьший корень этого уравнения

$\tilde{\alpha}_0 \approx \frac{\pi}{2}$ , а значит  $R_1 \approx \frac{\pi}{2\beta_1} = \frac{R_1^{(0)}}{2}$ . Такое сокращение радиуса

активной зоны  $R_1$  приведёт почти к 8-кратному уменьшению критической массы реактора. Для этого необходимо, чтобы отражатель не поглощал нейтроны и имел достаточно большую толщину.

В заключение отметим, что влияние отражателя на критический размер и распределение нейтронов в активной зоне можно оценить, пользуясь понятиями эффективной добавки  $\delta$  и альbedo  $\eta$  отражателя. В качестве эффективной добавки принимают разность характерных размеров (радиуса или полутолщины) двух критических реакторов: реактора без отражателя и активной зоны реактора с отражателем (при одинаковых значениях  $\beta_1^2$  активных зон). Например, в случае сферического реактора:

$$\delta = R_1^{(0)} - R_1. \quad (2.34)$$

Используя определение (2.33), можно получить [4] следующее выражение для оценки  $\delta$  активной зоны большого реактора (когда  $\delta \ll R_1$  и  $\operatorname{tg}(\beta_1 \delta) \cong \beta_1 \delta$ ):

$$\delta = \frac{1}{2} \left[ \left( R_1^{(0)} + \frac{D_2}{D_1} \delta_0 \right) - \sqrt{\left( R_1^{(0)} + \frac{D_2}{D_1} \delta_0 \right)^2 - 4R_1^{(0)} \delta_0} \right],$$

$$\text{где } \delta_0 = \frac{D_1}{D_2} L_2 \operatorname{th} \left( \frac{\Delta R_2}{L_2} \right).$$

Отметим, что эффективная добавка  $\delta$  в основном определяется свойствами отражателя и слабо зависит от свойств активной зоны. Если величина  $\delta$  известна, то распределение нейтронов в активной зоне реактора с отражателем можно получить, рассматривая реактор без отражателя с прежним значением параметра  $\beta_1^2$ , но увеличенным на  $\delta$  размером  $R_s = R_1 + \delta$ . Этим обстоятельством часто пользуются при расчётах многозонных цилиндрических реакторов, состоящих из кольцевых зон, окружённых с торцов отражателями.

Под альбедо отражателя  $\eta$  подразумевают отношение односторонних токов нейтронов  $J^-$  (из отражателя в активную зону) и  $J^+$  (из активной зоны в отражатель):

$$\eta = \frac{J^-}{J^+} = \frac{1 + 2D \left( \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dr} \right)_{r=R_1}}{1 - 2D \left( \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dr} \right)_{r=R_1}}. \quad (2.35)$$

В частности, для сферического реактора с отражателем имеем

$$\eta = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}, \quad \zeta = \frac{2D_2}{R_1} \left[ 1 + \frac{R_1}{L_2} \operatorname{cth} \left( \frac{\Delta R_2}{L_2} \right) \right].$$

Из определения (2.35) можно получить:

$$D \left( \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dr} \right)_{r=R_1} = - \frac{1 - \eta}{2(1 + \eta)}. \quad (2.36)$$

Выражениями (2.35) и (2.36) удобно воспользоваться при расчётах реакторов с несколькими отражателями и при выравнивании поля энерговыделения в активной зоне. В этих случаях достаточно, определив вначале  $\eta$  по формуле (2.35), использовать это значение

в последующих расчётах реакторов с разными свойствами активной зоны, формулируя условие на внешней границе активной зоны в виде (2.36).

#### 2.4. Численный метод решения условно-критической задачи

Аналитический способ нахождения  $K_{эф}$  и асимптотического потока нейтронов, рассмотренный в разделе 2.2, имеет ограниченную область применения. Его не удаётся распространить на случай многозонных реакторов в 2- и 3-мерных геометриях. Даже в одномерных геометриях, но с большим числом зон, получаем весьма сложного вида нелинейное уравнение (2.26), которое трудно решить аналитически. Приходится обращаться к численным итерационным методам нахождения его корней (например, методу Ньютона). Но в этом случае в реакторах с большим размером активной зоны среди всех собственных чисел трудно выделить наибольшее  $k_0 = K_{эф}$ .

Поясним это на примере сферического реактора без отражателя, собственные числа которого  $k_m$  рассчитываются по формулам (1.9)

с использованием  $\alpha_m = \frac{\pi(m+1)}{R_s}$ . Нетрудно видеть, что

$\frac{k_m}{k_0} \rightarrow 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) при  $R \rightarrow \infty$ , т.е. происходит сближение

собственных чисел с ростом радиуса  $R$  активной зоны. Поэтому в процессе итерационного счёта вместо числа  $k_0$  можно получить какое-либо другое число  $k_m \neq k_0$ . Так как такому числу соответствует знакопеременная собственная функция, то окажется, что асимптотический поток станет отрицательным в отдельных частях активной зоны. Вследствие этого (а также в связи с большими достижениями в развитии вычислительной техники) при решении задач о критичности реакторов предпочтение отдаётся другому способу, базирующемуся на использовании метода итераций источников в сочетании с численным методом расчёта потоков нейтронов на каждой итерации.

Напомним, что в методе итераций источников на каждой  $n$ -й итерации решаются уравнения:

$$\operatorname{div}(\vec{J}^{(n)}(\vec{r})) + \Sigma_a \phi^{(n)}(\vec{r}) = q^{(n-1)}(\vec{r}), \quad \phi^{(n)}(\vec{r}) \in \Omega, \quad (2.37)$$

где ток нейтронов  $\vec{J}^{(n)}(\vec{r})$  связан с потоком  $\phi^{(n)}(\vec{r})$  соотношением:

$$\operatorname{grad} \phi^{(n)}(\vec{r}) + 3 \Sigma_{tr} \vec{J}^{(n)}(\vec{r}) = 0. \quad (2.38)$$

Источник  $q^{(0)}(\vec{r})$  на 1-й итерации задаётся в виде любой неотрицательной функции, а на следующих итерациях рассчитывается по формуле:  $q^{(n-1)}(\vec{r}) = \nu_f \Sigma_f \phi^{(n-1)}(\vec{r})$ . В главе 1 показано, что такие итерации сходятся и в пределе дают  $K_{эф}$  и асимптотический поток нейтронов  $\phi(\vec{r})$ .

На практике итерации прекращают, когда впервые с заданной погрешностью  $\varepsilon > 0$  выполнится неравенство:

$$\left| K^{(n)} - K^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon, \quad \text{где } K^{(n)} = \frac{\int_V q^{(n)}(\vec{r}) dV}{\int_V q^{(n-1)}(\vec{r}) dV}. \quad (2.39)$$

Если это произойдёт на итерации с номером  $n = p$ , то принимают:

$$K_{эф} = K^{(p)}, \quad \phi(\vec{r}) = C \phi^{(p)}(\vec{r}). \quad (2.40)$$

При этом в задачах со значением  $K_{эф}$ , сильно отличающимся от единицы, рекомендуется источник  $q^{(n)}(\vec{r})$  рассчитывать по формуле:

$$q^{(n)}(\vec{r}) = \frac{1}{K^{(n)}} \nu_f \Sigma_f \phi^{(n)}(\vec{r}).$$

Перейдём теперь к рассмотрению численного метода нахождения потоков нейтронов  $\phi^{(n)}(\vec{r})$ . В основе метода лежит преобразование дифференциальных уравнений (2.37) в систему линейных алгебраических уравнений относительно значений  $\phi^{(n)}(\vec{r}_k)$  в отдельных узлах  $\vec{r}_k$  заранее выбранной сетки разбиения. Такое преобразование может быть выполнено разными способами. Остановимся на одном из них, предложенном для решения уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами. Ограничимся

пока случаем многозонного реактора в одномерной геометрии, в которой поток нейтронов зависит от одной переменной  $r$  и

$$\text{выполняется условие симметрии } \left[ r^\nu \frac{d\phi^{(n)}}{dr} \right]_{r=0} = 0.$$

Опуская в дальнейшем номер итерации  $n$  и учитывая, что в рассматриваемой геометрии

$$\text{div} \vec{J}(\vec{r}) = \frac{1}{r^\nu} \frac{d}{dr} (r^\nu J(r)), \quad \text{grad} \phi(\vec{r}) = \frac{d\phi(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

запишем уравнения (2.37), (2.38) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$-\frac{d}{dr} (r^\nu J(r)) - r^\nu \Sigma(r) \phi(r) + r^\nu q(r) = 0, \quad (2.41)$$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} + 3\tilde{\Sigma}(r) J(r) = 0, \quad (2.42)$$

где источник  $q(r)$  - кусочно-непрерывная функция, а транспортное сечение  $\tilde{\Sigma}(r)$  и сечение поглощения  $\Sigma(r)$  - кусочно-постоянные функции, терпящие разрывы на границах раздела зон  $r = R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Решения  $J(r)$ ,  $\phi(r)$  ищутся на множестве непрерывных функций, удовлетворяющих граничным условиям:

$$J(0) = 0, \quad \phi(R_n) = 0. \quad (2.43)$$

Здесь (как и раньше) принимается, что  $r = R_n$  находится на экстраполированной границе.

Введём в рассмотрение две сетки узловых точек:  $\{r_k, k = 1, 2, \dots, N\}$  - основная сетка и  $\{r_{k-(1/2)}, k = 1, 2, \dots, N\}$  - вспомогательная сетка. Координаты точек этих сеток  $r_k, r_{k-(1/2)}$  чередуются и располагаются так, что:

$$r_{k-(1/2)} < r_k < r_{k+(1/2)} < r_{k+1}.$$

Проинтегрируем уравнение (2.41) по переменной  $r$  в пределах интервала  $r_{k-(1/2)} \leq r \leq r_{k+(1/2)}$ , а уравнение (2.42) - в пределах интервала  $r_k \leq r \leq r_{k+1}$ . В результате получим равенства

$$r_{k+(1/2)}^V J(r_{k+(1/2)}) - r_{k-(1/2)}^V J(r_{k-(1/2)}) + \int_{r_{k-(1/2)}^{r_{k+(1/2)}} (\Sigma\phi - q)r^V dr = 0, \quad (2.44)$$

$$\phi(r_{k+1}) - \phi(r_k) + 3 \int_{r_k}^{r_{k+1}} \tilde{\Sigma}(r) J(r) dr = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.45)$$

которые являются точными аналогами уравнений (2.41) и (2.42). Причём, первое из них выражает условие баланса нейтронов в

$$\text{объёме } \Delta V_k = \int_{r_{k-(1/2)}^{r_{k+(1/2)}} r^V dr.$$

Дальнейшие преобразования зависят от размещения точек сеток относительно границ раздела зон. Обычно с целью упрощения расчётов принимают, что в пределах каждой зоны точки располагаются равномерно с шагом  $\Delta r^{(i)}$ . При этом возможны две схемы размещения. По первой схеме на границы зон (где  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\Sigma$ ,  $q$  терпят разрывы) попадают точки основной сетки, а по второй схеме – точки вспомогательной сетки. Установлено, что получаемые при этом разностные уравнения различаются порядком локальной аппроксимации решения. Хотя в пределе (при  $\Delta r^{(i)} \rightarrow 0$ ) они эквивалентны, но в случае конечного шага  $\Delta r^{(i)}$  разностные уравнения, соответствующие первой схеме размещения точек, дают более высокий порядок локальной аппроксимации [5]. Это означает, что при конечном шаге сетки первая схема позволяет получить значения потоков  $\phi(r_k)$  с большей точностью, чем вторая. Поэтому остановимся на первой схеме размещения точек.

Пусть  $N_i$  – число точек вспомогательной сетки в  $i$ -й зоне.

Тогда общее число узлов каждой сетки  $N = \sum_{i=1}^n N_i$ , а шаги

$\Delta r^{(i)}$  будут равны:

$$\Delta r^{(1)} = \frac{\Delta R_1}{N_1 - 0,5}, \quad \Delta r^{(i)} = \frac{\Delta R_i}{N_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (2.46)$$

Чтобы точнее выполнить первое из условий (2.42), расположим точки с координатами  $r_{(1/2)}$ ,  $r_1$  так, что  $r_{(1/2)} = 0$ ,  $r_1 = \frac{\Delta r^{(1)}}{2}$ .

Координаты остальных точек рассчитаем по формулам:

$$r_k = r_{k-(1/2)} + \frac{\Delta r_{k-(1/2)}}{2}, \quad r_{k+(1/2)} = r_k + \frac{\Delta r_{k+(1/2)}}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.47)$$

где  $\Delta r_{k-(1/2)} = r_k - r_{k-1} = \Delta r^{(i)}$ , если  $r_{k-(1/2)} \in \Delta R^{(i)}$ .

В качестве примера на рис.2.4 приведено расположение точек основной и вспомогательной сетки в 3-зонном реакторе при  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 5$ ,  $N_3 = 6$ .

Учитывая непрерывность потока и тока нейтронов, запишем разложения:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \phi(r_k) + \left. \frac{d\phi}{dr} \right|_{r=r_k} (r - r_k) + \dots, \quad r_{k-(1/2)} \leq r \leq r_{k+(1/2)} \\ J(r) &= J(r_{k+(1/2)}) + \left. \frac{dJ}{dr} \right|_{r=r_{k+(1/2)}} (r - r_{k+(1/2)}) + \dots, \quad r_k \leq r \leq r_{k+1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

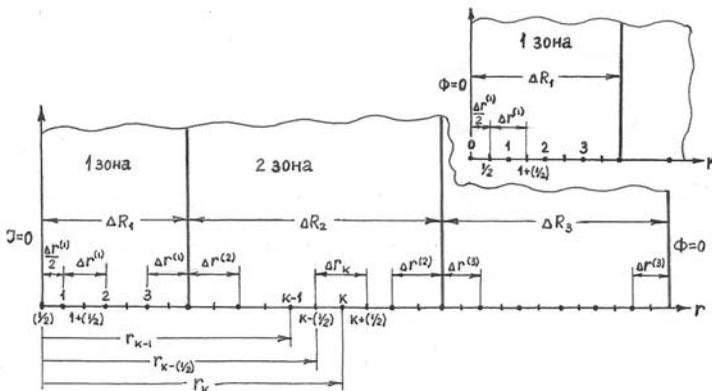


Рис.2.4. Сетка размещения точек в 3-зонном реакторе

Для функции источника  $q(r)$ , которая терпит разрыв в точке  $r_k$  (если она находится на границе раздела зон), имеем:

$$\begin{aligned} q(r) &= q^+(r_k) + \frac{dq}{dr} \Big|_{r=r_k+0} (r - r_k) + \dots, & r_k < r \leq r_{k+(1/2)} \\ q(r) &= q^-(r_k) + \frac{dq}{dr} \Big|_{r=r_k-0} (r - r_k) + \dots, & r_{k-(1/2)} \leq r < r_k \end{aligned}, \quad (2.49)$$

где  $q^+(r_k) = \lim_{r \rightarrow r_k+0} q(r)$ ,  $q^-(r_k) = \lim_{r \rightarrow r_k-0} q(r)$ .

*Основное допущение* численного метода состоит в том, что в разложениях (2.48) и (2.49) можно ограничиться только первыми слагаемыми. Очевидно, это выполняется, когда функции  $\phi(r)$ ,  $J(r)$ ,  $q(r)$  слабо изменяются на соответствующих интервалах и шаг сетки  $\Delta r^{(i)}$  в каждой зоне мал. Тогда в уравнениях (2.44), (2.45) интегралы можно заменить выражениями:

$$\begin{aligned} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} (\Sigma(r)\phi(r) - q(r))r^\nu dr &= \phi(r_k) \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \Sigma(r)r^\nu dr - q^+(r_k) \int_{r_k}^{r_{k+(1/2)}} r^\nu dr - q^-(r_k) \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_k} r^\nu dr \\ &= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \tilde{\Sigma}(r)J(r) dr = \tilde{\Sigma}(r_{k+(1/2)})J(r_{k+(1/2)})\Delta r_{k+(1/2)}. \end{aligned}$$

Здесь учитывается, что функция  $\tilde{\Sigma}(r)$  постоянна на любом интервале  $r_k < r < r_{k+1}$  и равна  $\tilde{\Sigma}(r_{k+(1/2)})$ , а значения  $\int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \Sigma(r)r^\nu dr$  нетрудно получить, учитывая зависимость функции  $\Sigma(r)$  от  $r$ .

Вводя обозначения:  $\phi_k = \phi(r_k)$ ,  $J_{k+(1/2)} = J(r_{k+(1/2)})$ ,

$$\Delta V_k = \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} r^\nu dr, \quad \tilde{\Sigma}_{k+(1/2)} = \tilde{\Sigma}(r_{k+(1/2)}), \quad (2.50)$$

$$\langle \Sigma \rangle_k = \frac{1}{\Delta V_k} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \Sigma(r)r^\nu dr, \quad \langle q \rangle_k = \frac{q^-(r_k)}{\Delta V_k} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_k} r^\nu dr + \frac{q^+(r_k)}{\Delta V_k} \int_{r_k}^{r_{k+(1/2)}} r^\nu dr$$

придём к конечно-разностным уравнениям вида ( $k = 1, 2, \dots$ ):

$$r_{k-(1/2)}^\nu J_{k-(1/2)} - r_{k+(1/2)}^\nu J_{k+(1/2)} - \langle \Sigma \rangle_k \phi_k \Delta V_k = -\langle q \rangle_k \Delta V_k. \quad (2.51)$$

Заменим в них токи нейтронов  $J_{k-(1/2)}$ ,  $J_{k+(1/2)}$  выражениями:

$$J_{k-(1/2)} = \frac{\phi_{k-1} - \phi_k}{3\tilde{\Sigma}_{k-(1/2)} \Delta r_{k-(1/2)}}, \quad J_{k+(1/2)} = \frac{\phi_k - \phi_{k+1}}{3\tilde{\Sigma}_{k+(1/2)} \Delta r_{k+(1/2)}}. \quad (2.52)$$

Учитывая первое из условий (2.42) (которое в силу принятых обозначений запишется в виде  $J_{1/2} = 0$ ), получим:

$$a_1 \phi_2 - b_1 \phi_1 = -f_1, \quad (2.53)$$

$$a_k \phi_{k+1} - b_k \phi_k + c_k \phi_{k-1} = -f_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.54)$$

$$a_k = \frac{r_{k+(1/2)}^v}{3\tilde{\Sigma}_{k+(1/2)} \Delta r_{k+(1/2)}}, \quad b_k = a_k + c_k + \langle \Sigma \rangle_k \Delta V_k, \quad f_k = \langle q \rangle_k \Delta V_k -$$

для значений  $k = 1, 2, \dots$ , а для коэффициентов  $c_k$  имеем:

$$c_1 = 0, \quad c_k = \frac{r_{k-(1/2)}}{3\tilde{\Sigma}_{k-(1/2)} \Delta r_{k-(1/2)}}, \quad k = 2, 3, \dots. \quad (2.55)$$

Уравнения (2.53), (2.54) образуют систему разностных уравнений 2-го порядка. Каждое содержит неизвестные потоки  $\phi_{k-1}$ ,  $\phi_k$ ,  $\phi_{k+1}$  в трёх следующих одна за другой точках основной сетки. В таком случае решение ищется, используя метод факторизации, называемый также методом прогонки.

Суть метода заключается в переходе к разностным уравнениям первого порядка:

$$\phi_{k+1} = \mu_k \phi_k - \theta_k, \quad \phi_{k-1} = \frac{\phi_k + \theta_{k-1}}{\mu_{k-1}}, \quad (2.56)$$

в которых коэффициенты  $\mu_k$ ,  $\theta_k$  определяются так, чтобы равенства (2.53), (2.54) выполнялись как тождества. Заменяя в этих равенствах потоки  $\phi_{k+1}$ ,  $\phi_{k-1}$  выражениями (2.56), получим:

$$\phi_1 (a_1 \mu_1 - b_1) - a_1 \theta_1 = -f_1,$$

$$\phi_k (a_k \mu_k - b_k + c_k \mu_{k-1}^{-1}) - a_k \theta_k + \frac{c_k}{\mu_{k-1}} \theta_{k-1} = -f_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Отсюда вытекают следующие соотношения между коэффициентами  $\mu_k$ ,  $\theta_k$  и  $\mu_{k-1}$ ,  $\theta_{k-1}$  в двух узлах сетки:

$$\mu_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad \theta_1 = \frac{f_1}{a_1}, \quad (2.57)$$

$$\mu_k = \frac{b_k}{a_k} - \frac{c_k}{a_k \mu_{k-1}}, \quad \theta_k = \frac{f_k}{a_k} + \frac{c_k}{a_k} \frac{\theta_{k-1}}{\mu_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Учитывая выражения (2.56) и (2.57), приходим к следующей схеме расчёта потоков. Вначале по значениям  $\mu_1, \theta_1$ , полученным по формулам (2.57), определяют остальные коэффициенты  $\mu_k, \theta_k$ , последовательно перемещаясь от точки  $k = 2$  до точки  $k = N - 1$ . Записав второе соотношение (2.56) для точки  $k = N$  и учитывая, что  $\phi_N = 0$ , находим значение  $\phi_{N-1}$ . Затем по той же формуле (2.56) рассчитываем остальные значения потоков, двигаясь в направлении уменьшения номера  $k$  точки:  $\phi_{N-2}, \phi_{N-3}, \dots, \phi_2, \phi_1$ .

В плоской геометрии ( $\nu = 0$ ) вместо первого условия в (2.43) может приниматься  $\phi(0) = 0$ . Это соответствует реактору, который не обладает свойством симметрии и в котором при  $r = 0$  находится экстраполированная граница. Тогда можно к основной сетке разбиения в 1-й зоне добавить точку с номером  $k = 0$ , поместив её на границу  $r = 0$ . Считая по-прежнему, что  $N_1$  – число точек вспомогательной сетки в 1-й зоне, и рассчитывая шаг сетки в этой зоне по формуле  $\Delta r^{(1)} = \frac{\Delta R_1}{N_1}$ , получим:

$r_{(1/2)} = \frac{\Delta r^{(1)}}{2}$ ,  $r_1 = \Delta r^{(1)}$ . Координаты других точек находятся по формулам (2.47). На рис.2.4 (в верхнем правом углу) представлено расположение точек, когда  $N_1 = 4$ .

В этом случае конечно-разностное уравнение (2.51), записанное для точки  $k = 1$ , также приводится к виду (2.53). Однако для коэффициента  $b_1$  вместо (2.55) имеем:

$$b_1 = a_1 + \frac{1}{3 \tilde{\Sigma}_{1/2} \Delta r_{1/2}} + \langle \Sigma \rangle_1 \Delta V_1. \quad (2.58)$$

Остальные формулы ничем не отличаются от тех, которые получены ранее.

В заключение отметим, что использование метода факторизации не приводит к возрастанию ошибок округления, т.е. расчётная схема (2.56) устойчива. Это можно продемонстрировать на примере плоского реактора без отражателя. Учитывая, что в таком реакторе  $\Sigma$ ,  $\tilde{\Sigma}$ ,  $\Delta r$  не меняются от одной точки к другой, имеем:

$$a_k = c_k = \frac{1}{3\tilde{\Sigma}\Delta r}, \quad b_k = \frac{2}{3\tilde{\Sigma}\Delta r} + \Sigma\Delta r, \quad \mu_k = 2 + h - \frac{1}{\mu_{k-1}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

$$\mu_1 = 2 + h, \quad h = 3\tilde{\Sigma}\Sigma(\Delta r)^2 > 0.$$

Последовательность  $\{\mu_k\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  является монотонно убывающей и ограниченной снизу. Поэтому существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \xi, \text{ который можно найти из равенства } \mu = 2 + h - \frac{1}{\mu}, \text{ т.е.}$$

как корни уравнения:

$$\mu^2 - (2 + h)\mu + 1 = 0.$$

Очевидно, нужно выбрать наименьший корень

$$\tilde{\mu} = 1 + \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} + h}, \text{ что вытекает из анализа сходимости}$$

последовательности  $\{\mu_k\}$  (а также подтверждает рис.6). Причём, значение  $\tilde{\mu} < 1$ , поскольку  $h > 0$ .

Теперь допустим, что при расчёте потока нейтронов в точке  $r_k$  возникла ошибка округления  $\delta_k$ , а вместо истинного значения  $\phi_k$  получено приближённое значение  $\tilde{\phi}_k = \phi_k + \delta_k$ . Тогда при переходе к другим точкам  $r_{k+s}$  ( $s \geq 1$ ) и определении  $\phi_{k+s}$  по формулам (2.56) ошибка  $\delta_{k+s} = \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_{k+s-1} \delta_k$ . Если считать, что значение  $k$  велико (т.е. точка  $r_k$  находится далеко от границы), то можно принять  $\mu_k = \mu_{k+1} = \dots = \tilde{\mu}$  и поэтому  $\delta_{k+s} = (\tilde{\mu})^s \delta_k$ . Таким образом, ошибка убывает (так как  $\tilde{\mu} < 1$ ), стремясь к нулю, со скоростью геометрической прогрессии.

## 2.6. Конечно-разностные уравнения двумерного реактора

Особенности численного метода расчёта распределений нейтронов в более сложных моделях рассмотрим на примере многозонного цилиндрического реактора, симметричного относительно центральной оси и диаметральной плоскости. Выбирая для описания нейтронного поля в таком реакторе цилиндрическую систему координат, получим, что поток  $\phi(r, z)$  будет зависеть лишь от двух переменных:  $r$  и  $z$  – расстояний до оси и плоскости симметрии, соответственно. При этом ток нейтронов  $\vec{J}(r, z) = I(r, z)\vec{e}_r + Y(r, z)\vec{e}_z$ , а уравнения (2.37) можно записать в виде (по-прежнему номер итерации опускаем):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rI(r, z))}{\partial r} + \frac{\partial Y(r, z)}{\partial z} + \Sigma(r, z)\phi(r, z) = q(r, z), \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial r} + 3\tilde{\Sigma}(r, z)I(r, z) = 0, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} + 3\tilde{\Sigma}(r, z)Y(r, z) = 0. \quad (2.61)$$

Как и раньше считаем, что макроскопические сечения  $\Sigma(r, z)$ ,  $\tilde{\Sigma}(r, z)$  и источник  $q(r, z)$  терпят разрывы на границах зон  $r = R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $z = H_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), а при  $r = R_n$ ,  $z = H_m$  расположены экстраполированные границы реактора (рис.2.5). Поток  $\phi(r, z)$  и проекции тока  $I(r, z)$ ,  $Y(r, z)$  нейтронов непрерывны в области  $0 \leq r \leq R_n$ ,  $0 \leq z \leq H_m$  и удовлетворяют граничным условиям:

$$J(0, z) = 0, \quad Y(r, 0) = 0, \quad \phi(R_n, z) = 0, \quad \phi(r, H_m) = 0. \quad (2.62)$$

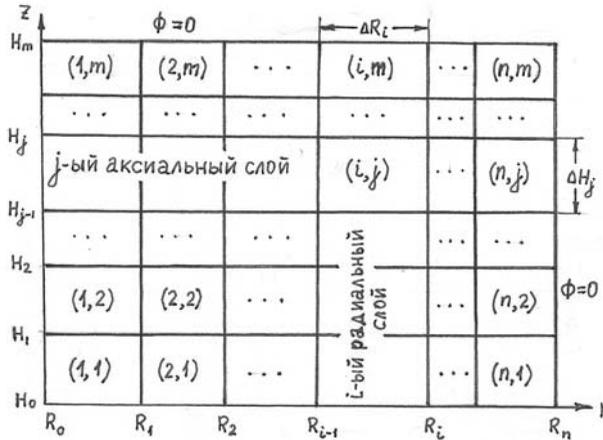


Рис.2.5. Расположение зон в 2-мерном цилиндрическом реакторе

Учитывая замечания, сделанные в разделе 2.4 (относительно расположения точек), разместим на отрезках  $0 \leq r \leq R_n$ ,  $0 \leq z \leq H_m$  по две системы узловых точек с постоянными в пределах интервалов  $\Delta R_i = R_i - R_{i-1}$  и  $\Delta H_j = H_j - H_{j-1}$  шагами  $\Delta r^{(i)}$  и  $\Delta z^{(j)}$  соответственно. Как и в одномерной геометрии, некоторые из точек основной системы попадут на границы раздела зон. Значения  $\Delta r^{(i)}$  и  $\Delta z^{(j)}$  рассчитываем по формулам вида (2.45) при заданном числе узлов  $N_i$  (или  $M_j$ ) вспомогательных сеток на интервалах  $\Delta R_i$  (или  $\Delta H_j$ ). Пронумеровав точки в направлении удаления от начала координат, определим координаты  $\{r_k, r_{k-(1/2)}, k = 1, 2, \dots, N\}$  точек, расположенных на оси  $r$ , и координаты  $\{z_l, z_{l-(1/2)}, l = 1, 2, \dots, M\}$  точек, находящихся на оси  $z$ . При этом следует учесть, что

$$r_1 = \frac{\Delta r^{(1)}}{2}, \quad r_{1/2} = 0, \quad z_1 = \frac{\Delta z^{(1)}}{2}, \quad z_{1/2} = 0, \quad N = \sum_{i=1}^n N_i, \quad M = \sum_{j=1}^m M_j.$$

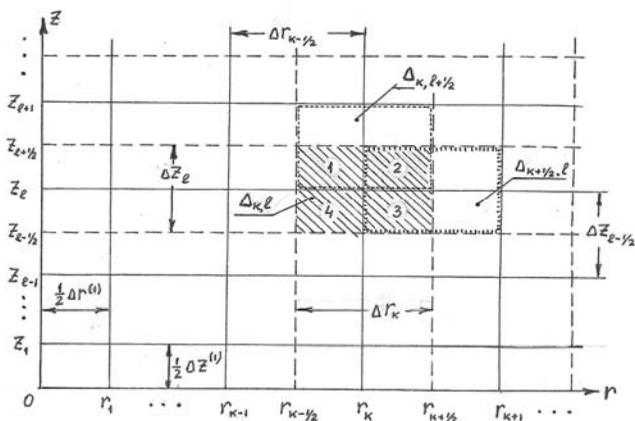


Рис.2.6. Сетка точек и области интегрирования в  $r - z$  геометрии цилиндрического реактора

Через точки с координатами  $(0, z_l)$ ,  $(0, z_{l-(1/2)})$  проведём плоскости, параллельные диаметральной плоскости  $z = 0$ , а через точки с координатами  $(r_k, 0)$ ,  $(r_{k-(1/2)}, 0)$  – цилиндрические поверхности с общей осью, расположенной при  $r = 0$ . В результате область  $0 \leq r \leq R_n$ ,  $0 \leq z \leq H_m$  разбивается на ряд элементарных областей, а в плоскости, проходящей через ось цилиндра, образуется двумерная сетка основных  $(r_k, z_l)$ , промежуточных  $(r_k, z_{l-(1/2)})$ ,  $(r_{k-(1/2)}, z_l)$  и вспомогательных  $(r_{k-(1/2)}, z_{l-(1/2)})$  точек. В той же плоскости элементарным областям соответствуют прямоугольники, один из которых  $\Delta_{k,l}$  (соответствующий области  $W_{k,l}$ ) заштрихован на рис.2.6.

Умножим уравнение (2.59) на  $r$ , а затем проинтегрируем по области  $W_{k,l}$ , включающей точки с координатами

$$r_{k-(1/2)} \leq r \leq r_{k+(1/2)}, \quad z_{k-(1/2)} \leq z \leq z_{k+(1/2)}, \quad \text{уравнение} \quad (2.60)$$

проинтегрируем по области  $W_{k+(1/2),l}$  :  
 $r_k \leq r \leq r_{k+1}$ ,  $z_{l-(1/2)} \leq z \leq z_{l+(1/2)}$ , а уравнение (2.61) – по области  $W_{k,l+(1/2)}$  :  
 $r_{k-(1/2)} \leq r \leq r_{k+(1/2)}$ ,  $z_l \leq z \leq z_{l+1}$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} & \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \left[ Y(r, z_{l+(1/2)}) - Y(r, z_{l-(1/2)}) \right] r dr + \int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \Sigma(r, z) \phi(r, z) r dr dz + \\ & + \int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \left[ r_{k+(1/2)} I(r_{k+(1/2)}, z) - r_{k-(1/2)} I(r_{k-(1/2)}, z) \right] dz = \int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} q(r, z) r dr dz \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \left[ \phi(r_{k+1}, z) - \phi(r_k, z) \right] dz + 3 \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \tilde{\Sigma}(r, z) I(r, z) dz dr = 0, \quad (2.64)$$

$$\int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \left[ \phi(r, z_{l+1}) - \phi(r, z_l) \right] dr + 3 \int_{z_l}^{z_{l+1}} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \tilde{\Sigma}(r, z) Y(r, z) dr dz = 0. \quad (2.65)$$

Дальнейшие преобразования в основном совпадают с теми, которые проводились в одномерной геометрии. Функции  $\phi(r, z)$ ,  $I(r, z)$ ,  $Y(r, z)$  раскладываются в ряды Тэйлора в окрестности точек, совпадающих с центрами элементарных областей  $W_{k,l}$ ,  $W_{k+(1/2),l}$ ,  $W_{k,l+(1/2)}$  соответственно. В качестве координат таких точек принимаются:  $(r_k, z_l)$  - для потока  $\phi(r, z)$ ,  $(r_{k+(1/2)}, z_l)$  - для проекции тока  $I(r, z)$  и  $(r_k, z_{l+(1/2)})$  - для проекции  $Y(r, z)$ . Что касается функции  $q(r, z)$ , которая может терпеть разрывы на границах  $r = r_k$  и  $z = z_l$ , то она раскладывается в ряды Тейлора в окрестности точек с координатами

$$(r_k + 0, z_l + 0), (r_k + 0, z_l - 0), (r_k - 0, z_l + 0), (r_k - 0, z_l - 0),$$

принадлежащими разным областям  $W_{k,l}^{(s)}$  (они отмечены на рис.2.6 значениями  $s=1, 2, 3, 4$ ). Предполагая далее, что функции  $\phi(r, z)$ ,  $I(r, z)$ ,  $Y(r, z)$ ,  $q(r, z)$  слабо меняются в пределах

указанных выше элементарных областей и шаги сеток  $\Delta r^{(i)}$ ,  $\Delta z^{(j)}$  малы, приходим к конечно-разностным уравнениям:

$$\begin{aligned} & (r_{k-(1/2)} I_{k-(1/2),l} - r_{k+(1/2)} I_{k+(1/2),l}) \Delta z_l + (Y_{k,l-(1/2)} - Y_{k,l+(1/2)}) \Delta V_k - \\ & - \langle \Sigma \rangle_{k,l} \phi_{k,l} \Delta W_{k,l} = -\langle q \rangle_{k,l} \Delta W_{k,l}, \quad (2.66) \\ & (k = 1, 2, \dots, N-1, \quad l = 1, 2, \dots, M-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{k-(1/2),l} &= \frac{\phi_{k-1,l} - \phi_{k,l}}{3 \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k-(1/2),l} \Delta r_{k-(1/2)}}, \quad k = 2, 3, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, M-1, \\ Y_{k,l-(1/2)} &= \frac{\phi_{k,l-1} - \phi_{k,l}}{3 \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k,l-(1/2)} \Delta z_{l-(1/2)}}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad l = 2, 3, \dots, M. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \phi_{k,l} &= \phi(r_k, z_l), \quad I_{k-(1/2),l} = I(r_{k-(1/2)}, z_l), \quad Y_{k,l-(1/2)} = Y(r_k, z_{l-(1/2)}), \\ \phi_{k,l} &= \phi(r_k, z_l), \quad I_{k-(1/2),l} = I(r_{k-(1/2)}, z_l), \quad \Delta V_k = \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} r \, dr, \quad (2.68) \\ \Delta r_k &= r_{k+(1/2)} - r_{k-(1/2)}, \quad \Delta z_l = z_{l+(1/2)} - z_{l-(1/2)}, \quad \Delta W_{k,l} = \Delta V_k \Delta z_l, \\ \Delta r_k &= r_{k+(1/2)} - r_{k-(1/2)}, \quad \Delta z_l = z_{l+(1/2)} - z_{l-(1/2)}, \quad \Delta z_{l-(1/2)} = z_l - z_{l-1}, \\ \langle \Sigma \rangle_{k,l} &= \frac{1}{\Delta W_{k,l}} \int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \Sigma(r, z) r \, dr \, dz, \quad \langle q \rangle_{k,l} = \frac{1}{\Delta W_{k,l}} \int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} q(r, z) r \, dr \, dz \\ \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k-(1/2),l} &= \frac{1}{\Delta z_l} \int_{z_{l-(1/2)}}^{z_{l+(1/2)}} \tilde{\Sigma}(r_{k-(1/2)}, z) \, dz, \quad \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k,l-(1/2)} = \frac{1}{\Delta r_k} \int_{r_{k-(1/2)}}^{r_{k+(1/2)}} \tilde{\Sigma}(r, z_{l-(1/2)}) \, dr. \end{aligned}$$

Уравнения (2.66) (каждое из них выражает баланс нейтронов в элементе объёма  $\Delta W_{k,l}$ ) необходимо дополнить условиями (2.62), которые запишутся в виде:

$$J_{(1/2),l} = 0, \quad Y_{k,(1/2)} = 0, \quad \phi_{N,l} = 0, \quad \phi_{k,M} = 0. \quad (2.70)$$

Учитывая соотношения (2.67), (2.68) и первые два равенства (2.70), уравнения (2.66) можно привести к виду:

$$a_{k,l} \phi_{k+1,l} + b_{k,l} \phi_{k,l+1} + c_{k,l} \phi_{k-1,l} + d_{k,l} \phi_{k,l-1} - p_{k,l} \phi_{k,l} = -f_{k,l}, \quad (2.71)$$

где

$$a_{k,l} = \frac{r_{k+(1/2)} \Delta z_l}{3 \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k+(1/2),l} \Delta r_{k+(1/2)}}, \quad b_{k,l} = \frac{\Delta V_k}{3 \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k,l+(1/2)} \Delta z_{l+(1/2)}}, \quad f_{k,l} = \langle q \rangle_{k,l} \Delta W_{k,l},$$

$$p_{k,l} = a_{k,l} + b_{k,l} + c_{k,l} + d_{k,l} + \langle \Sigma \rangle_{k,l} \Delta W_{k,l}, \quad (2.72)$$

а коэффициенты  $c_{k,l}$ ,  $d_{k,l}$  принимают значения:

$$c_{1,l} = 0, \quad c_{k,l} = \frac{r_{k-(1/2)} \Delta z_l}{3 \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k-(1/2),l} \Delta r_{k-(1/2)}}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad l = 1, 2, \dots,$$

$$d_{k,1} = 0, \quad d_{k,l} = \frac{\Delta V_k}{3 \langle \tilde{\Sigma} \rangle_{k,l-(1/2)} \Delta z_{l-(1/2)}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l = 2, 3, \dots$$

Уравнения (2.71) вместе с условиями (2.70) на экстраполированных границах образуют систему из  $NM$  линейных алгебраических уравнений с таким же числом неизвестных. Каждое уравнение помимо потока  $\phi_{k,l}$  в точке  $(r_k, z_l)$  содержит потоки в четырёх ближайших узлах двумерной сетки разбиения. Только в уравнениях, записанных при значениях  $k=1, l=1, 2, \dots$  или для значений  $l=1, k=1, 2, \dots$ , число неизвестных меньше. Поэтому сразу нельзя воспользоваться методом прогонки. Однако, если ввести в рассмотрение вектор  $\vec{\phi}_k$  с компонентами  $\phi_{k,1}, \phi_{k,2}, \dots, \phi_{k,M-1}$ , то система уравнений (2.71) преобразуется к виду:

$$\hat{A}_1 \vec{\phi}_2 - \hat{B}_1 \hat{\phi}_1 = -\vec{F}_1,$$

$$\hat{A}_k \vec{\phi}_{k+1} - \hat{B}_k \vec{\phi}_k + \hat{C}_k \vec{\phi}_{k-1} = -\vec{F}_k, \quad k = 2, 3, \dots, N-1, \quad (2.73)$$

где элементы векторов  $\vec{F}_k$ , диагональных матриц  $\hat{A}_k, \hat{C}_k$  и трёх диагональных матриц  $\hat{B}_k$  непосредственно выражаются через коэффициенты (2.72).

Теперь каждое уравнение становится «трехточечным», связывая значения неизвестных векторов в 3-х подряд стоящих узлах. Это позволяет для решения системы уравнений (2.73) применить метод матричной факторизации.

Следуя изложенному в разделе 2.4 алгоритму и заменяя алгебраические операции матричными, запишем:

$$\vec{\phi}_{k+1} = \hat{\mu}_k \vec{\phi}_k - \vec{\theta}_k, \quad \vec{\phi}_{k-1} = \hat{\mu}_k^{-1} (\vec{\phi}_k + \vec{\theta}_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.74)$$

Подставив в уравнения (2.73) вместо  $\vec{\phi}_{k+1}, \vec{\phi}_{k-1}$  выражения (2.74), придём к следующим формулам для нахождения  $\hat{\mu}_k, \vec{\theta}_k$ :

$$\hat{\mu}_1 = \hat{A}_1^{-1} \hat{B}_1, \quad \vec{\theta}_1 = \hat{A}_1^{-1} \vec{F}_1, \quad (2.75)$$

$$\hat{\mu}_k = \hat{A}_k^{-1} (\hat{B}_k - \hat{C}_k \hat{\mu}_{k-1}^{-1}), \quad \vec{\theta}_k = \hat{A}_k^{-1} (\vec{F}_k + \hat{C}_k \hat{\mu}_{k-1}^{-1} \vec{\theta}_{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots$$

Рассчитав  $\hat{\mu}_k, \vec{\theta}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N-1$ ) по формулам (2.75) и приняв  $\vec{\phi}_N = 0$ , получим остальные вектора  $\vec{\phi}_{N-1}, \vec{\phi}_{N-2}, \dots, \vec{\phi}_1$ , используя соотношения (2.74).

Из равенств (2.74), (2.75) следует, что помимо сравнительно несложных операций вычисления диагональных матриц  $\hat{A}_k^{-1}$ , сложения и перемножения матриц приходится находить обратные матрицы  $\hat{\mu}_k^{-1}$ . Поскольку  $\hat{\mu}_k$  относятся к матрицам общего вида и имеют большую размерность (равную числу узлов  $M-1$ ), то получение  $\hat{\mu}_k^{-1}$  для всех точек  $k = 1, 2, \dots, N-1$  занимает много времени, а их хранение – большой объём памяти ЭВМ. Поэтому метод матричной факторизации не нашёл широкого применения при расчётах распределений нейтронов в 2- и 3-мерных геометриях. Обычно используют итерационные методы решения уравнений (2.71).

Самым несложным, с точки зрения организации вычислений, является метод простой итерации. Он базируется на использовании важного свойства коэффициентов в уравнениях (2.71):

$$\lambda_{k,l} = \frac{a_{k,l} + b_{k,l} + c_{k,l} + d_{k,l}}{p_{k,l}} < 1, \quad (2.76)$$

которое имеет место, поскольку  $\langle \Sigma \rangle_{k,l} > 0$ . Поэтому предлагается на каждой итерации  $t$  сумму  $a_{k,l} \phi_{k+1,l} + b_{k,l} \phi_{k,l+1} + c_{k,l} \phi_{k-1,l} + d_{k,l} \phi_{k,l-1}$  оценивать на потоках с предыдущей итерации. В результате приходят к следующей схеме:

$$p_{k,l} \phi_{k,l}^{(t)} = f_{k,l} + a_{k,l} \phi_{k+1,l}^{(t-1)} + b_{k,l} \phi_{k,l+1}^{(t-1)} + c_{k,l} \phi_{k-1,l}^{(t-1)} + d_{k,l} \phi_{k,l-1}^{(t-1)}, \quad (2.77)$$

где  $\phi_{k,l}^{(t)}$  – значения потоков в точках двумерной сетки на итерации  $t = 1, 2, \dots$ , а  $\phi_{k,l}^{(0)}$  – любые неотрицательные числа.

Итерационная схема (2.77) расчёта потоков всегда сходится [10]. Однако, если отношение (2.76) не очень сильно отличается от единицы, то приходится проводить много итераций. Поэтому обычно используют различные методы ускорения сходимости. Остановимся лишь на некоторых приёмах, связанных с иным способом организации вычислений.

Если предположить, что итерации по схеме (2.77) сходятся монотонно, то можно ожидать более быстрое продвижение к искомому решению, используя при определении  $\phi_{k,l}^{(t)}$  информацию о потоках, полученных на той же итерации, но для других точек. Тогда итерационная схема принимает вид:

$$p_{k,l} \phi_{k,l}^{(t)} = f_{k,l} + c_{k,l} \phi_{k-1,l}^{(t)} + d_{k,l} \phi_{k,l-1}^{(t)} + a_{k,l} \phi_{k+1,l}^{(t-1)} + b_{k,l} \phi_{k,l+1}^{(t-1)}. \quad (2.78)$$

Здесь принято, что для горизонтального ряда точек (с одним и тем же значением  $l$ ) расчёт потоков ведётся в направлении роста  $k$ , а переход к следующему ряду всегда сопровождается увеличением  $l$  на единицу.

В двумерных задачах с простой прямоугольной сеткой часто используется метод переменных направлений. В основе метода лежит переход на каждой итерации к 3-точечным уравнениям относительно  $\phi_{k+1,l}$ ,  $\phi_{k,l}$ ,  $\phi_{k-1,l}$  (или  $\phi_{k,l+1}$ ,  $\phi_{k,l}$ ,  $\phi_{k,l-1}$ ), которые могут быть решены методом прогонки. При этом считается, что слагаемые  $b_{k,l} \phi_{k,l+1}$ ,  $d_{k,l} \phi_{k,l-1}$  (или  $a_{k,l} \phi_{k+1,l}$ ,  $c_{k,l} \phi_{k-1,l}$ ), учитывающие перемещения нейтронов вдоль оси  $z$  (или  $r$ ), получены на потоках из предыдущей итерации.

Пусть  $\phi_{k,l}^{(t)}$ ,  $\phi_{k,l}^{(t+(0.5))}$  – значения потоков в итерациях с номерами  $t$  и  $t + (0.5)$ , где:  $t + (0.5)$  – условное обозначение номера итерации между  $t$  и  $t + 1$ . Тогда итерационную схему получения потоков можно представить как последовательное решение двух систем уравнений:

$$a_{k,l} \phi_{k+1,l}^{(t)} - p_{k,l} \phi_{k,l}^{(t)} + c_{k,l} \phi_{k-1,l}^{(t)} = -f_{k,l} - b_{k,l} \phi_{k,l+1}^{(t-(0.5))} - d_{k,l} \phi_{k,l-1}^{(t)}, \quad (2.79)$$

$$b_{k,l} \phi_{k,l+1}^{(t+(0.5))} - p_{k,l} \phi_{k,l}^{(t+(0.5))} + d_{k,l} \phi_{k,l-1}^{(t+(0.5))} = -f_{k,l} - a_{k,l} \phi_{k+1,l}^{(t)} - c_{k,l} \phi_{k-1,l}^{(t+(0.5))}. \quad (2.80)$$

Предполагается, что при рассмотрении системы (2.79) уравнения решаются для горизонтального ряда точек, начиная с ряда  $l = 1$ , а при рассмотрении системы (2.80) – для вертикального ряда, начиная с ряда  $k = 1$ . В качестве начальных значений принимаются любые  $\phi_{k,l}^{(0.5)} \geq 0$ .

### **Глава 3. МЕТОДЫ РАСЧЁТА ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ**

В односкоростном диффузионном приближении принималось, что диффузия, рождение и поглощение нейтронов происходит при одной и той же энергии. На самом деле появляющиеся в окрестности какой-либо точки  $\vec{r}$  активной зоны нейтроны деления в процессе упругих и неупругих столкновений с ядрами теряют энергию, удаляются от места рождения, а часть из них может поглотиться или выйти за пределы зоны прежде, чем вызовут деления ядер топлива. Такой переход нейтронов из одной зоны в другую совместно с другими процессами отражается на скорости протекания цепной реакции деления, пространственных распределениях  $\phi(\vec{r}, E)$  нейтронов разных энергий  $E$  и физических характеристиках реактора.

#### **3.1. Реактор без отражателя в диффузионно-возрастном приближении**

Оценим влияние перечисленных выше факторов на величину эффективного коэффициента размножения  $K_{эф}$  и асимптотический поток  $\phi(\vec{r}, E)$  в реакторе без отражателя, распределение нейтронов в котором находится в диффузионно-возрастном приближении. В этом приближении выделяются два интервала энергий:  $E_c < E < E_0$  – для замедляющихся нейтронов и  $0 \leq E \leq E_c$  – для тепловых нейтронов, где  $E_0$  и  $E_c$  – условные верхние границы для

замедляющихся и тепловых нейтронов (часто  $E_c$  совпадает с энергией шивки спектров Максвелла и Ферми). Наряду с понятиями, принятыми в главе 2, используются:

- летаргия нейтронов  $u = \ln \frac{E_0}{E}$ , где  $E_0$  – заранее выбранное (обычно максимально возможное) значение энергии;
- ступенька замедления  $\Delta_l = E(1 - \varepsilon_l)$  – наибольшее изменение энергии нейтрона при одном столкновении с ядром сорта  $l$ , если до столкновения он имел энергию  $E$ ,  $\varepsilon_l = \left( \frac{A_l - 1}{A_l + 1} \right)^2$ ,  $A_l$  – атомная масса ядра;
- замедляющая способность среды  $\xi \Sigma_s$ , где  $\xi$  – средняя логарифмическая потеря энергии при одном столкновении нейтрона в смеси ядер;
- возраст нейтронов  $\tau$ , соответствующий энергии  $E$  (или летаргии  $u$ ):

$$\tau = \int_E^{E_0} \frac{D(E')}{\xi \Sigma_s(E')} \frac{dE'}{E'} = \int_0^u \frac{D(u')}{\xi \Sigma_s(u')} du'; \quad (3.1)$$

- плотность замедления  $j(\vec{r}, u)$ , равная числу замедляющихся нейтронов, находящихся в единичном объёме в окрестности точки  $\vec{r}$  и переходящих в единицу времени из области  $u' < u$  в область  $u'' > u$ :

$$j(\vec{r}, u) = \int_0^u \Sigma_s(u') \phi_0(\vec{r}, u') \int_u^\infty W_s(u' \rightarrow u'') du'' du'. \quad (3.2)$$

Ограничимся рассмотрением реактора достаточно больших размеров, в котором размножение нейтронов происходит в основном за счёт деления ядер топлива нейтронами низких энергий. Будем также считать, что:

- все нейтроны деления появляются с одной и той же энергией  $E_{\max} > E_0$ , а в качестве  $E_0$  выбрана условная энергия порога деления сырьевого материала;

- плотность замедления  $j(\vec{r}, E_0)$  может быть представлена в виде:

$$j(\vec{r}, E_0) = \mu \int_0^{E_0} \nu_f \Sigma_f(E) \phi_0(\vec{r}, E) dE, \quad (3.3)$$

что соответствует определению коэффициента  $\mu$  как отношения числа нейтронов, замедлившихся за порог  $E = E_0$ , к числу нейтронов, появившихся за счёт деления ядерного горячего нейтронами с энергиями  $0 \leq E \leq E_0$ ;

- замедление нейтронов происходит в основном за счёт упругих столкновений с ядрами, имеющими небольшие значения  $\Delta_l$ ;

- упругое рассеяние нейтронов сферически симметрично в системе центра масс и плотность вероятности рассеяния равна

$$W_{s,l}(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{E'(1-\varepsilon_l)}, & E \in [\varepsilon_l E', E'] \\ 0, & E \notin [\varepsilon_l E', E'] \end{cases},$$

либо (если рассматривать в шкале летаргии): (3.4)

$$W_{s,l}(u' \rightarrow u) = \begin{cases} \frac{\exp(u' - u)}{1 - \varepsilon_l}, & u \in [u', u' + \delta_l] \\ 0, & u \notin [u', u' + \delta_l] \end{cases},$$

где  $\delta_l = -\ln(\varepsilon_l)$  – ступенька замедления в шкале летаргии;

- сильное (резонансное) поглощение нейтронов сосредоточено при значении  $E = E_c$  и учитывается с помощью коэффициента  $\varphi$  – вероятности избежать резонансного поглощения (тогда в уравнении (1.18) учитывается лишь слабое поглощение нейтронов).

Энергетическое распределение замедляющихся нейтронов удобно описывать в функции летаргии. В этом случае уравнение (1.18) удаётся (в возрастном приближении) привести к более простому виду [2], выполнив следующие преобразования.

Во-первых, дифференцируя равенство (3.2) по летаргии  $u$ , получим:

$$\frac{\partial j(\vec{r}, u)}{\partial u} = \Sigma_s(u) \phi(\vec{r}, u) \int_u^\infty W_s(u \rightarrow u'') du'' - \int_0^u \Sigma_s(u') W_s(u' \rightarrow u) \phi(\vec{r}, u') du',$$

где  $\int_u^\infty W_s(u \rightarrow u'') du'' = 1$ , так как при столкновениях с ядрами нейтроны теряют энергию и лётаргия  $u''$  примет одно из значений  $u \leq u'' < \infty$ . Тогда интеграл  $Q_s = \int_{E'} \Sigma_s(E') W_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E') dE'$  будет равен разности  $Q_s = \Sigma_s(u) \phi(\vec{r}, u) - \frac{\partial j(\vec{r}, u)}{\partial u}$ , а уравнения

(1.18) примут вид:

$$\operatorname{div} \vec{J}(\vec{r}, u) + \Sigma_a(u) \phi(\vec{r}, u) + \frac{\partial j(\vec{r}, u)}{\partial u} = 0, \quad (3.5)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, u) = -D(u) \operatorname{grad} \phi(\vec{r}, u).$$

При этом учтено, что в области  $0 \leq u \leq u_c$  не появляются нейтроны деления и нет внешних источников нейтронов.

Во-вторых, упростим выражение (3.2), считая, что плотность столкновения  $\Sigma_s(u) \phi(\vec{r}, u)$  непрерывна и слабо меняется на интервале  $\delta_l = -\ln \varepsilon_l$ . В этом случае, записывая вместо (3.2) равенство

$$j(\vec{r}, u) = \sum_l \int_{u-\delta_l}^u \Sigma_{s,l}(u') \phi(\vec{r}, u') \int_u^{u'+\delta_l} W_{s,l}(u' \rightarrow u'') du'' du'$$

и принимая  $\Sigma_{s,l}(u') \phi(\vec{r}, u') \approx \Sigma_{s,l}(u) \phi(\vec{r}, u)$  при  $u - \delta_l \leq u' \leq u$ , получим:

$$\begin{aligned} j(\vec{r}, u) &\approx \sum_l \Sigma_{s,l}(u) \phi(\vec{r}, u) \int_{u-\delta_l}^u \int_u^{u'+\delta_l} W_{s,l}(u' \rightarrow u'') du'' du' = \\ &= \xi \Sigma_s(u) \phi(\vec{r}, u). \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\xi \Sigma_s = \sum_l \xi_l \Sigma_{s,l}, \quad \xi_l = \int_{u-\delta_l}^u \int_u^{u'+\delta_l} W_{s,l}(u' \rightarrow u'') du'' du' = 1 + \frac{\varepsilon_l \ln \varepsilon_l}{1 - \varepsilon_l}$$

В результате в области  $0 \leq u \leq u_c$  уравнение (1.18) для потока замедляющихся нейтронов  $\phi(\vec{r}, u)$  примет вид:

$$D(u) \Delta \phi(\vec{r}, u) - \Sigma_a(u) \phi(\vec{r}, u) = \frac{\partial(\xi \Sigma_s \phi)}{\partial u}.$$

Учитывая определение (3.1) возраста нейтронов и соотношение (3.6), его обычно записывают в форме:

$$\Delta j(\vec{r}, \tau) - \frac{1}{L_\tau^2} j(\vec{r}, \tau) = \frac{\partial j(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau}, \quad (3.7)$$

где  $L_\tau^2 = \frac{D(\tau)}{\Sigma_a(\tau)}$  – квадрат длины диффузии нейтронов возраста  $\tau$ .

При нахождении распределения тепловых нейтронов следует учитывать, что они в результате упругих столкновений с находящимися в тепловом движении ядрами могут как потерять, так и приобрести энергию. Поэтому плотность вероятности рассеяния  $W_s(E' \rightarrow E)$  описывается более сложной по сравнению с (3.4) функцией, зависящей от особенностей связей атомов в молекулах и кристаллах. Это сильно затрудняет получение потока  $\phi(\vec{r}, E)$  при энергиях  $0 \leq E \leq E_c$ . В дальнейшем ограничимся простым приближённым способом, заключающимся в следующем.

Известно [2], что в бесконечной среде без поглощения распределение тепловых нейтронов по энергиям описывается спектром Максвелла  $M(E, T)$  и выполняется принцип детального равновесия для потока  $\Phi(E, T) = \nu(E) M(E, T)$ :

$$\Sigma_s(E') W_s(E' \rightarrow E) \Phi(E', T) = \Sigma_s(E) W_s(E \rightarrow E') \Phi(E, T), \quad (3.8)$$

где  $T$  – температура среды. Можно предположить, что в реакторе больших размеров при слабом поглощении распределение нейтронов по энергиям будет мало отличаться от спектра Максвелла по форме, но окажется сдвинутым в сторону больших энергий. Этот сдвиг происходит потому, что нейтроны не успевают прийти к тепловому равновесию из-за поглощения. В области энергий  $0 \leq E \leq E_c$  микроскопические сечения поглощения  $\sigma_{a,l}(E)$  тяжёлых ядер топлива меняются по закону, близкому к виду:

$$\sigma_{a,l}(E) = \sigma_{a,l}(E^{(0)}) \sqrt{\frac{E^{(0)}}{E}},$$

где  $E^{(0)}$  – фиксированное значение энергии, а  $\sigma_{a,l}(E)$  – сечение поглощения нейтронов ядрами сорта  $l$ . Указанное смещение будет тем больше, чем больше среднее сечение поглощения  $\Sigma_{a,T}$  тепловых нейтронов и чем меньше замедляющая способность среды  $\xi \Sigma_s$ .

Учитывая известное соотношение между энергией и температурой ( $E = kT$ ), вводят в рассмотрение эффективную температуру нейтронов  $T_n$ :

$$T_n = T \left( 1 + a \frac{\Sigma_{a,T}}{\xi \Sigma_s} \right) \quad (3.9)$$

и описывают энергетическое распределение нейтронов функцией  $M(E, T_n)$ . В выражении (3.9):  $a$  – коэффициент, зависящий от связей атомов в веществе. Таким образом, приходят к представлению потока нейтронов  $\phi_0(\vec{r}, E)$  в области энергий  $0 \leq E \leq E_c$  в форме:

$$\phi(\vec{r}, E) = \nu(E) M(E, T_n) \psi_T(\vec{r}) . \quad (3.10)$$

Представим в уравнении (1.18) интеграл рассеяния  $Q_s(E) = \int_{E'} \Sigma_s(E') W_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E') dE'$  в виде суммы

$Q_s(E) = Q_{s,1}(E) + Q_{s,2}(E)$ , где слагаемые имеют вид:

$$Q_{s,1}(E) = \int_0^{E_c} \Sigma_s(E') W_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E') dE' ,$$

$$Q_{s,2}(E) = \int_{E_c}^{E_0} \Sigma_s(E') W_s(E' \rightarrow E) \phi(\vec{r}, E') dE' .$$

Здесь первое слагаемое отвечает за появление нейтронов с энергией  $E$  в результате упругих столкновений тепловых нейтронов, а второе – в результате столкновений замедляющихся нейтронов. После этого проинтегрируем уравнение (1.18) по  $E$  в пределах  $0 \leq E \leq E_c$ . Считая, что вероятность тепловым нейтронам при столкновениях с ядрами приобрести энергию

$E' > E_c$  ничтожно мала, а также принимая во внимание соотношения (3.4), получим:

$$\int_0^{E_c} Q_{s,1}(E) dE = \int_0^{E_c} \Sigma_s(E) \phi(\vec{r}, E) \int_0^{E_c} W_s(E \rightarrow E') dE' dE = \int_0^{E_c} \Sigma_s(E) \phi(\vec{r}, E) dE, \quad (3.11)$$

$$\int_{E_c}^{E_0} Q_{s,2}(E) dE = \sum_l \int_{E_c}^{E_l} \Sigma_{s,l}(E') \phi(\vec{r}, E') \frac{E_c - \varepsilon_l E'}{E'(1 - \varepsilon_l)} dE' = j(\vec{r}, E_c), \quad (3.12)$$

$$- \operatorname{div} \int_0^{E_c} \vec{J}(\vec{r}, E) dE - \int_0^{E_c} \Sigma_a(E) \phi(\vec{r}, E) dE + \varphi j(\vec{r}, E_c) = 0, \quad (3.13)$$

где  $E_l = \min\left(E_0, \frac{E_c}{\varepsilon_l}\right)$ , концентрация ядер сорта  $l$ ,  $\sigma_{s,l}(E)$  – соответствующее микроскопическое сечение рассеяния и учтено, что из  $j(\vec{r}, E_c)$  нейтронов тепловыми становится лишь  $\varphi j(\vec{r}, E_c)$  нейтронов.

Введём в рассмотрение усреднённые по потоку  $\nu(E)M(E, T_n)$  сечения  $D_T$ ,  $\Sigma_{a,T}$ ,  $\nu_{f,T}\Sigma_{f,T}$  и скорость  $\nu_T$  тепловых нейтронов (подробнее об усреднении сечений говорится в разделе 3.2):

$$D_T = \frac{1}{F_T} \int_0^{E_c} D(E) \nu(E) M(E, T_n) dE, \quad \Sigma_{a,T} = \frac{1}{F_T} \int_0^{E_c} \Sigma_a(E) \nu(E) M(E, T_n) dE, \\ \nu_{f,T} \Sigma_{f,T} = \frac{1}{F_T} \int_0^{E_c} \nu_f \Sigma_f(E) \nu(E) M(E, T_n) dE, \quad \frac{1}{\nu_T} = \frac{1}{F_T} \int_0^{E_c} M(E, T_n) dE, \quad (3.14)$$

где  $F_T = \int_0^{E_c} \nu(E) M(E, T_n) dE$ . Тогда уравнение (3.13)

преобразуется к виду:

$$D_T \Delta \phi_T(\vec{r}) - \Sigma_{a,T} \phi_T(\vec{r}) + \varphi j(\vec{r}, \tau_c) = 0. \quad (3.15)$$

Здесь  $\phi_T(\vec{r}) = \psi_T(\vec{r}) \int_0^{E_c} \nu(E) M(E, T_n) dE$  и имеет смысл

интегрального потока тепловых нейтронов. Такое выражение для функции  $\phi_T(\vec{r})$  и соотношение (3.6) для плотности замедления позволяют источник замедляющихся нейтронов (3.2) представить суммой:

$$j(\vec{r}, 0) = \frac{K_\infty}{\phi} \sum_{a,T} \phi_T(\vec{r}) + \int_0^{\tau_c} k_\tau j(\vec{r}, \tau) \frac{d\tau}{L_\tau^2}, \quad (3.16)$$

где  $K_\infty$  – коэффициент размножения в бесконечной среде, а

$$k_\tau = \mu \frac{\nu_f \Sigma_f(\tau)}{\Sigma_a(\tau)}.$$

Воспользуемся уравнениями (3.7), (3.15) для решения задачи о критичности реактора без отражателя, заменив в равенстве (3.16) параметры  $K_\infty$  и  $k_\tau$  соответственно отношениями:

$$\tilde{K}_\infty = \frac{K_\infty}{K_{\phi\phi}}, \quad \tilde{k}_\tau = \frac{k_\tau}{K_{\phi\phi}}.$$

При этом будем считать, что решения уравнений удовлетворяют условию  $\phi(\vec{r}_0, E) = 0$  и дают (с точностью до постоянного множителя) асимптотические распределения замедляющихся и тепловых нейтронов во всей области энергий  $0 < E \leq E_0$ .

Для реактора, состоящего из одной зоны, пространственные распределения нейтронов разных энергий описываются одной и той же функцией. Поэтому плотность замедления  $j(\vec{r}, \tau)$  можно представить в виде:

$$j(\vec{r}, \tau) = f(\tau) \phi_T(\vec{r}). \quad (3.17)$$

Подставляя произведение (3.17) в уравнение (3.7), получим:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{df(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{L_\tau^2} = \frac{\Delta \phi_T(\vec{r})}{\phi_T(\vec{r})} = -\omega^2,$$

где:  $-\omega^2$  – константа разделения переменных (отрицательная – из физических соображений об изменении  $j(\vec{r}, \tau)$  с ростом возраста  $\tau$ ). Отсюда:

$$\frac{1}{f(\tau)} \frac{df(\tau)}{d\tau} = -\omega^2 - \frac{1}{L_T^2}, \quad \Delta \phi_T(\vec{r}) + \omega^2 \phi_T(\vec{r}) = 0. \quad (3.18)$$

Решая первое уравнение (3.17) относительно функции  $f(\tau)$  при условии (3.16), получим равенство:

$$j(\vec{r}, \tau) = f(0) \exp(-\omega^2 \tau - g(\tau)) \phi_T(\vec{r}), \quad (3.19)$$

в котором

$$f(0) = \frac{\varphi^{-1} \tilde{K}_\infty \Sigma_{a,T}}{1 - \int_0^{\tau_c} \tilde{k}_\tau \exp(-\omega^2 \tau - g(\tau)) dg(\tau)}, \quad g(\tau) = \int_0^\tau \frac{d\tau}{L_T^2}. \quad (3.20)$$

Рассматривая затем выражение (3.19) при значении  $\tau = \tau_c$ , преобразуем уравнение (3.15) к виду:

$$\Delta \phi_T(\vec{r}) + \frac{\Sigma_{a,T}}{D_T} \left[ \frac{\tilde{K}_\infty \exp(-\omega^2 \tau_c - g(\tau_c))}{1 - \int_0^{\tau_c} \tilde{k}_\tau \exp(-\omega^2 \tau - g(\tau)) dg(\tau)} - 1 \right] \phi_T(\vec{r}) = 0.$$

Сравнение этого выражения с (3.18) для функции  $\phi_T(\vec{r})$  показывает, что в качестве константы разделения  $\omega^2$  следует взять решение уравнения:

$$\omega^2 L_T^2 = \frac{\tilde{K}_\infty \exp(-\omega^2 \tau_c - g(\tau_c))}{1 - \int_0^{\tau_c} \tilde{k}_\tau \exp(-\omega^2 \tau - g(\tau)) dg(\tau)} - 1, \quad (3.21)$$

где  $L_T^2 = \frac{D_T}{\Sigma_{a,T}}$  – квадрат длины диффузии тепловых нейтронов.

Уравнение (3.18) для  $\phi_T(\vec{r})$  имеет такой же вид, как и уравнение (1.6) для функции  $\psi_m(\vec{r})$ . Решения их ищутся на одном и том же множестве функций. Поэтому константа разделения  $\omega^2$  может принимать лишь дискретные значения, равные  $\alpha_0^2, \alpha_1^2, \dots$  и совпадающие (с точностью до знака) с собственными числами оператора Лапласа. Учитывая перечисленные ранее (в главе 1)

свойства этих чисел и соответствующих им собственных функций, приходим к выводу, что при получении нетривиального решения задачи (3.7), (3.15), (3.16) следует принять:

$$\omega^2 = \alpha_0^2. \quad (3.22)$$

При этом асимптотическое распределение нейтронов имеет вид:

$$\begin{aligned} \phi_T(\vec{r}) &= C \psi_0(\vec{r}), \\ j(\vec{r}, \tau) &= C f(0) \exp(-\omega^2 \tau - g(\tau)) \psi_0(\vec{r}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $C$  – постоянный множитель,  $f(0)$  определяется равенством (3.20), а  $\psi_0(\vec{r})$  – собственная функция, соответствующая наименьшему собственному числу  $\alpha_0^2$  задачи (1.6):

$$\Delta \psi_0(\vec{r}) + \alpha_0^2 \psi_0(\vec{r}) = 0, \quad \psi_0(\vec{r}_s) = 0. \quad (3.24)$$

Здесь, как и в разделе 2.1, число  $\alpha_0^2$  называют геометрическим параметром, а константу разделения  $\omega^2$  – материальным параметром реактора без отражателя.

Равенство (3.22) совместно с уравнением (3.21) относительно  $\omega^2$  и полученными ранее формулами расчёта  $\alpha_0^2$  позволяют определить критические параметры реактора: эффективный коэффициент размножения нейтронов  $K_{эф}$ , критическую массу и др. Например, в реакторе с заданными свойствами (размерами и концентрациями ядер) значение  $K_{эф}$  получим, заменяя в уравнении (3.21)  $\omega^2$  на  $\alpha_0^2$ . В результате придём к равенству:

$$K_{эф} = \frac{K_\infty \exp(-\alpha_0^2 \tau_c - g(\tau_c))}{1 + \alpha_0^2 L_T^2} + \int_0^{\tau_c} k_\tau \exp(-\alpha_0^2 \tau - g(\tau)) dg(\tau), \quad (3.25)$$

в котором первое слагаемое в правой части учитывает вклад от деления ядер топлива тепловыми нейтронами, а второе слагаемое – от деления ядерного горючего замедляющимися нейтронами.

Используя соотношения (3.22) – (3.25), можно установить, что:

- если в бесконечной среде без поглощения плотность замедления  $j(\vec{r}, u)$  как функция летаргии  $u$  постоянна, то в реакторе конечных размеров в присутствии поглощения нейтронов она уменьшается с ростом летаргии;

- для реактора на тепловых нейтронах (в котором обычно можно считать, что:  $k_\tau \approx 0$ ) формула (3.25) упрощается и принимает вид:

$$K_{\text{эф}} = \frac{K_\infty \exp(-\alpha_0^2 \tau_c - g(\tau_c))}{1 + \alpha_0^2 L_T^2}; \quad (3.26)$$

- в выражении (3.26) экспоненциальный множитель имеет смысл вероятности замедляющимся нейтронам избежать утечки и поглощения при изменении их возраста от 0 до  $\tau_c$  (практически равному возрасту тепловых нейтронов), а множитель  $\frac{1}{1 + \alpha_0^2 L_T^2}$  совпадает с вероятностью тепловым нейтронам избежать утечки из реактора;
- в большом (или «физически большом») тепловом реакторе (в котором  $\alpha_0^2 \tau_c \ll 1$ ,  $\alpha_0^2 L_T^2 \ll 1$ ) плотность замедления  $j(\vec{r}, u)$  слабо меняется с изменением лётаргии  $u$ , а для оценки  $K_{\text{эф}}$  можно воспользоваться равенством:

$$K_{\text{эф}} = \frac{K_\infty}{1 + \alpha_0^2 M_T^2 + g(\tau_c)}, \quad (3.27)$$

где  $M_T^2 = L_T^2 + \tau_c$  – квадрат длины миграции тепловых нейтронов.

### 3.2. Многогрупповые уравнения и сечения реакций

При получении пространственно-энергетических распределений нейтронов в реакторах, состоящих из нескольких зон, обычно используются многогрупповые методы решения уравнений. В этих методах весь диапазон изменения энергий нейтронов  $0 \leq E \leq E_{\text{max}}$  разбивается на  $m > 1$  энергетических интервалов длиной  $\Delta E_k$  так, что:

$$\Delta E_k = E_{k-1} - E_k, \quad E_{k-1} > E_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad E_m = 0, \quad E_0 = E_{\text{max}}.$$

Нейтроны с энергией  $E \in \Delta E_k$  называют нейтронами  $k$ -й группы. Вместо уравнений с непрерывно зависящими от  $E$  вероятностями

взаимодействий решается система уравнений для отдельных групп нейтронов с постоянными в интервале  $\Delta E_k$  сечениями. Переход к таким уравнениям связан с введением ряда допущений, снижающих точность определения  $K_{эф}$  и распределений нейтронов. Чтобы выяснить причины возникновения погрешностей, рассмотрим в общих чертах схему построения многогрупповых уравнений. Считаем (как и в разделе 3.2), что все тепловые нейтроны находятся в  $m$ -й группе, и для них выполняется принцип детального равновесия. Вероятность их перехода в другие группы ничтожно мала.

Остановимся сначала на преобразовании уравнений (1.18), описывающих распределение нейтронов в условно-критическом реакторе в диффузионном приближении. Как отмечалось во введении, такой реактор не должен включать водородосодержащие материалы. Проинтегрируем уравнения (1.18) по интервалу  $\Delta E_k$ , предварительно записав второе из них в виде:

$$3\Sigma_{tr}(E)\vec{J}(\vec{r}, E) = -grad\phi(\vec{r}, E). \quad (3.28)$$

Введём в рассмотрение средние макроскопические сечения  $\Sigma_p^{(k)}$ ,  $\Sigma_{tr,i}^{(k)}$  так, чтобы

$$\Sigma_p^{(k)}\phi^{(k)}(\vec{r}) = \int_{\Delta E_k} \Sigma_p(E)\phi(\vec{r}, E)dE, \quad p = c, f, s, t \quad (3.29)$$

$$\Sigma_{tr,i}^{(k)}(\vec{J}^{(k)}(\vec{r}), \vec{e}_i) = \int_{\Delta E_k} \Sigma_{tr,i}(E)(\vec{J}(\vec{r}, E), \vec{e}_i)dE, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.30)$$

где:  $\phi^{(k)}(\vec{r}) = \int_{\Delta E_k} \phi(\vec{r}, E)dE$ ,  $\vec{J}^{(k)}(\vec{r}) = \int_{\Delta E_k} \vec{J}(\vec{r}, E)dE$ , а  $\vec{e}_i$  – единичные орты, направленные вдоль координатных осей  $x_i$  ( $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ).

Для тепловых нейтронов имеем:

$$\int_{\Delta E_m} \Sigma_t(E)\phi(\vec{r}, E)dE - \int_{\Delta E_m} \int_{\Delta E_m} \Sigma_s(E')W_s(E' \rightarrow E)\phi(\vec{r}, E')dE'dE = \Sigma_a^{(m)}\phi^{(m)}(\vec{r}).$$

Здесь учтено, что в силу принятых выше допущений при значениях

$$E \in \Delta E_m: \int_{E'} W_s(E \rightarrow E')dE' = 1,$$

$$\Sigma_s(E')W_s(E' \rightarrow E)\phi(\vec{r}, E') = \Sigma_s(E)W_s(E \rightarrow E')\phi(\vec{r}, E).$$

Для нейтронов групп  $k = 1, 2, \dots, m-1$ , теряющих энергию при столкновениях с ядрами среды:

$$\int_{\Delta E_k} \Sigma_s(E) \phi(\vec{r}, E) \int_0^{E_k} W_s(E \rightarrow E') dE' dE = \Sigma_d^{(k \rightarrow k)} \phi^{(k)}(\vec{r}) + \Sigma_d^{(k)} \phi^{(k)}(\vec{r}),$$

$$\int_{\Delta E_k} \int_E^{E_0} \Sigma_s(E') \phi(\vec{r}, E') W_s(E' \rightarrow E) dE' dE = \Sigma_d^{(k \rightarrow k)} \phi^{(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \phi^{(j)}(\vec{r}),$$

где  $\Sigma_d^{(k)} = \sum_{j=k+1}^m \Sigma_d^{(k \rightarrow j)}$ ,

$$\Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \phi^{(j)}(\vec{r}) = \int_{\Delta E_j} \Sigma_s(E') \phi(\vec{r}, E') \int_{\Delta E_k} W_s(E' \rightarrow E) dE dE', \quad (3.31)$$

$$\Sigma_d^{(k \rightarrow k)} \phi^{(k)}(\vec{r}) = \int_{\Delta E_k} \Sigma_s(E) \phi(\vec{r}, E) \int_{E_k}^E W_s(E \rightarrow E') dE' dE.$$

Учитывая соотношения (3.29) – (3.31), придём к системе уравнений для потоков  $\phi^{(k)}(\vec{r})$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$-\text{div} \vec{J}^{(k)}(\vec{r}) - \Sigma_{ad}^{(k)} \phi^{(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \phi^{(j)}(\vec{r}) + \frac{\chi^{(k)}}{K_{эф}} \sum_{j=1}^m \nu_f^{(j)} \Sigma_f^{(j)} \phi^{(j)}(\vec{r}) = 0, \quad (3.32)$$

$$3 \Sigma_{tr,i}^{(k)} \left( \vec{J}^{(k)}(\vec{r}), \vec{e}_i \right) = - \left( \text{grad} \phi^{(k)}(\vec{r}), \vec{e}_i \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.33)$$

в которой наряду с (3.31) приняты обозначения:

$$\chi^{(k)} = \int_{\Delta E_k} \chi(E) dE, \quad \Sigma_{ad}^{(k)} = \Sigma_c^{(k)} + \Sigma_f^{(k)} + \Sigma_d^{(k)},$$

$$\nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)} \phi^{(k)}(\vec{r}) = \int \nu_f \Sigma_f(E) \phi(\vec{r}, E) dE.$$

Систему уравнений (3.32), (3.33) можно рассматривать как точный аналог исходных уравнений (1.18). Присутствующие в них средние сечения  $\Sigma_p^{(k)}$  меняются с изменением координаты  $\vec{r}$  (даже в пределах одной зоны реактора, где концентрации ядер постоянны), что создаёт определённые трудности при их решении. Основная же проблема состоит в том, что эти сечения являются

функционалами внутригрупповых распределений  $\phi(\vec{r}, E)$ ,  $\vec{J}(\vec{r}, E)$ , которые неизвестны. Можно было бы попытаться эти распределения приближённо получить, используя значения  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ ,  $\vec{J}^{(k)}(\vec{r})$ . Однако сделать это с хорошей точностью при сравнительно небольшом числе групп  $m$  не удастся. Это касается, прежде всего, резонансной области, где микроскопические сечения сильно меняются в пределах малых интервалов энергии (шириной примерно 0,1 эВ). Сокращение же длин интервалов  $\Delta E_k$  приведёт к резкому увеличению числа групп  $m$  и, как следствие, времени расчёта. Поэтому поступают иначе.

Вводится предположение о разделении пространственных и энергетических переменных у функций  $\phi(\vec{r}, E)$ , с помощью которых по формулам (3.29) – (3.30) находятся групповые сечения  $\Sigma_p^{(k)}$  для какой-либо зоны реактора:

$$\phi(\vec{r}, E) = f^{(k)}(E)\psi^{(k)}(\vec{r}), \quad E \in \Delta E_k, \quad \vec{r} \in V_i, \quad (3.34)$$

где  $V_i$  – объём  $i$ -й зоны (например, активной зоны или отражателя),  $f^{(k)}(E)$  – известные функции, связанные с внутригрупповыми спектрами  $g^{(k)}(E)$  равенствами  $f^{(k)}(E) = \nu(E)g^{(k)}(E)$ . Они выбираются с учётом особенностей взаимодействия нейтронов с ядрами среды в соответствующих энергетических интервалах (более подробно об этом сказано ниже).

Отметим, что при выполнении предположения (3.34):

$$\vec{J}(\vec{r}, E) = -D(E)f^{(k)}(E)\text{grad}\psi^{(k)}(\vec{r}), \quad E \in \Delta E_k, \quad \vec{r} \in V_i.$$

Таким образом, переменные разделяются у тока нейтронов  $\vec{J}(\vec{r}, E)$  и проекции  $J_i(\vec{r}, E) = (\vec{J}(\vec{r}, E), \vec{e}_i)$  имеют одну и ту же зависимость от энергии. В результате сечения, определяемые равенствами (3.29) и (3.30), не будут зависеть от  $\vec{r}$  в пределах объёма  $V_i$ . Более того, транспортные сечения  $\Sigma_{tr,i}^{(k)}$  вдоль разных осей  $x_i$  совпадут с одним и тем же значением  $\Sigma_{tr}^{(k)}$ . Поэтому соотношения (3.30) принимают вид:

$$\Sigma_{tr,i}^{(k)} = \Sigma_{tr}^{(k)} = \frac{\int \Sigma_{tr}(E) D(E) f^{(k)}(E) dE}{\int_{\Delta E_k} D(E) f^{(k)}(E) dE}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.35)$$

а уравнения (3.33) удаётся записать в форме

$$\vec{J}^{(k)}(\vec{r}) = -D^{(k)} \text{grad} \phi^{(k)}(\vec{r}), \quad (3.36)$$

где  $D^{(k)} = (3\Sigma_{tr}^{(k)})^{-1}$  – коэффициент диффузии  $k$ -й группы.

Используя предположение (3.34), соотношения (3.29) – (3.31), (3.35) можно привести к виду:

$$\Sigma_p^{(k)} = \sum_l \sigma_{p,l}^{(k)} \rho_l, \quad (p = c, f, s, tr), \quad \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} = \sum_l \sigma_{d,l}^{(j \rightarrow k)} \rho_l, \quad (3.37)$$

если считать, что  $\rho_l$  – концентрация ядер сорта  $l$  в какой-либо зоне реактора, а многогрупповые микроскопические сечения в той же зоне определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \sigma_{tr,l}^{(k)} &= \frac{\int \sigma_{tr,l}(E) D(E) f^{(k)}(E) dE}{\int_{\Delta E_k} D(E) f^{(k)}(E) dE}, \\ \sigma_{p,l}^{(k)} &= \frac{\int \sigma_{p,l}(E) f^{(k)}(E) dE}{\int_{\Delta E_k} f^{(k)}(E) dE}, \quad (p = c, f), \\ \sigma_{d,l}^{(j \rightarrow k)} &= \frac{\int \int_{\Delta E_j} \sigma_{s,l}(E') W_{s,l}(E' \rightarrow E) f^{(j)}(E') dE' dE}{\int_{\Delta E_j} f^{(j)}(E') dE'}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Здесь учтено, что  $D(E) = (3\Sigma_{tr}(E))^{-1}$ .

Пусть теперь распределение нейтронов находится в  $P_1$ -приближении и в качестве исходных выбраны уравнения (6) и (15). Все преобразования, касающиеся уравнения (6), полностью совпадут с теми, которые привели к равенствам (3.32). Интегрирование же уравнения (15) по интервалу  $\Delta E_k$  даёт

$$\text{grad } \phi^{(k)}(\vec{r}) + 3 \int_{\Delta E_k} \Sigma_t(E) \vec{J}(\vec{r}, E) dE = 3 \int_{\Delta E_k} \int_{E'} \Sigma_s(E') W_{s,1}(E' \rightarrow E) \vec{J}(\vec{r}, E') dE' \cdot \quad (3.39)$$

Запишем это равенство в проекциях на координатные оси и введём в рассмотрение средние сечения  $\Sigma_{di}^{(j \rightarrow k)}$ ,  $\Sigma_{ii}^{(k)}$  так, чтобы:

$$\Sigma_{di}^{(j \rightarrow k)} J_i^{(j)}(\vec{r}) = \int_{\Delta E_k} \int_{\Delta E_j} \Sigma_s(E') W_{s,1}(E' \rightarrow E) J_i(\vec{r}, E') dE' dE, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\Sigma_{ii}^{(k)} J_i^{(k)}(\vec{r}) = \int_{\Delta E_k} \Sigma_i(E) J_i(\vec{r}, E) dE - \int_{\Delta E_k} \int_E^{E_{k-1}} \Sigma_s(E') W_{s,1}(E' \rightarrow E) J_i(\vec{r}, E') dE' dE \cdot \quad (3.40)$$

Раньше (в диффузионном приближении) было установлено, что переменные у тока нейтронов  $\vec{J}(\vec{r}, E)$  разделяются, когда выполняется предположение (3.34). На основе уравнения (3.39) не удаётся прийти к такому утверждению [1]. Если же считать, что энергетические зависимости компонент  $J_i(\vec{r}, E)$  тока  $\vec{J}(\vec{r}, E)$  описываются разными функциями, то равенства (3.40) дадут несовпадающие вдоль разных направлений  $\vec{e}_i$  сечения. Однако такое усложнение представляется мало оправданным, поскольку, во-первых,  $P_1$ -приближение не даёт точного решения для потока нейтронов  $\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  и, во-вторых, существует некоторая неопределённость в выборе внутригрупповых спектров. Поэтому в  $P_1$ -приближении наряду с допущением (3.34) предполагается, что компоненты  $J_i(\vec{r}, E)$  имеют общую зависимость от энергии  $E$ .

Например, если при получении сечений  $\Sigma_{di}^{(j \rightarrow k)}$ ,  $\Sigma_{ii}^{(k)}$  пренебречь анизотропией рассеяния, то можно принять:

$$\vec{J}(\vec{r}, E) = -D(E) \text{grad } \phi(\vec{r}, E) = -D(E) f^{(k)}(E) \text{grad } \psi^{(k)}(\vec{r}),$$

(для  $E \in \Delta E_k$ ,  $\vec{r} \in V_i$ ),

где коэффициент диффузии  $D(E)$  определяется равенством (3.39). Тогда

$$\Sigma_{di}^{(j \rightarrow k)} = \Sigma_{d1}^{(j \rightarrow k)}, \quad \Sigma_{ii}^{(k)} = \Sigma_{i1}^{(k)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

а уравнение (3.40) преобразуется к виду:

$$\text{grad } \phi^{(k)}(\vec{r}) + 3 \sum_{l1}^{(k)} \vec{J}^{(k)}(\vec{r}) = 3 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{d1}^{(j \rightarrow k)} \vec{J}^{(j)}(\vec{r}). \quad (3.41)$$

Входящие в эти уравнения сечения  $\sum_{d1}^{(j \rightarrow k)}$ ,  $\sum_{l1}^{(k)}$  рассчитываются по формулам вида (3.37), если в качестве соответствующих микроскопических сечений  $\sigma_{d1,l}^{(j \rightarrow k)}$ ,  $\sigma_{l1,l}^{(k)}$  принять:

$$\sigma_{d1,l}^{(j \rightarrow k)} = \frac{\int_{\Delta E_k} \int_{\Delta E_j} \sigma_{es,l}(E') W_{s1,l}(E' \rightarrow E) D(E') f^{(j)}(E') dE' dE}{\int_{\Delta E_j} D(E') f^{(j)}(E') dE'}, \quad (3.42)$$

$$\sigma_{l1,l}^{(k)} = \frac{\int_{\Delta E_k} \sigma_{l,l}(E) D(E) f^{(k)}(E) dE - \int_{\Delta E_k} \int_E^{E_{k-1}} \sigma_{es,l}(E') W_{s1,l}(E' \rightarrow E) D(E') f^{(k)}(E') dE' dE}{\int_{\Delta E_k} D(E) f^{(k)}(E) dE}.$$

Уравнения (3.32), (3.36) будем называть *многогрупповыми уравнениями диффузионного приближения*, а (3.32), (3.41) – *многогрупповыми уравнениями  $P_1$ -приближения*. Из условий (B.12) следует, что их решение следует искать среди функций:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}) \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.43)$$

Здесь каждое множество  $\Omega_k$  образуют функции  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ , непрерывные вместе с произведением  $(\vec{J}^{(k)}(\vec{r}), \vec{n})$  при всех значениях  $\vec{r} \in V$  и обращающиеся в нуль на экстраполированной границе реактора:  $\phi^{(k)}(\vec{r}_s) = 0$ .

Для примера получим двухгрупповых уравнений при тех допущениях, которые были перечислены в разделе 3.1. Будем считать, что замедляющиеся нейтроны с энергиями  $E_c \leq E \leq E_0$  образуют первую группу ( $E_0$  – порог деления сырьевого материала), а тепловые нейтроны с энергиями  $0 \leq E \leq E_c$  – вторую группу. Энергетическое распределение замедляющихся нейтронов описывается функцией  $\phi(\vec{r}, u)$ , зависящей от латаргии  $u$  и удовлетворяющей уравнению (3.5). Для тепловых нейтронов

выполняется принцип детального равновесия, а их распределение описывается функцией  $\phi(\vec{r}, E)$ , зависящей от энергии  $E$ .

Интегрируя уравнения (3.5) по логарифму  $u$  от 0 до  $u_c = \ln \frac{E_0}{E_c}$ ,

получим:

$$\operatorname{div} \int_0^{u_c} \vec{J}(\vec{r}, u) du - \int_0^{u_c} \Sigma_a(u) \phi(\vec{r}, u) du + j(\vec{r}, 0) - j(\vec{r}, u_c) = 0. \quad (3.44)$$

Интегрирование уравнения (1.18) по переменной  $E \in [0, E_c]$  приводит к соотношению (3.13). При этом:

$$j(\vec{r}, 0) = j(\vec{r}, E_0), \quad j(\vec{r}, u_c) = j(\vec{r}, E_c),$$

плотность замедления  $j(\vec{r}, E_0)$  определяется выражением (3.3), а  $j(\vec{r}, E_c)$  – выражением (3.12).

Проводя далее преобразования, аналогичные описанным выше, придём к уравнениям:

$$\operatorname{div}(D^{(1)} \operatorname{grad} \phi^{(1)}(\vec{r})) - \Sigma_{ad}^{(1)} \phi^{(1)}(\vec{r}) + \frac{\mu}{K_{\phi}} Q(\vec{r}) = 0, \quad (3.45)$$

$$\operatorname{div}(D^{(2)} \operatorname{grad} \phi^{(2)}(\vec{r})) - \Sigma_a^{(2)} \phi^{(2)}(\vec{r}) + \Sigma_d^{(1 \rightarrow 2)} \phi^{(1)}(\vec{r}) = 0,$$

где  $Q(\vec{r}) = \nu_f^{(1)} \Sigma_f^{(1)} \phi^{(1)}(\vec{r}) + \nu_f^{(2)} \Sigma_f^{(2)} \phi^{(2)}(\vec{r})$ ,

$$\Sigma_{ad}^{(1)} = \Sigma_a^{(1)} + \Sigma_d^{(1)}, \quad \Sigma_d^{(1 \rightarrow 2)} = \varphi \Sigma_d^{(1)}, \quad D^{(k)} = \left(3 \Sigma_{tr}^{(k)}\right)^{-1} \quad (k=1,2).$$

Макроскопические сечения определяются равенствами (3.29), (3.31), (3.35) и принимают вид:

$$\Sigma_{tr}^{(k)} = \frac{\int \Sigma_{tr}(E) D(E) f^{(k)}(E) dE}{\int_{\Delta E_k} D(E) f^{(k)}(E) dE}, \quad \Sigma_p^{(k)} = \frac{\int \Sigma_p(E) f^{(k)}(E) dE}{\int_{\Delta E_k} f^{(k)}(E) dE}, \quad p = c, f,$$

$$\nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)} = \frac{\int \nu_f \Sigma_f(E) f^{(k)}(E) dE}{\int_{\Delta E_k} f^{(k)}(E) dE}, \quad \Sigma_d^{(1 \rightarrow 2)} = \frac{\sum_l^{\tilde{E}_l} \int_{E_c} \Sigma_{s,l}(E) f^{(1)}(E) \frac{E_c - \varepsilon_l E}{E(1 - \varepsilon_l)} dE}{\int_{E_c}^{E_0} f^{(1)}(E) dE}.$$

В качестве распределений  $f^{(1)}(E)$ ,  $f^{(2)}(E)$  в этих формулах примем

$$f^{(1)}(E) = \frac{j_0(E_c)}{\xi \Sigma_s(E) E}, \quad f^{(2)}(E) = \nu(E) M(E, T_n).$$

Такой выбор внутригрупповых распределений предопределён тем, что в области  $E > E_c$  отсутствует резонансное поглощение нейтронов, а вторую группу образуют лишь тепловые нейтроны. В результате получим:

$$D^{(1)} = \frac{\langle \xi \Sigma_s \rangle}{u_c} \int_0^{u_c} \frac{D(u)}{\xi \Sigma_s(u)} du = \frac{\langle \xi \Sigma_s \rangle \tau_c}{u_c}, \quad \Sigma_d^{(1)} = \frac{\langle \xi \Sigma_s \rangle}{u_c}, \quad (3.46)$$

$$\Sigma_a^{(1)} = \frac{\langle \xi \Sigma_s \rangle}{u_c} \int_0^{u_c} \frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma_s(u)} du, \quad \nu_f^{(1)} \Sigma_f^{(1)} = \frac{\langle \xi \Sigma_s \rangle}{u_c} \int_0^{u_c} \frac{\nu_f \Sigma_f(u)}{\xi \Sigma_s(u)} du,$$

$$D^{(2)} = D_T, \quad \Sigma_a^{(2)} = \Sigma_{a,T}, \quad \nu_f^{(2)} \Sigma_f^{(2)} = \nu_f \Sigma_{f,T},$$

где константы  $D_T$ ,  $\Sigma_{a,T}$ ,  $\nu_f \Sigma_{f,T}$  рассчитываются по формулам (3.12), а среднее значение замедляющей способности  $\langle \xi \Sigma_s \rangle$  определяется из равенства:

$$\frac{u_c}{\langle \xi \Sigma_s \rangle} = \int_0^{u_c} \frac{du}{\xi \Sigma_s(u)}. \quad (3.47)$$

В дальнейшем уравнения (3.45) с константами, получаемыми по формулам (3.46) и (3.47), будем называть *двухгрупповыми уравнениями диффузионно-возрастного приближения*.

### 3.3. Подготовка групповых микроскопических сечений

Точность многогруппового метода расчёта потоков  $\phi^{(k)}(\vec{r})$  зависит от того, насколько хорошо известны зависимости сечений реакций  $\sigma_{p,l}(E)$  и спектров нейтронов  $g^{(k)}(E)$  от энергии. Значения  $\sigma_{p,l}(E)$ ,  $W_{s,l}(E' \rightarrow E)$  и  $W_{s1,l}(E' \rightarrow E)$  восстанавливают на основе экспериментально полученных данных и рассчитанных с использованием различных теоретических моделей взаимодействия нейтронов с ядрами. В дальнейшем остановимся лишь на

особенностях подготовки групповых сечений  $\sigma_{p,l}^{(k)}$ , связанных с выбором спектров  $g^{(k)}(E)$ . При этом ограничимся рассмотрением тех сечений, которые присутствуют в уравнениях (3.32), (3.36) многогруппового диффузионного приближения.

Серьёзных проблем с получением спектров  $g^{(k)}(E)$  не возникает, когда выбрано настолько большое число групп  $m$ , что в пределах каждого энергетического интервала  $\Delta E_k$  микроскопические сечения  $\sigma_{p,l}(E)$  не претерпевают больших изменений с энергией  $E$ . Тогда в первом приближении можно принять:

$$\sigma_{p,l}^{(k)} = \sigma_{p,l}(E_{k-1/2}), \quad (p = c, s, f, t), \quad \sigma_{d,l}^{(j \rightarrow k)} = \sigma_{s,l}(E_{j-1/2}) W_{s,l}(E_{j-1/2} \rightarrow E_{k-1/2}),$$

где  $E_{k-1/2} = \frac{1}{2}(E_{k-1} + E_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

Рассчитав с такими групповыми сечениями распределения  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ , можно при необходимости уточнить значения  $\sigma_{p,l}^{(k)}$  по формулам (3.38), получив предварительно внутригрупповые потоки  $f^{(k)}(E)$  с помощью известных интерполяционных алгоритмов и средних по объёму  $V_i$  рассматриваемой зоны значений  $\bar{\phi}_i^{(k)} = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \phi^{(k)}(\vec{r}) dV$ .

Обычно расчётные исследования реакторов проводятся при сравнительно небольшом числе энергетических групп. Например, распределения нейтронов в реакторах типа ВВЭР рассчитываются в 4-групповом приближении, а в быстрых реакторах – в 26-групповом приближении. В этом случае внутригрупповые спектры  $g^{(k)}(E)$  (или потоки  $f^{(k)}(E)$ ) получают, решая вспомогательные задачи о распределении нейтронов в бесконечных средах со свойствами той зоны, для которой необходимо знать групповые сечения  $\sigma_{p,l}^{(k)}$ . Рассмотрим один из таких подходов, впервые предложенный для расчётов быстрых реакторов [11].

Выделим четыре энергетических интервала:  $0 \leq E \leq E_c$  – для тепловых нейтронов,  $E_c \leq E \leq E_{in}$  – для нейтронов, замедляющихся в условиях сильного резонансного поглощения,  $E_{in} \leq E \leq E_f$  – для нейтронов, замедляющихся при наличии неупругого рассеяния и  $E_f \leq E \leq E_{max}$  – для быстрых нейтронов, вызывающих деления ядер сырьевого материала. Пусть номера групп, попадающих в указанные интервалы, образуют множества  $I_m, I_r, I_{in}, I_f$  соответственно. Учитывая изменения  $\sigma_{p,i}(E)$  с энергией и особенности формирования спектра нейтронов в реакторах, примем следующие зависимости  $g^{(k)}(E)$  (совпадающие в соответствующих энергетических интервалах с известными спектрами нейтронов):

$$\text{при } 0 \leq E \leq E_c \text{ и } k \in I_m : g^{(k)}(E) = A_m \sqrt{\frac{E}{E_T}} \frac{1}{E_T} \exp\left(-\frac{E}{E_T}\right) -$$

спектр Максвелла ( $E_T$  – энергия, соответствующая эффективной температуре нейтронов);

$$\text{при } E_c \leq E \leq E_{in} \text{ и } k \in I_r : g^{(k)}(E) = A_r \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{1}{\xi \Sigma_t(E) E} - \text{спектр}$$

Вигнера, где  $\Sigma_t(E) = \Sigma_{sp} + \Sigma_r(E)$ ,  $\Sigma_r(E)$  – сечение в резонансе, а  $\Sigma_{sp}$  – сумма сечения рассеяния на лёгких ядрах и сечения потенциального рассеяния на тяжёлых ядрах топлива;

$$\text{при } E_{in} \leq E \leq E_f \text{ и } k \in I_{in} : g^{(k)}(E) = A_{in} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{1}{\xi \Sigma_{sp} E} -$$

спектр Ферми;

при  $E_f \leq E \leq E_{max}$  и  $k \in I_f$  :  $g^{(k)}(E) = A_f \exp(-E) sh \sqrt{2E}$  – спектр нейтронов деления (энергия  $E$  берётся в Мэв).

Здесь  $A_m, A_r, A_{in}, A_f$  – постоянные множители, а  $E_c, E_{in}, E_f$  – условные граничные значения для энергий тепловых нейтронов, неупругого рассеяния и порога деления ядер сырьевого материала.

Предложенные выше зависимости  $g^{(k)}(E)$  дают лишь приближённое представление о распределениях нейтронов по

энергиям. Поэтому полученные на их основе микроскопические сечения  $\sigma_{p,l}^{(k)}$  приходится корректировать в процессе многогруппового расчёта. В первую очередь, это относится к сечениям радиационного захвата  $\sigma_{c,l}^{(k)}$  и деления  $\sigma_{f,l}^{(k)}$  тяжёлых ядер топлива, а также к сечениям увода нейтронов  $\sigma_{d,l}^{(k \rightarrow k+1)}$ , полученных при сравнительно низких энергиях. Корректировка сечений  $\sigma_{c,l}^{(k)}$  и  $\sigma_{f,l}^{(k)}$  (а также  $\sigma_{tr,l}^{(k)}$ ) связана с необходимостью учёта блокировки резонансов в условиях сильного резонансного поглощения, а сечений  $\sigma_{d,l}^{(k \rightarrow k+1)}$  – с уточнением зависимостей  $g^{(k)}(E)$ , когда ширина энергетических групп меньше ступеньки замедления. Остановимся вкратце, как это можно сделать, считая, что в реакторе отсутствуют лёгкие замедлители, и при оценке  $\sigma_{tr,l}^{(k)}$  по формулам вида (3.38) можно принять, что коэффициент диффузии  $D(E) = (3\Sigma_{tr}(E))^{-1}$ .

Для учёта влияния эффекта блокировки резонансов на сечения воспользуемся методом факторов резонансной самоэкранировки. В этом методе предполагается, что резонансы в сечениях разных элементов не перекрываются. Тогда, пронумеровав все резонансы, оказавшиеся внутри интервала  $\Delta E_k$ , в порядке возрастания энергии  $E$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) и введя в рассмотрение для каждого элемента  $l$  сечение разбавления

$$\sigma_{0,l} = \frac{1}{\rho_l} \sum_{j \neq l} \sigma_{t,j}(E) \rho_j, \quad (3.48)$$

можно считать, что оно не будет зависеть от энергии  $E$  при  $E \in \Delta E_k^{(r)}$ , если резонансы являются узкими и далеко отстоящими друг от друга (рис.3.1).

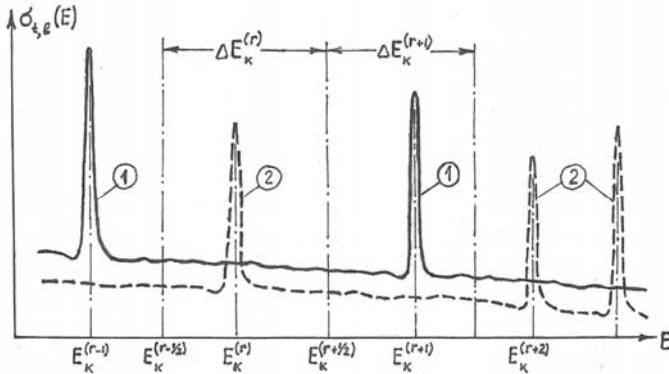


Рис.3.1. Расположение резонансов у сечения  $\sigma_{i,l}(E)$  двух элементов ( $l = 1,2$ ) в группе  $k$  :

$$\Delta E_k^{(r)} = E_k^{(r+1/2)} - E_k^{(r-1/2)}, \quad E_k^{(r-1/2)} = \frac{E_k^{(r)} + E_k^{(r-1/2)}}{2},$$

$E_r$  – энергия, соответствующая максимальному сечения  $\sigma_{i,l}$  в окрестности  $r$ -го резонанса

Заменяя в спектре Вигнера полное макроскопическое сечение  $\Sigma_i(E)$  суммой  $\Sigma_i(E) = \rho_l(\sigma_i^{(l)}(E) + \sigma_{0,l})$ , преобразуем формулы (3.38) к виду:

$$\sigma_{p,l}^{(k)} \sum_r \int_{\Delta E_k^{(r)}} \frac{1}{\sigma_{i,l}(E) + \sigma_{0,l}} \frac{dE}{E} = \sum_r \int_{\Delta E_k^{(r)}} \sigma_{p,l}(E) \frac{1}{\sigma_{i,l}(E) + \sigma_{0,l}} \frac{dE}{E},$$

$p = c, f, s$  ; (3.49)

$$\sigma_{tr,l}^{(k)} \sum_r \int_{\Delta E_k^{(r)}} \frac{1}{(\sigma_{i,l}(E) + \sigma_{0,l})^2} \frac{dE}{E} = \sum_r \int_{\Delta E_k^{(r)}} \sigma_{tr,l}(E) \frac{1}{(\sigma_{i,l}(E) + \sigma_{0,l})^2} \frac{dE}{E}.$$

Эти равенства при значениях  $\sigma_{i,l} \ll \sigma_{0,l}$  (например, при малой концентрации  $\rho_l$  резонансного поглотителя) дают такие  $\sigma_{p,l}^{(k)} \approx \tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)}$ , что:

$$\tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)} \int_{\Delta E_k} \frac{dE}{E} = \int_{\Delta E_k} \sigma_{p,l}(E) \frac{dE}{E}, \quad p = tr, c, f, s. \quad (3.50)$$

Сечения  $\tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)}$ , рассчитанные по формулам (3.50), называют неблокированными, а по формулам (3.49)  $\sigma_{p,l}^{(k)}$  – блокированными сечениями. В последнем случае учитывается снижение потока нейтронов (по сравнению с потоком, описываемым распределением Ферми), вызванное резонансным поглощением вблизи значений  $E_r$ . Отношения сечений:

$$F_{p,l}^{(k)}(\sigma_{0,l}, T) = \frac{\sigma_{p,l}^{(k)}}{\tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)}}, \quad p = tr, c, f, s \quad (3.51)$$

называют факторами резонансной самоэкранировки. Очевидно, что факторы  $F_{p,l}^{(k)}$  зависят не только от сечения разбавления  $\sigma_{0,l}$ , но и от температуры  $T$  (вследствие известного эффекта Доплера в резонансном поглощении).

Основанный на изложенном выше методе алгоритм расчёта выглядит следующим образом. Вначале рассчитываются неблокированные сечения  $\tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)}$ , факторы  $F_{p,l}^{(k)}$  при  $T = T_0$  и различных значениях сечения разбавления  $\sigma_{0,l}$ , а также доплеровские приращения  $\Delta F_{p,l}^{(k)}$  факторов:

$$\Delta F_{p,l}^{(k)} = F_{p,l}^{(k)}(\sigma_{0,l}, T_{s-1} + \Delta T_s) - F_{p,l}^{(k)}(\sigma_{0,l}, T_{s-1}), \quad s = 1, 2, \dots$$

Значения сечений  $\tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)}$ , факторов  $F_{p,l}^{(k)}$  при температуре  $T_0 = 300 \text{ K}$  и приращений  $\Delta F_{p,l}^{(k)}$  при  $\Delta T_1 = 600 \text{ K}$ ,  $\Delta T_2 = 1200 \text{ K}$  приведены в известном справочнике по ядерным константам [12].

Затем находятся блокированные сечения  $\sigma_{p,l}^{(k)}$ , соответствующие свойствам рассматриваемой зоны реактора (концентрациям ядер и температурам материалов). Сечения  $\sigma_{p,l}^{(k)}$  рассчитываются, используя следующий итерационный процесс ( $n$  – номер итерации):

$$(\sigma_{p,l}^{(k)})_n = \tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)} F_{p,l}^{(k)}((\sigma_{0,l}^{(k)})_{n-1}, T), \quad p = tr, c, f, s,$$

где  $(\sigma_{0,l}^{(k)})_{n-1} = \frac{1}{\rho_l} \sum_{i \neq l} \rho_i (\sigma_{t,i}^{(k)})_{n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $(\sigma_{t,i}^{(k)})_0 = \tilde{\sigma}_{t,i}^{(k)}$  –

на 1-й итерации.

Для определения факторов  $F_{p,l}^{(k)}$  при тех значениях  $\sigma_{0,l}^{(k)}$  и  $T$ , которые не совпадают с приведёнными в справочнике, применяют известные интерполяционные формулы. Такой процесс достаточно быстро сходится.

Перейдём теперь к оценке сечений увода нейтронов  $\sigma_{d,l}^{(j \rightarrow k)}$  в области энергий, где отсутствует неупругое рассеяние, а ширина энергетической группы  $\Delta E_k$  больше ступеньки замедления  $\Delta_l = E(1 - \varepsilon_l)$ . В этом случае возможны переходы нейтронов при рассеянии лишь в соседнюю группу, а сечения  $\sigma_{d,l}^{(k \rightarrow k+1)}$  должны быть такими, чтобы

$$\sigma_{d,l}^{(k \rightarrow k+1)} \int_{\Delta E_k} f^{(k)}(E) dE = \int_{E_k}^{E_k / \varepsilon_l} \sigma_{es,l}(E) f^{(k)}(E) \frac{E_k - \varepsilon_l E}{E(1 - \varepsilon_l)} dE, \quad (3.52)$$

где  $\sigma_{es,l}(E)$  – сечение упругого замедления.

Раньше при получении  $\sigma_{c,l}^{(k)}$ ,  $\sigma_{f,l}^{(k)}$  необходимо было учитывать деформацию потока нейтронов в окрестности каждого резонанса (т.е. при значениях  $E \in \delta E_k^{(r)}$ , где:  $\delta E_k^{(r)}$  – эффективная ширина резонанса с номером  $r$  в группе  $k$ ), не детализируя распределение нейтронов при  $E \notin \delta E_k^{(r)}$ , где значения  $\sigma_{c,l}^{(k)}$  и  $\sigma_{f,l}^{(k)}$  близки к нулю.

При получении  $\sigma_{d,l}^{(k \rightarrow k+1)}$  важно знать зависимость потока  $f^{(k)}(E)$  от энергии  $E$  главным образом вне резонансов, поскольку в приближении узких резонансов не велик вклад в число нейтронов, переходящих в соседнюю группу за счёт упругих столкновений при  $E \in \delta E_k^{(r)}$ .

Распределения  $f^{(k)}(E)$  можно приближённо восстановить, используя те значения  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ , которые находятся в процессе многогруппового расчёта. Однако, поскольку до решения уравнений (3.32), (3.36) необходимо знать групповые сечения, то

приходится использовать метод последовательного уточнения  $\sigma_{d,k}^{(k \rightarrow k+1)}$ . При этом обычно строятся зависимости  $f^{(k)}(u)$ , так как в шкале летаргии внутригрупповые потоки меняются слабее, чем в шкале энергии.

На каждой итерации по формуле (3.52) определяют  $\sigma_{d,l}^{(k \rightarrow k+1)}$ , используя восстановленные на предыдущей итерации потоки  $f^{(k)}(u)$ . С такими значениями сечений решаются уравнения (3.32),

$$(3.36) \text{ и находятся средние потоки } \bar{\phi}_i^{(k)} = \frac{1}{\Delta u_k} \frac{1}{V_i} \int_{V_i} \phi^{(k)}(r) dV, \text{ где}$$

$\Delta u_k = \ln \frac{E_{k-1}}{E_k}$  – интервал летаргии нейтронов  $k$ -й группы. Затем,

используя значения  $\bar{\phi}_i^{(k)}$  и известные интерполяционные алгоритмы, получают уточнённые зависимости  $f^{(k)}(u)$  и переходят к следующей итерации. Обычно ограничиваются 2 – 3 итерациями, а на первой итерации принимают  $f^{(k)}(u) = const$ .

Если одновременно считать, что:  $\sigma_{s,l}(u) = \tilde{\sigma}_{s,l}^{(k)}$  (т.е. тоже не зависит от  $u$ ), то по формуле (3.52) получим  $\sigma_{d,l}^{(k \rightarrow k+1)} = \frac{\xi_l \tilde{\sigma}_{s,l}^{(k)}}{\Delta u_k}$ , где

$\xi_l$  – средняя логарифмическая потеря энергии при столкновении нейтронов с ядром сорта  $l$ .

### 3.4. Спектр нейтронов в реакторе без отражателя

Перейдём к решению задач о критичности реактора в многогрупповом диффузионном приближении. Как отмечалось в главе 1, любую из них можно рассматривать как часть общей задачи на поиск собственных чисел  $k_n$  и соответствующих им функций  $\bar{\psi}_n(\vec{r}) = (\psi_n^{(1)}(\vec{r}), \psi_n^{(2)}(\vec{r}), \dots, \psi_n^{(m)}(\vec{r}))^T$ . При этом компоненты  $\psi_n^{(k)}(\vec{r})$  удовлетворяют тем же условиям (3.43), что и

потоки  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ , и находятся из решения системы уравнений ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$-div \vec{J}_n^{(k)}(\vec{r}) - \Sigma_{ad}^{(k)} \psi_n^{(k)}(\vec{r}) + \sum_{i=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \psi_n^{(j)}(\vec{r}) + \frac{\chi^{(k)}}{k_n} \sum_{j=1}^m \nu_f^{(j)} \Sigma_f^{(j)} \psi_n^{(j)}(\vec{r}) = 0,$$

$$\vec{J}_n^{(k)}(\vec{r}) = -D^{(k)} grad \psi_n^{(k)}(\vec{r}). \quad (3.53)$$

Если считать, что собственные числа пронумерованы так, чтобы выполнялись неравенства  $k_0 > |k_1| \geq |k_2| \geq \dots$ , то:

$K_{\phi} = k_0$ ,  $\phi^{(k)}(\vec{r}) = C \psi_0^{(k)}(\vec{r})$ , где  $C$  – постоянный множитель.

В общем случае для определения  $K_{\phi}$  используется метод итераций источников и различные численные алгоритмы нахождения потока нейтронов. Однако для некоторых простых моделей реактора удаётся получить аналитические решения. Они дают представление о спектре нейтронов в различных реакторах, пространственных распределениях замедляющихся и тепловых нейтронов, позволяют оценить критический размер реактора.

Остановимся вначале на одной из простых моделей. Рассмотрим реактор, состоящий из одной активной зоны (реактор без отражателя), и будем считать, что при значениях  $\vec{r} = \vec{r}_0$  находится одинаковая для всех групп нейтронов экстраполированная граница. В этом случае решения уравнений (3.53) можно искать методом разделения переменных:

$$\psi_n^{(k)}(\vec{r}) = I_n^{(k)} \psi_n(\vec{r}), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.54)$$

где  $I_n^{(k)}$  – независимые от переменных  $\vec{r}$  амплитуды.

Заменяя в уравнениях (3.53) функции  $\psi_n^{(k)}(\vec{r})$  произведениями (3.54), получим (как и в односкоростном приближении), что константа разделения метода совпадает с собственными числами  $\alpha_0^2 < \alpha_1^2 < \alpha_2^2 < \dots$  задачи (1.7), наибольшему собственному числу  $k_0$  соответствует  $\alpha_0^2$  (называемое также геометрическим параметром реактора), а асимптотические потоки  $\phi^{(k)}(\vec{r})$  равны:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}) = C I_0^{(k)} \psi_0(\vec{r}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.55)$$

В этом выражении  $\psi_0(\vec{r})$  – собственная функция задачи (1.7), соответствующая числу  $\alpha_0^2$

$$\Delta\psi_0(\vec{r}) + \alpha_0^2\psi_0(\vec{r}) = 0, \quad \psi_0(\vec{r}_s) = 0, \quad (3.56)$$

а амплитуды  $I_0^{(k)}$  – решения уравнений:

$$-\alpha_0^2 D^{(k)} I_0^{(k)} - \Sigma_{ad}^{(k)} I_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} I_0^{(j)} + \frac{\chi^{(k)}}{K_{эф}} \sum_{l=1}^m \nu_f^{(l)} \Sigma_f^{(l)} I_0^{(l)} = 0, \quad (3.57)$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Поскольку равенства (3.57) образуют систему линейных однородных уравнений, то значения  $I_0^{(k)}$  могут быть определены лишь с точностью до постоянного множителя. Удобно его выбрать так, чтобы:

$$\frac{1}{K_{эф}} \sum_{l=1}^m \nu_f^{(l)} \Sigma_f^{(l)} I_0^{(l)} = 1. \quad (3.58)$$

Тогда 
$$I_0^{(k)} = \frac{\chi^{(k)} + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} I_0^{(j)}}{\alpha_0^2 D^{(k)} + \Sigma_{ad}^{(k)}}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.59)$$

что позволяет без итераций рассчитать  $I_0^{(k)}$  последовательно, начиная с  $I_0^{(1)}$ . После этого нетрудно с помощью равенства (3.58) найти  $K_{эф}$ . Если окажется, что значение  $K_{эф} \neq 1$ , то необходимо изменить свойства реактора, пересчитать амплитуды  $I_0^{(k)}$  и вновь проверить выполнение условия (3.58).

Значения  $I_0^{(k)}$  дают представление о спектре нейтронов  $f^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) в реакторе. Подразумевая под величиной  $f^{(k)}(\vec{r})$  отношение  $f^{(k)}(\vec{r}) = \frac{\phi^{(k)}(\vec{r})}{\sum_{k=1}^m \phi^{(k)}(\vec{r})}$ , получим, что в реакторе

без отражателя спектр нейтронов не зависит от пространственных координат  $\vec{r}$ .

### 3.5. Двухгрупповой метод для многозонного реактора

В случае многозонного реактора аналитическое решение задачи о критичности существует лишь в одномерной геометрии. Хотя оно может быть получено при произвольном числе энергетических групп, в дальнейшем ограничимся 2-групповым приближением и реактором на тепловых нейтронах. Будем считать (как и в разделе 3.1), что все замедляющиеся (быстрые) нейтроны включены в 1-ю группу, тепловые – во 2-ю группу, а асимптотические распределения потоков  $\phi^{(1)}(\vec{r})$ ,  $\phi^{(2)}(\vec{r})$  находятся, решая уравнения (3.45) и рассчитывая макроскопические сечения по формулам (3.46), (3.47).

Введем в рассмотрение оператор  $\hat{L}_\lambda = \Delta - \lambda$ , где  $\lambda$  – константа, а  $\Delta$  – оператор Лапласа, определенный на множестве функций  $\Omega_\Delta$ , непрерывных вместе с частными производными 2-го порядка. Действие такого оператора на функцию  $C\psi(\vec{r})$  ( $C$  – произвольный множитель, не зависящий от переменных  $\vec{r}$ ) заключается в следующем:

$$\hat{L}_\lambda(C\psi) = C\Delta\psi(\vec{r}) - \lambda C\psi(\vec{r}). \quad (3.60)$$

Тогда уравнения (3.45) для любой зоны реактора с постоянными свойствами можно записать в виде (индекс зоны пока опускаем):

$$\left(\Delta - \frac{1}{\tau}\right)\phi^{(1)}(\vec{r}) = -\frac{\tilde{K}_\infty}{\phi} \frac{\Sigma_a^{(2)}}{D^{(1)}} \phi^{(2)}(\vec{r}), \quad (3.61)$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{L^2}\right)\phi^{(2)}(\vec{r}) = -\frac{\phi \Sigma_d^{(1)}}{D^{(2)}} \phi^{(1)}(\vec{r}), \quad (3.62)$$

где  $\tau = \frac{\tau_c}{1 + \varepsilon}$ ,  $\tilde{K}_\infty = \frac{K_\infty}{K_{\phi\phi}}$ ,  $\varepsilon = \frac{u_c}{\langle \xi \Sigma_s \rangle} \left( \Sigma_a^{(1)} - \mu \frac{v_f^{(1)} \Sigma_f^{(1)}}{K_{\phi\phi}} \right)$ . В

дальнейшем считаем, что квадрат длины диффузии тепловых нейтронов  $L^2 \neq \tau$ .

Подойдем к обе части уравнения (3.61) оператором  $\left(\Delta - \frac{1}{L^2}\right)$ . Учитывая равенство (3.62), получим:

$$\Delta(\Delta\phi^{(1)}(\vec{r})) - \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{L^2}\right)\Delta\phi^{(1)}(\vec{r}) - \frac{\tilde{K}_\infty - 1 - \varepsilon}{L^2 \tau_c} \phi^{(1)}(\vec{r}) = 0. \quad (3.63)$$

К такому же виду приводится уравнение для функции  $\phi^{(2)}(\vec{r})$ , если на обе части равенства (3.62) подействовать оператором  $\left(\Delta - \frac{1}{\tau}\right)$ . Это говорит о том, что общие решения для  $\phi^{(1)}(\vec{r})$  и  $\phi^{(2)}(\vec{r})$  строятся на базе одних и тех же частных решений. В качестве таких решений можно взять функции  $\psi(\vec{r}) \in \Omega_\Delta$ , не равные тождественно нулю и удовлетворяющие равенству:

$$\Delta\psi(\vec{r}) + \omega\psi(\vec{r}) = 0, \quad (3.64)$$

где параметр  $\omega$  выбирается таким, чтобы уравнение (3.63) обращалось в тождество.

Полагая  $\phi^{(1)}(\vec{r}) = C\psi(\vec{r})$  и учитывая (3.64), установим, что значения  $\omega$  должны совпадать с корнями квадратного уравнения:

$$\omega^2 + \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau}\right)\omega - \frac{\tilde{K}_\infty - 1 - \varepsilon}{L^2 \tau_c} = 0. \quad (3.65)$$

Дискриминант этого уравнения  $\delta = \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{L^2}\right)^2 + \frac{4\tilde{K}_\infty}{L^2 \tau_c} > 0$ .

Поэтому корни  $\omega = \omega_1$ ,  $\omega = \omega_2$  являются действительными, различными и определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau} \right) \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4(\tilde{K}_\infty - 1 - \varepsilon) \tau L^2}{(1 + \varepsilon)(\tau + L^2)^2}} \right], \\ \omega_2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} + \frac{1}{\tau} \right) \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4(\tilde{K}_\infty - 1 - \varepsilon) \tau L^2}{(1 + \varepsilon)(\tau + L^2)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Зависимости  $\omega_1$  и  $\omega_2$  от размножающих свойств зоны ( $\tilde{K}_\infty$ ) приведены на рис.3.2 (для случая, когда  $L^2 < \tau$ ). Видно, что

$$\begin{aligned} \omega_1 < 0 \text{ при } \tilde{K}_\infty < 1 + \varepsilon, & \quad \omega_1 \geq 0 \text{ при } \tilde{K}_\infty \geq 1 + \varepsilon, \\ \omega_2 < 0 \text{ при } \tilde{K}_\infty \geq 0. & \end{aligned}$$

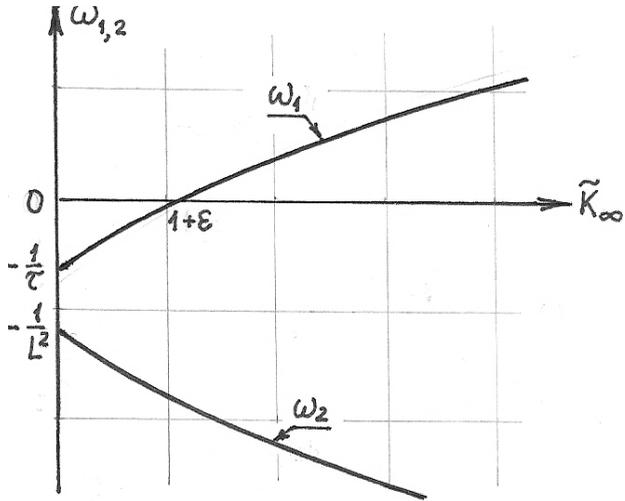


Рис.3.2. Зависимости корней уравнения (3.65) от величины коэффициента  $\tilde{K}_\infty$ .

Таким образом, функции  $\psi_1(\vec{r})$ ,  $\psi_2(\vec{r})$ , удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta\psi_1(\vec{r}) + \omega_1\psi_1(\vec{r}) = 0, \quad \Delta\psi_2(\vec{r}) + \omega_2\psi_2(\vec{r}) = 0, \quad (3.67)$$

являются частными решениями бигармонического уравнения (3.65). Поэтому общие решения для потоков  $\phi^{(1)}(\vec{r})$ ,  $\phi^{(2)}(\vec{r})$  записываются в виде:

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(\vec{r}) &= A_1^{(1)}\psi_1(\vec{r}) + A_2^{(1)}\psi_2(\vec{r}), \\ \phi^{(2)}(\vec{r}) &= A_1^{(2)}\psi_1(\vec{r}) + A_2^{(2)}\psi_2(\vec{r}), \end{aligned} \quad (3.68)$$

где  $A_1^{(1)}$ ,  $A_2^{(2)}$ ,  $A_2^{(1)}$ ,  $A_1^{(2)}$  – постоянные множители, из которых два множителя (например  $A_1^{(1)}$  и  $A_2^{(2)}$ ) могут принимать любые значения, а остальные зависят от них.

Действительно, подставляя в уравнение (3.62) сначала  $\phi^{(1)} = A_1^{(1)}\psi_1(\vec{r})$ ,  $\phi^{(2)} = A_1^{(2)}\psi_1(\vec{r})$ , а затем  $\phi^{(1)} = A_2^{(1)}\psi_2(\vec{r})$ ,  $\phi^{(2)} = A_2^{(2)}\psi_2(\vec{r})$  получим тождество, когда

$$A_1^{(2)} = p A_1^{(1)}, \quad A_2^{(1)} = \tilde{p} A_2^{(2)},$$

$$p = \frac{\varphi \Sigma_d^{(1)}}{\Sigma_a^{(2)} (1 + \omega_1 L^2)}, \quad \tilde{p} = \frac{(1 + \omega_2 L^2) \Sigma_a^{(2)}}{\varphi \Sigma_d^{(1)}}. \quad (3.68)$$

Очевидно, в обоих случаях выполняется также равенство (3.61), так как  $\omega_1, \omega_2$  – корни уравнения (3.65).

Теперь можно приступить к получению условия критичности и асимптотических распределений нейтронов. Эта часть условно-критической задачи решается так же, как в односкоростном приближении. Однако выражения для потоков  $\phi^{(1)}(\vec{r})$  и  $\phi^{(2)}(\vec{r})$  (зависящих в любой одномерной геометрии от одной переменной  $r$ ) должны быть записаны, учитывая соотношения (3.69) и вид частных решений уравнений (3.67). Соответствующие функции приведены в табл. 1.1.

Предположим, что любую зону с номером  $i = 1, 2, \dots$  можно считать либо активной зоной с  $\tilde{K}_\infty^{(i)} > 1 + \varepsilon_i$ , либо отражателем с  $\tilde{K}_\infty^{(i)} = 0$ . Разобьем множество  $I$  номеров зон на два подмножества  $I_p$  и  $I_0$ , включив в  $I_p$  номера активных (размножающих) зон, а в  $I_0$  – номера неразмножающих зон (отражателей). Введем для корней  $\omega_1, \omega_2$  в  $i$ -й зоне обозначения:

$$\omega_1 = \beta_i^2, \quad \omega_2 = -\gamma_i^2, \quad \text{если } i \in I_p;$$

$$\omega_1 = -\nu_i^2 = -\frac{1}{\tau_i}, \quad \omega_2 = -\varrho_i^2 = -\frac{1}{L_i^2}, \quad \text{если } i \in I_0,$$

а для частных решений уравнений (3.67) в той же зоне – обозначения:

$$f(\beta_i r), \quad g(\beta_i r) \quad \text{и} \quad \tilde{f}(\gamma_i r), \quad \tilde{g}(\gamma_i r), \quad \text{если } i \in I_p$$

$$\tilde{f}(\nu_i r), \quad \tilde{g}(\nu_i r) \quad \text{и} \quad \tilde{f}(\varrho_i r), \quad \tilde{g}(\varrho_i r), \quad \text{если } i \in I_0.$$

Тогда потоки быстрых  $\phi^{(1)}(r)$  и тепловых  $\phi^{(2)}(r)$  нейтронов в  $i$ -й зоне (толщиной  $\Delta R_i = R_i - R_{i-1}$ ) принимают вид:

если  $i \in I_p$ , то для  $r \in \Delta R_i$ :

$$\phi_i^{(1)}(r) = a_i f(\beta_i r) + b_i g(\beta_i r) + \tilde{p}_i [c_i \tilde{f}(\gamma_i r) + d_i \tilde{g}(\gamma_i r)],$$

$$\phi_i^{(2)}(r) = p_i [a_i f(\beta_i r) + b_i g(\beta_i r)] + c_i \tilde{f}(\gamma_i r) + d_i \tilde{g}(\gamma_i r);$$

если  $i \in I_0$ , то для  $r \in \Delta R_i$ : (3.70)

$$\phi_i^{(1)}(r) = a_i \tilde{f}(\nu_i r) + b_i \tilde{g}(\nu_i r),$$

$$\phi_i^{(2)}(r) = p_i [a_i \tilde{f}(\nu_i r) + b_i \tilde{g}(\nu_i r)] + c_i \tilde{f}(\varrho_i r) + d_i \tilde{g}(\varrho_i r),$$

где  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – произвольные множители, независимые от переменной  $r$ ,  $p_i, \tilde{p}_i$  – коэффициенты связи (3.69), рассчитываемые по свойствам  $i$ -й зоны.

Значения неизвестных  $a_i, b_i, c_i, d_i$  получим, используя граничные условия, а также условия непрерывности потоков

$\phi^{(k)}(\vec{r})$  и проекций токов  $D^{(k)} \frac{d\phi^{(k)}}{dr}$  ( $k=1,2$ ) на границах зон. В

результате придем к системе линейных (относительно перечисленных выше неизвестных) однородных уравнений с определителем  $D(u)$ , зависящим от параметров  $u$  реактора. Из равенства  $D(u) = 0$  получим критические значения  $u = u_0$  параметров, а затем (как и в односкоростном приближении) определим для всех зон множители  $a_i, b_i, c_i, d_i$ , предварительно приняв один из них равным единице. После этого по формулам (3.70) рассчитаем асимптотические распределения потоков  $\phi^{(1)}(r)$ ,  $\phi^{(2)}(r)$ . При этом возникают те же проблемы, которые обсуждались в разделе 2.2.

### 3.6. Распределения нейтронов в реакторе с отражателем

Воспользуемся полученными выше соотношениями для определения критического размера сферически симметричного реактора. Рассмотрим сначала случай, когда имеется одна активная зона, а при  $r = R_3$  располагается экстраполированная граница.

Тогда потоки нейтронов в активной зоне  $\phi_1^{(1)}(r)$ ,  $\phi_1^{(2)}(r)$  должны удовлетворять условиям:

$$\left[ r^2 \frac{d\phi^{(k)}}{dr} \right]_{r=0} = 0, \quad \phi_1^{(k)}(R_3) = 0, \quad \kappa = 1, 2, \quad (3.71)$$

$$0 \leq \phi_1^{(k)}(r) < \infty \text{ при } 0 \leq r \leq R_3,$$

а частными решениями уравнений (3.67) являются следующие функции:

$$\begin{aligned} f(\beta_1 r) &= \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r}, \quad g(\beta_1 r) = \frac{\cos(\beta_1 r)}{\beta_1 r}, \\ \tilde{f}(\gamma_1 r) &= \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r}, \quad \tilde{g}(\gamma_1 r) = \frac{ch(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \beta_1^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{\tau_1} \right) \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4(K_\infty - 1 - \varepsilon) \tau_1 L_1^2}{(1 + \varepsilon)(L_1^2 + \tau_1)^2}} \right], \\ \gamma_1^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{\tau_1} \right) \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4(K_\infty - 1 - \varepsilon) \tau_1 L_1^2}{(1 + \varepsilon)(L_1^2 + \tau_1)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Однако не все функции (3.72) войдут в выражения (3.70) для потоков  $\phi_1^{(1)}(r)$ ,  $\phi_1^{(2)}(r)$ . Необходимо учитывать, что любая

функция вида  $\psi(r) = a_1 \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} + b_1 \frac{\cos(\beta_1 r)}{\beta_1 r}$  или

$\psi(r) = c_1 \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r} + d_1 \frac{ch(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r}$ , являющаяся решением уравнения

(3.64), должна удовлетворять равенствам (3.71). Нетрудно установить, что первое из них (при  $r = 0$ ) будет выполнено, если  $b_1 = 0$  и  $d_1 = 0$ , а второе (при  $r = R_3$ ) – если  $c_1 = 0$  и  $\sin(\beta_1 R_3) = 0$ . В результате для определения критического радиуса получим соотношение:

$$\beta_1 R_3 = \pi. \quad (3.74)$$

Таким образом, асимптотические распределения потоков имеют вид:

$$\phi_1^{(1)}(r) = a_1 \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r}, \quad \phi_1^{(2)}(r) = a_1 p_1 \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r}. \quad (3.75)$$

Это согласуется с представлением многогрупповых потоков в форме (3.55) и приводит к тому, что:

$$\frac{\phi_1^{(2)}(r)}{\phi_1^{(1)}(r)} = p_1 = \frac{\varphi_1 \Sigma_{d,1}^{(1)}}{\Sigma_{a,1}^{(2)} (1 + \beta_1^2 L_1^2)}. \quad (3.76)$$

Поскольку обычно в активной зоне теплового реактора из-за сильного поглощения тепловых нейтронов топливом  $\Sigma_{a,1}^{(2)} > \Sigma_{d,1}^{(1)}$ ,  $\varphi_1 < 1$ , то значение  $p_1 < 1$ , и следовательно, в реакторе без отражателя при всех  $0 \leq r \leq R_3$  поток тепловых нейтронов меньше потока быстрых нейтронов.

Чтобы выяснить влияние отражателя на распределение нейтронов, рассмотрим реактор, состоящий из активной зоны радиуса  $R$ , окруженной бесконечным отражателем. В таком реакторе должны выполняться условия:

$$\left[ r^2 \frac{d\phi_1^{(k)}}{dr} \right]_{r=0} = 0, \quad 0 \leq \phi_1^{(k)} < \infty, \quad 0 \leq \phi_2^{(k)}(r) < \infty, \quad (3.77)$$

$$\phi_1^{(k)}(R) = \phi_2^{(k)}(R), \quad D_1^{(k)} \frac{d\phi_1^{(k)}}{dr} \Big|_{r=R} = D_2^{(k)} \frac{d\phi_2^{(k)}}{dr} \Big|_{r=R}, \quad (3.78)$$

а при построении зависимостей  $\phi^{(1)}(r)$ ,  $\phi^{(2)}(r)$  наряду с функциями (3.72) могут рассматриваться (при  $R \leq r$ ):

$$\tilde{f}(\nu_2 r) = \frac{1}{\nu_2 r} \exp(-\nu_2 r), \quad \tilde{g}(\nu_2 r) = \frac{1}{\nu_2 r} \exp(\nu_2 r),$$

$$\tilde{f}(\varrho_2 r) = \frac{1}{\varrho_2 r} \exp(-\varrho_2 r), \quad \tilde{g}(\varrho_2 r) = \frac{1}{\varrho_2 r} \exp(\varrho_2 r),$$

где  $\nu_2 = \frac{1}{\sqrt{\tau_2}}$ ,  $\varrho_2 = \frac{1}{L_2}$ . Здесь учтено, что в неограниченно

протяженных зонах без размножения вместо гиперболических функций  $sh(ar)$ ,  $ch(ar)$  следует брать экспоненты  $\exp(-ar)$ ,  $\exp(ar)$ .

Так же, как в реакторе без отражателя, для выполнения условия (3.77) при  $r = 0$  необходимо в выражениях (3.70) для потоков в активной зоне принять  $b_1 = 0$ ,  $d_1 = 0$ . Из условий ограниченности решений на бесконечности следует, что в отражателе  $b_2 = 0$ ,  $d_2 = 0$ . Поэтому имеем:

$$\begin{aligned}\phi_1^{(1)}(r) &= a_1 \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} + \tilde{p}_1 c_1 \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r}, & 0 \leq r \leq R, \\ \phi_1^{(2)}(r) &= p_1 a_1 \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} + c_1 \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r}, & 0 \leq r \leq R, \\ \phi_2^{(1)}(r) &= a_2 \frac{1}{\nu_2 r} \exp(-\nu_2 r), & R \leq r < \infty, \\ \phi_2^{(2)}(r) &= p_2 a_2 \frac{1}{\nu_2 r} \exp(-\nu_2 r) + c_2 \frac{1}{\varrho_2 r} \exp(-\varrho_2 r), & R \leq r < \infty,\end{aligned}\quad (3.79)$$

где параметры  $\beta_1$  и  $\gamma_1$  по-прежнему рассматриваются по формулам (3.73), а коэффициенты связи определяются равенствами

$$p_1 = \frac{\varphi_1 \Sigma_{d,1}^{(1)}}{\Sigma_{a,1}^{(2)} (1 + \beta_1^2 L_1^2)}, \quad \tilde{p}_1 = \frac{(1 - \gamma_1^2 L_1^2) \Sigma_{a,1}^{(2)}}{\varphi_1 \Sigma_{d,1}^{(2)}}, \quad p_2 = \frac{\Sigma_{d,2}^{(1)} \tau_2}{\Sigma_{a,2}^{(2)} (\tau_2 - L_2^2)}.\quad (3.80)$$

Коэффициенты  $a_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $c_2$  находятся, используя соотношения (3.78) между потоками и токами нейтронов на границе  $r = R$ . Получаемое при этом условие критичности реактора имеет достаточно сложный вид. Известно [5], что его можно существенно упростить, если принять следующие допущения: в активной зоне и отражателе один и тот же замедлитель, отсутствует поглощение замедляющихся нейтронов, а активная зона имеет достаточно большие размеры. В этом случае можно считать, что  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ ,  $D_1^{(1)} = D_2^{(1)}$ ,  $\Sigma_{a,1}^{(1)} = \Sigma_{a,2}^{(1)} = 0$ ,  $\nu_f^{(1)} \Sigma_{f,1}^{(1)} = 0$ ,  $\gamma_1 R \gg 1$ . Тогда, вводя в рассмотрение эффективную добавку  $\delta = R_3 - R$  (где  $R_3 = \frac{\pi}{\beta_1}$  – критический радиус реактора

без отражателя), условие критичности принимает вид:

$$\beta_1 \delta = \arctg(\beta_1 L_2) + \arctg(\beta_1 \sqrt{\tau}) - \arctg \frac{\beta_1}{\gamma_1}, \quad (3.81)$$

откуда нетрудно оценить критический радиус  $R$  реактора с отражателем.

Выражения (3.79) для потоков нейтронов (в случае, когда  $D_1^{(1)} = D_2^{(1)}$ ) могут быть преобразованы к виду:

$$\begin{aligned} \phi_1^{(1)}(r) &= a_1 \left[ \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} - \eta_1 \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r} \right], \\ \phi_1^{(2)}(r) &= a_1 p_1 \left[ \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} - \frac{\eta_1}{p_1 \tilde{p}_1} \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r} \right], \\ \phi_2^{(1)}(r) &= \phi_1^{(1)}(R) \frac{R}{r} \exp\left(-\frac{r-R}{\sqrt{\tau_2}}\right), \\ \phi_2^{(2)}(r) &= p_2 \phi_1^{(1)}(R) \frac{R}{r} \left[ \exp\left(-\frac{r-R}{\sqrt{\tau_2}}\right) + \left(\frac{\phi_1^{(2)}(R)}{p_2 \phi_1^{(1)}(R)} - 1\right) \exp\left(-\frac{r-R}{L_2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.82)$$

где 
$$\eta_1 = \frac{\gamma_1}{\beta_1} \frac{\beta_1 \sqrt{\tau_2} \cos(\beta_1 \delta)}{sh(\gamma_1 R) + \gamma_1 \sqrt{\tau_2} ch(\gamma_1 R)} \left[ \frac{tg(\beta_1 \delta)}{\beta_1 \sqrt{\tau_2}} - 1 \right],$$

$$p_1 \tilde{p}_1 = \frac{1 - \gamma_1^2 L_1^2}{1 + \beta_1^2 L_1^2} < 0, \quad 0 < \eta_1 \ll 1.$$

Последнее неравенство (для  $\eta_1$ ) нетрудно установить, если наряду с ранее принятыми допущениями (при которых имеет место формула (3.81) для  $\delta$ ) считать, что:  $\beta_1 L_2 < 1$ ,  $\beta_1 \sqrt{\tau} < 1$ ,  $L_2 > L_1$ ,

$$\delta < \frac{1}{2} R_3.$$

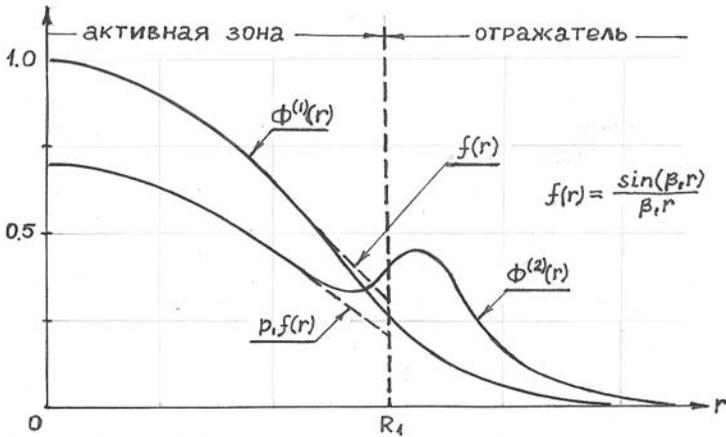


Рис.3.3. Распределения потоков быстрых  $\phi_1^{(1)}(r)$  и тепловых  $\phi_1^{(2)}(r)$  нейтронов в реакторе с отражателем

- Анализ выражений (3.82) показывает, что
- в активной зоне вдали от границы с отражателем ( $r = R$ ) потоки  $\phi_1^{(1)}(r)$ ,  $\phi_1^{(2)}(r)$  (как и в реакторе без отражателя) пропорциональны одной и той же функции  $f(r) = \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r}$ ;
  - по мере приближения к границе  $r = R$  поток тепловых нейтронов  $\phi_1^{(2)}(r)$  возрастает, а поток быстрых нейтронов  $\phi_1^{(1)}(r)$  уменьшается относительно значений  $p_1 f(r)$  и  $f(r)$ , соответственно; поэтому:

$$\frac{\phi_1^{(1)}(R)}{\phi_1^{(2)}(R)} < \left[ \frac{\phi_1^{(1)}}{\phi_1^{(2)}} \right]_{\delta/o} = \frac{1}{p_1}, \quad (3.83)$$

где  $\left[ \frac{\phi_1^{(1)}}{\phi_1^{(2)}} \right]_{\delta/o}$  – отношение потоков в реакторе без отражателя, совпадающее с (3.76);

- может оказаться, что в отражателе поток тепловых нейтронов  $\phi_2^{(2)}(r)$  по мере удаления от  $r = R$  начнет расти и достигнет при некотором значении  $r = R_o$  максимального значения  $\phi_2^{(2)}(R_o)$ ; это

возможно когда  $\left. \frac{d\phi_2^{(2)}}{dr} \right|_{r=R} > 0$ , что эквивалентно условию:

$$\frac{\phi_1^{(1)}(R)}{\phi_1^{(2)}(R)} > \left(1 + \frac{L_2}{R}\right) \left(1 + \frac{L_2}{\sqrt{\tau_2}}\right) \frac{\Sigma_{a,2}^{(2)}}{\Sigma_{d,2}^{(1)}}. \quad (3.84)$$

Учитывая неравенства (3.83), (3.84) и принимая во внимание выражения (3.74) и (3.80), приходим к соотношению:

$$\frac{\Sigma_{a,1}^{(2)}}{\phi_1 \Sigma_{d,1}^{(1)}} \frac{1 + \pi^2 \left(\frac{L_1}{R_3}\right)^2}{1 + \frac{L_2}{R}} > \left(1 + \frac{L_2}{\sqrt{\tau_2}}\right) \frac{\Sigma_{a,2}^{(2)}}{\Sigma_{d,2}^{(1)}}.$$

Оно показывает, что рост потока тепловых нейтронов в отражателе можно ожидать в реакторе с небольшим размером активной зоны и отражателем, имеющим высокую замедляющую способность и низкое поглощение тепловых нейтронов. Отличенные особенности отражены на рис.10, где приведены зависимости  $\phi^{(1)}(r)$  и  $\phi^{(2)}(r)$  для реактора с указанными выше свойствами.

### 3.7. Условно-критическая задача в $P_1$ - приближении

Задачи о критичности многозонного реактора обычно решаются, используя метод итераций источников. Этот метод, изложенный в разделе 2.4 для односкоростной модели, нетрудно обобщить на случай многогрупповых моделей. Отличие будет состоять лишь в том, что теперь на каждой  $n$ -й итерации вместо одного уравнения вида (2.37) решается система уравнений для потоков нейтронов  $\phi_n^{(k)}(r) \in \Omega^{(k)}$   $n$ -го поколения ( $k = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\text{div} \bar{J}_n^{(k)}(\vec{r}) + \Sigma_{ad}^{(k)} \phi_n^{(k)}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \phi_n^{(j)}(\vec{r}) + \chi^{(k)} q_{n-1}(r). \quad (3.85)$$

Здесь распределение источников  $q_{n-1}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^m \nu_f^{(k)} \Sigma_j^{(k)} \phi_{n-1}^{(k)}(\vec{r})$  известно, а токи нейтронов того же поколения  $\vec{J}_n^{(k)}(\vec{r})$  могут быть связаны с потоками  $\phi_n^{(k)}(\vec{r})$  соотношениями:

$$\text{grad} \phi_n^{(k)}(\vec{r}) + 3 \Sigma_{tr}^{(k)} \vec{J}_n^{(k)}(\vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (3.86)$$

если рассматривается диффузионное приближение (3.36), и соотношениями:

$$\text{grad} \phi_n^{(k)}(\vec{r}) + 3 \Sigma_{t1}^{(k)} \vec{J}_n^{(k)}(\vec{r}) = 3 \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_{d1}^{(j \rightarrow k)} \vec{J}_n^{(j)}(\vec{r}), \quad (3.87)$$

если рассматривается  $P_1$ -приближение (3.41).

Как и в односкоростной модели, итерации прекращают, когда при заданной погрешности  $\varepsilon > 0$  выполнится неравенство вида (2.38). Полученные на последней итерации  $n = p$  значение  $K^{(p)}$  и функции  $\phi_p^{(k)}(\vec{r})$  принимаются в качестве решения условно-критической задачи:

$$K_{\phi} = K^{(p)}, \quad \phi^{(k)}(\vec{r}) = C \phi_p^{(k)}(\vec{r}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.88)$$

Также рекомендуется на 1-й итерации источник  $q_0(\vec{r})$  задавать в виде неотрицательной функции, а для  $(n+1)$ -й итерации

рассчитывать по формуле:  $q_n(\vec{r}) = \frac{1}{K^{(n)}} \sum_{k=1}^m \nu_f^{(k)} \Sigma_j^{(k)} \phi_n^{(k)}(\vec{r})$ .

Каждое из уравнений (3.85) совпадает по форме с уравнением (2.37) односкоростной модели и решается численно с использованием известных алгоритмов. В случае диффузионного приближения, когда принимаются соотношения (3.86), можно воспользоваться алгоритмами, изложенными в разделах 2.4 и 2.5. При использовании  $P_1$ -приближения и соотношений (3.87) они претерпевают незначительные изменения. Поясним их на примере многозонного реактора в одной из простых одномерных геометрий.

Уравнения (3.85), (3.87) для  $k$ -й группы нейтронов запишем в виде 2-х дифференциальных уравнений 1-го порядка (индексы группы и номера итераций опущены):

$$\frac{d(r^\nu J(r))}{dr} + r^\nu \Sigma(r) \phi(r) = r^\nu q(r), \quad (3.89)$$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} + 3\tilde{\Sigma}(r)J(r) = 3\tilde{q}(r), \quad (3.90)$$

где макроскопические сечения  $\Sigma(r)$ ,  $\tilde{\Sigma}(r)$  и распределения  $q(r)$ ,  $\tilde{q}(r)$  терпят разрывы на границах зон, поток  $\phi(r)$  и проекция тока  $J(r)$  непрерывны при всех значениях  $0 \leq r \leq R_s$  и удовлетворяют условиям  $J(0) = 0$ ,  $\phi(R_s) = 0$ .

Разместив в области изменения переменной  $r$  основные и вспомогательные точки с координатами  $r_l < r_{l+(1/2)} < r_{l+1}$  ( $l = 1, 2, \dots$ ), проинтегрируем уравнение (3.89) по  $r \in [r_{l-(1/2)}, r_{l+(1/2)}]$ , а уравнение (3.90) – по  $r \in [r_e, r_{e+1}]$ . Проведя с полученными равенствами те же преобразования, что и в разделе 2.4, придем к конечно-разностным уравнениям:

$$r_{l-(1/2)}^\nu J_{l-(1/2)} - r_{l+(1/2)}^\nu J_{l+(1/2)} - \langle \Sigma \rangle_l \phi_l \Delta V_l = -\langle q \rangle_l \Delta V_l, \quad (3.91)$$

$$J_{l+(1/2)} = \frac{\phi_l - \phi_{l+1}}{3\tilde{\Sigma}_{l+(1/2)} \Delta r_{l+(1/2)}} + \frac{\tilde{q}_{l+(1/2)}}{\tilde{\Sigma}_{l+(1/2)}}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (3.92)$$

где  $\tilde{q}_{l+(1/2)} = \tilde{q}(r_{l+(1/2)})$ ,  $\phi_l = \phi(r_l)$ ,  $J_{l+(1/2)} = J(r_{l+(1/2)})$ ,  $\tilde{\Sigma}_{l+(1/2)} = \tilde{\Sigma}(r_{l+(1/2)})$ , а остальные обозначения совпадают с принятыми в разделе 2.4. Если теперь из уравнения (3.91) исключить  $J_{l-(1/2)}$ ,  $J_{l+(1/2)}$ , используя для них соотношения (3.92), то получим систему 3-точечных уравнений, отличающихся от равенств (2.54) лишь способом расчёта источников  $f_l$ :

$$f_l = \langle q \rangle_l \Delta V_l - r_{l+(1/2)}^\nu \frac{\tilde{q}_{l+(1/2)}}{\tilde{\Sigma}_{l+(1/2)}} + r_{l-(1/2)}^\nu \frac{\tilde{q}_{l-(1/2)}}{\tilde{\Sigma}_{l-(1/2)}}. \quad (3.93)$$

Такая система легко решается методом прогонки.

Если при использовании диффузионного приближения всегда  $f_l \geq 0$ , то теперь не исключается появление отрицательных значений для источников  $f_l$  и, возможно, для потоков  $\phi_e$ . Как

видно из выражения (3.93), необходимым (но не достаточным) условием для получения  $\phi_l < 0$  будет выполнение неравенства:

$$\frac{\tilde{q}_{l+(1/2)}}{\tilde{\Sigma}_{l+(1/2)}} - \left( \frac{r_{l-(1/2)}}{r_{l+(1/2)}} \right)^v \frac{\tilde{q}_{l-(1/2)}}{\tilde{\Sigma}_{l-(1/2)}} > \langle q \rangle_l \Delta V_l,$$

что имеет место, когда или значения  $\tilde{\Sigma}_{l+(1/2)}$  и  $\tilde{\Sigma}_{l-(1/2)}$  сильно различаются, либо проекция тока (от которой зависят  $\tilde{q}_{l+(1/2)}$ ) намного превышает поток нейтронов (от которого зависит  $\langle q \rangle_l$ ). Но при этом не применимо  $P_1$ -приближение и, следовательно, надо переходить к более точному описанию распределения нейтронов.

#### **Глава 4. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА РАЗМНОЖЕНИЯ НЕЙТРОНОВ**

В практике расчётов ядерных реакторов часто требуется найти изменения различных физических характеристик, вызванные небольшими отклонениями технологических параметров: концентраций ядер, микроскопических сечений, температур и т.п. В общем случае эта задача решается с помощью методов теории возмущений, использующей такие понятия, как сопряжённые операторы и сопряжённые функции.

*Определение.* Пусть  $\hat{M}$  – линейный оператор, определённый на функциях  $\varphi \in \Omega \subset H$ , принадлежащих некоторому плотному в гильбертовом пространстве  $H$  множеству  $\Omega$ . Тогда сопряжённым к  $\hat{M}$  называют такой оператор  $\hat{M}^+$ , определённый на функциях  $\varphi^+ \in \Omega^+ \subset H$ , что выполняется тождество:

$$\langle \varphi^+, \hat{M}\varphi \rangle = \langle \hat{M}^+\varphi^+, \varphi \rangle, \quad (4.1)$$

где скобки  $\langle, \rangle$  обозначают скалярное произведение стоящих внутри них и разделённых запятой функций.

Опираясь на определение (4.1), можно любому оператору линейного уравнения переноса нейтронов, записанному в каком-либо приближении, поставить в соответствие сопряжённый

оператор. В результате придём к сопряжённому уравнению реактора относительно сопряжённой функции  $\phi^+$ , принадлежащей множеству  $\Omega^+ \subset H$  и позволяющей (при известном распределении нейтронов) изменения рассматриваемой характеристики реактора выразить через отклонения технологических параметров.

В этом разделе изложенный выше подход использован для получения изменения  $\delta K_{\text{эф}}$  эффективного коэффициента размножения нейтронов  $K_{\text{эф}}$ . При этом считается, что реактор состоит из нескольких зон разного состава, а  $K_{\text{эф}}$  и асимптотические потоки нейтронов  $\phi^{(k)}(\vec{r})$  находятся из решения условно-критической задачи (3.32), (3.36), (3.43) в многогрупповом диффузионном приближении. Микроскопические сечения определяются по формулам (3.38) и не меняются при изменении технологических параметров.

Основные уравнения рассматриваемого приближения для потоков  $\phi^{(k)}(\vec{r})$  перепишем в виде:

$$-\text{div} \vec{J}^{(k)}(\vec{r}) - \Sigma_{ad}^{(k)} \phi^{(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \phi^{(j)}(\vec{r}) + \frac{1}{K_{\text{эф}}^{(k)}} \chi^{(k)} \sum_{l=1}^m \nu_f^{(l)} \Sigma_f^{(l)} \phi^{(l)}(\vec{r}) = 0, \quad (4.2)$$

$$3 \Sigma_{tr}^{(k)} \vec{J}^{(k)}(\vec{r}) + \text{grad} \phi^{(k)}(\vec{r}) = 0, \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (4.3)$$

приняв те же обозначения для макроскопических сечений в  $k$ -х энергетических группах  $\Sigma_{ad}^{(k)}$ ,  $\Sigma_d^{(j \rightarrow k)}$ ,  $\Sigma_{tr}^{(k)}$ ,  $\nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)}$ ,  $\chi^{(k)}$ , что и в разделе 3.1. Как и раньше, будем считать, что решения уравнений (4.2), (4.3) ищутся среди функций  $\phi^{(k)}(\vec{r}) \in \Omega_k$ , а множества  $\Omega_k$  описываются условиями:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}), \quad (\vec{J}^{(k)}(\vec{r}), \vec{n}) - \text{непрерывны при } \vec{r} \in V, \\ \phi^{(k)}(\vec{r}_s) = 0, \quad k=1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Здесь  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к границе раздела двух сред, а  $\vec{r}_s$  – радиус-вектор точек экстраполированной границы.

#### 4.1. Основные соотношения теории возмущений

Пусть  $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  – вектор технологических параметров с известными компонентами  $u_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), которым соответствуют определённые значения размеров зон и макроскопических сечений. Из решения системы уравнений (4.2), (4.3) при условиях (4.4) получены значение  $K'_{\text{эф}}$  и распределения  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ ,  $\vec{J}^{(k)}(\vec{r})$ . Предположим, что затем произошло изменение одного или нескольких технологических параметров до значений  $u'_j = u_j + \delta u_j$ . Это повлечёт за собой изменения макроскопических сечений (в одной или нескольких зонах, а может быть – в какой-либо части отдельной зоны) до значений:

$$\begin{aligned} \Sigma'_{tr}{}^{(k)} &= \Sigma_{tr}{}^{(k)} + \delta \Sigma_{tr}{}^{(k)}, & \Sigma'_{ad}{}^{(k)} &= \Sigma_{ad}{}^{(k)} + \delta \Sigma_{ad}{}^{(k)}, & \Sigma'^{(j \rightarrow k)}_d &= \Sigma_d{}^{(j \rightarrow k)} + \delta \Sigma_d{}^{(j \rightarrow k)}, \\ \nu'_f{}^{(k)} \Sigma'_f{}^{(k)} &= \nu_f{}^{(k)} \Sigma_f{}^{(k)} + \delta (\nu_f{}^{(k)} \Sigma_f{}^{(k)}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

В результате изменится решение задачи (4.2) – (4.4):

$$\begin{aligned} K'_{\text{эф}} &= K_{\text{эф}} + \delta K_{\text{эф}}, & \phi'^{(k)}(\vec{r}) &= \phi^{(k)}(\vec{r}) + \delta \phi^{(k)}(\vec{r}), \\ \vec{J}'^{(k)}(\vec{r}) &= \vec{J}^{(k)}(\vec{r}) + \delta \vec{J}^{(k)}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Реактор с первоначально заданным вектором  $\bar{u}$  технологических параметров будем называть невозмущённым реактором, реактор с изменённым вектором  $\bar{u}' = \bar{u} + \delta \bar{u}$  – возмущённым реактором, а изменение  $\delta \bar{u}$  – возмущением реактора. Новые значения  $K'_{\text{эф}}$ ,  $\phi'^{(k)}(\vec{r})$ ,  $\vec{J}'^{(k)}(\vec{r})$  удовлетворяют уравнениям:

$$- \text{div} \vec{J}'^{(k)}(\vec{r}) - \Sigma'_{ad}{}^{(k)} \phi'^{(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma'_d{}^{(j \rightarrow k)} \phi'^{(j)}(\vec{r}) + \frac{1}{K'_{\text{эф}}} \chi^{(k)} \sum_{l=1}^m \nu'_f{}^{(l)} \Sigma'_f{}^{(l)} \phi'^{(l)}(\vec{r}) = 0, \quad (4.7)$$

$$3 \Sigma'_{tr}{}^{(k)} \vec{J}'^{(k)}(\vec{r}) + \text{grad} \phi'^{(k)}(\vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (4.8)$$

и ищутся при условиях  $\phi'^{(k)}(\vec{r}) \in \Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . (4.9)

Принимается, что с изменением технологических параметров спектр нейтронов деления  $\chi^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , и область  $V$

изменения аргументов  $\vec{r}$  не меняются. Получение эффективного коэффициента размножения и асимптотических потоков нейтронов путём решения уравнений (4.2) - (4.4) для невозмущённого реактора будем называть невозмущённой задачей, а нахождение тех же характеристик из решения уравнений (4.7) - (4.9) – возмущённой задачей.

Изменение  $\delta K_{эф} = K'_{эф} - K_{эф}$  можно получить при заданном отклонении  $\delta u_j = u'_j - u_j$  технологических параметров, не прибегая, вообще говоря, к методам теории возмущений. Для этого возмущённую задачу (4.7) - (4.9) достаточно решить столько раз, сколько вносится в реактор различных возмущений. Например, если требуется определить изменения  $\delta K_{эф}$ , происходящие при изменении каждого из  $n$  технологических параметров, то следует помимо одной невозмущённой задачи (4.2) – (4.4) решить  $n$  возмущённых задач вида (4.7) - (4.9), задавая для каждой из них вектор  $\vec{u}' = \vec{u}^{(j)} = (u_1, u_2, \dots, u_{j-1}, u_j + \delta u_j, u_{j+1}, \dots, u_n)^T$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , и получая соответствующие значения  $K_{эф} = K_{эф}^{(j)}$ ,  $\delta K_{эф} = K_{эф}^{(j)} - K_{эф}$ . Такой способ будем называть разностным методом определения  $\delta K_{эф}$ . Он имеет следующие недостатки:

1. Если  $n$  велико, то придётся потратить много времени для нахождения всех значений  $\delta K_{эф}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Например, это имеет место, когда в качестве возмущений рассматриваются изменения микроскопических сечений, а расчёты проводятся в 26- групповом приближении.
2. Если погрешность  $\varepsilon$  определения значений  $K_{эф}$ ,  $K'_{эф}$  при решении задач (4.2) - (4.4) и (4.7) - (4.9) сравнима с изменением  $\delta K_{эф}$  (т.е.  $|\delta K_{эф}| \approx \varepsilon$ ), то можно получить неправильное представление о зависимости  $\delta K_{эф}$  от  $\delta u_j$ . Это может случиться, когда изменения  $\delta u_j$  малы, например, при нахождении температурных коэффициентов реактивности.

Введём в рассмотрение функции  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$  и векторные функции  $\vec{J}^{+(k)}(\vec{r}) = J_x^{+(k)}\vec{e}_x + J_y^{+(k)}\vec{e}_y + J_z^{+(k)}\vec{e}_z$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) с проекциями  $J_x^{+(k)}(\vec{r})$ ,  $J_y^{+(k)}(\vec{r})$ ,  $J_z^{+(k)}(\vec{r})$  на координатные оси  $x, y, z$  соответственно ( $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  – единичные орты). Будем считать, что они определены при значениях  $\vec{r} \in V$  и удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \phi^{+(k)}(\vec{r}), \quad (\vec{J}^{+(k)}(\vec{r}), \vec{n}) & \text{ – непрерывны при } \vec{r} \in V; \\ \phi^{+(k)}(\vec{r}_3) & = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Умножая уравнения (4.7) на  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$ , а уравнения (4.8) – скалярно на функции  $\vec{J}^{+(k)}(\vec{r})$ , интегрируя по переменным  $\vec{r} \in V$  и складывая, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_V \phi^{+(k)}(\vec{r}) & \left[ -\operatorname{div} \vec{J}'^{(k)}(\vec{r}) - \Sigma_{ad}'^{(k)} \phi'^{(k)}(\vec{r}) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{r-1} \Sigma_d'^{(j \rightarrow k)} \phi'^{(j)}(\vec{r}) + \frac{1}{K'_{\varphi\phi}} \chi^{(k)} \sum_{l=1}^m \nu_f'^{(l)} \Sigma_f'^{(l)} \phi'^{(l)}(\vec{r}) \right] dV + \\ & + \sum_{k=1}^m \int_V (\vec{J}^{+(k)}(\vec{r}), 3\Sigma_{rr}'^{(k)} \vec{J}'^{(k)}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \phi'^{(k)}(\vec{r})) dV = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Преобразуем выражение (4.11), используя формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_V \operatorname{div}(f(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})) dV & = \int_V f(\vec{r}) \operatorname{div} \vec{g}(\vec{r}) dV + \int_V (\vec{g}(\vec{r}), \operatorname{grad} f(\vec{r})) dV = \\ & = \oint_S f(\vec{r}_s) (\vec{g}(\vec{r}_s), \vec{n}) dS, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $S$  – поверхность, ограничивающая объём  $V$ ,  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали, а  $f(\vec{r})$ ,  $\vec{g}(\vec{r})$  – непрерывные вместе со своими частными производными 1-го порядка функции радиус-вектора точки  $\vec{r}$ . Учитывая при этом условия (4.4) и (4.10), будем иметь:

$$\int_V \phi^{+(k)}(\vec{r}) \operatorname{div} \vec{J}'^{(k)}(\vec{r}) dV = - \int_V (\vec{J}'^{(k)}(\vec{r}), \operatorname{grad} \phi^{+(k)}(\vec{r})) dV$$

$$\int_V (\vec{J}^{+(k)}(\vec{r}), \operatorname{grad} \phi'^{(k)}(\vec{r})) dV = - \int_V \phi'^{(k)}(\vec{r}) \operatorname{div} \vec{J}^{+(k)}(\vec{r}) dV \quad (4.13)$$

Кроме того, меняя порядок суммирования, получим:

$$\sum_{k=1}^m \phi^{+(k)}(\vec{r}) \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d'^{(j \rightarrow k)} \phi'^{(j)}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^m \phi'^{(k)}(\vec{r}) \sum_{j=k+1}^m \Sigma_d'^{(k \rightarrow j)} \phi^{+(j)}(\vec{r}) \quad (4.14)$$

Возмущённые значения макроскопических сечений заменим суммами (4.5), воспользуемся равенствами (4.6), а среди функций, удовлетворяющих условиям (4.10), выберем такие, которые будут решениями уравнений:

$$- \operatorname{div} \vec{J}^{+(k)}(\vec{r}) - \Sigma_{ad}^{(k)} \phi^{+(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=k+1}^m \Sigma_d'^{(k \rightarrow j)} \phi^{+(j)}(\vec{r}) +$$

$$+ \frac{1}{K_{\text{эф}}} \nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)} \sum_{l=1}^m \chi^{(l)} \phi^{+(l)}(\vec{r}) = 0, \quad (4.15)$$

$$3 \Sigma_{tr}^{(k)} \vec{J}^{+(k)}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \phi^{+(k)}(\vec{r}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.16)$$

В результате придём к равенству:

$$- \delta \left( \frac{1}{K_{\text{эф}}} \right) G_f'^+ = \sum_{k=1}^m \int_V 3 \delta \Sigma_{tr}^{(k)} (\vec{J}^{+(k)}(\vec{r}), \vec{J}'^{(k)}(\vec{r})) dV +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \int_V \phi^{+(k)}(\vec{r}) \left[ - \delta \Sigma_{ad}^{(k)} \phi'^{(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{k-1} \delta \Sigma_d'^{(j \rightarrow k)} \phi'^{(j)}(\vec{r}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \chi^{(k)} \sum_{l=1}^m \delta (\nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)}) \phi'^{(l)}(\vec{r}) \right] dV, \quad (4.17)$$

в котором  $G_f'^+ = \int_V \sum_{k=1}^m \chi^{(k)} \phi^{+(k)}(\vec{r}) \sum_{l=1}^m \nu_f^{(l)} \Sigma_f^{(l)} \phi'^{(l)}(\vec{r}) dV$ .

Уравнения (4.15), (4.16) будем называть сопряжёнными уравнениями условно-критического (невозмущённого) реактора, а выражение (4.17) – точной формулой теории возмущений для изменения реактивности. Использование формулы (4.17) в расчётах изменения реактивности предполагает знание распределений  $\phi'^{(k)}(\vec{r})$ ,  $\vec{J}'^{(k)}(\vec{r})$  в возмущённом реакторе. Это приводит (как и в

случае разностного метода нахождения  $\delta K_{\text{эф}}$  к большому объёму вычислений, когда рассматривается много различных возмущений. Можно существенно сократить вычисления, если предположить, что возмущения малы, а решение задачи (4.7) - (4.9) меняется непрерывно с изменением  $\delta \bar{u}$ , т.е. отклонения  $\delta K_{\text{эф}}$ ,  $\delta \phi^{(k)}$ ,  $\delta \bar{J}^{(k)}$ ,  $\delta \Sigma_{tr}^{(k)}$ ,  $\delta \Sigma_{ad}^{(k)}$ ,  $\delta \Sigma_d^{(j \rightarrow k)}$ ,  $\delta (v_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)})$ ,  $\delta \bar{u}$  являются величинами одного и того же порядка малости. При этом речь идёт об изменении нормированного асимптотического потока в любой части реактора.

Заменим в равенстве (4.17) возмущённые значения  $v_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)}$ ,  $\phi^{(k)}$ ,  $\bar{J}^{(k)}$  суммами (4.5), (4.6). Ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости  $O(|\delta \bar{u}|)$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\delta K_{\text{эф}}}{K_{\text{эф}}^2} G_f^+ = & \sum_{k=1}^m \int_V 3 \delta \Sigma_{tr}^{(k)} (\bar{J}^{+(k)}(\bar{r}), \bar{J}^{(k)}(\bar{r})) dV - \sum_{k=1}^m \int_V \phi^{+(k)}(\bar{r}) \delta \Sigma_{ad}^{(k)} \phi^{(k)}(\bar{r}) dV + \\ & + \sum_{k=1}^m \int_V \phi^{+(k)}(\bar{r}) \sum_{j=1}^{k-1} \delta \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \phi^{(k)}(\bar{r}) dV + \\ & + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \int_V \sum_{k=1}^m \chi^{(k)} \phi^{+(k)}(\bar{r}) \sum_{l=1}^m \delta (v_f^{(l)} \Sigma_f^{(l)}) \phi^{(l)}(\bar{r}) dV, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\text{где } G_f^+ = \int_V \sum_{k=1}^m \chi^{(k)} \phi^{+(k)}(\bar{r}) \sum_{l=1}^m v_f^{(l)} \Sigma_f^{(l)} \phi^{(l)}(\bar{r}) dV, \quad (4.19)$$

и принято, что в рассматриваемом случае  $\delta \left( \frac{1}{K_{\text{эф}}} \right) = - \frac{\delta K_{\text{эф}}}{K_{\text{эф}}^2}$ .

Соотношение (4.18) называют формулой теории малых возмущений. Она позволяет ограничиться решением всего лишь двух задач (4.2) - (4.4) и (4.10), (4.15), (4.16), сформулированных для невозмущённого реактора. Не требуется находить распределения нейтронов в возмущённых реакторах. За счёт этого удаётся заметно снизить вычислительные затраты по сравнению с теми, которые делаются при использовании точной формулы (4.17). Однако соотношением (4.18) можно пользоваться лишь в том случае, когда возмущение реактора мало. При этом должно

быть близко к нулю не только значение  $|\delta K_{эф}|$ , но и отклонения  $|\delta\phi^{(k)}(\vec{r})|$  при любых  $\vec{r} \in V$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ .

## 4.2. Итерационный метод решения

Получение распределений  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ ,  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$  связано с рассмотрением двух задач на собственные значения: решением системы однородных уравнений (4.2), (4.3) или (4.15), (4.16) при условиях (4.4) или (4.10), включающих обращение в нуль искомым функций на внешней (экстраполированной) границе реактора. Известно, что эти задачи имеют одинаковый спектр собственных значений, состоящий лишь из отдельных чисел  $k_0, k_1, \dots$ . Самое большое (по модулю) число  $k_0 = \max(|k_0|, |k_1|, \dots)$  является действительным, положительным и имеет смысл эффективного коэффициента размножения нейтронов  $K_{эф}$ . Ему соответствует единственное решение: векторная функция  $\bar{\psi}_0(\vec{r})$  с компонентами  $\psi_0^{(k)}(\vec{r})$  в задаче (4.2) – (4.4) и векторная функция  $\bar{\psi}_0^+(\vec{r})$  с компонентами  $\psi_0^{+(k)}(\vec{r})$  в задаче (4.15), (4.16). Поскольку собственные функции определены с точностью до постоянных множителей, то можно считать, что

$$\phi^{(k)}(\vec{r}) = \psi_0^{(k)}(\vec{r}), \quad \phi^{+(k)}(\vec{r}) = \psi_0^{+(k)}(\vec{r}).$$

Для нахождения собственных функций, соответствующих максимальному числу  $k_0 = K_{эф}$ , используется метод итераций источника. Ранее (в разделе 1) для реактора без отражателя в односкоростном диффузионном приближении была продемонстрирована сходимость метода к функции  $\psi_0(\vec{r})$ . Обоснование сходимости метода в общем случае дано в работе [3]. В главе 3 изложен алгоритм метода для определения асимптотических потоков  $\phi^{(k)}(\vec{r})$  в многогрупповом диффузионном приближении. При решении сопряжённых уравнений (4.15), (4.16) он выглядит следующим образом.

На каждой  $n$ -й итерации последовательно, начиная с последней энергетической группы нейтронов  $m$ , решаются уравнения:

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}(D^{(k)} \operatorname{grad} \phi_n^{+(k)}(\vec{r})) + \sum_{ad}^{(k)} \phi_n^{+(k)}(\vec{r}) = \nu_f^{(k)} \sum_f^{(k)} f_{n-1}^+(\vec{r}) + \\
 + \sum_{j=k+1}^m \sum_d^{(k \rightarrow j)} \phi_n^{+(j)}(\vec{r}), \quad k = m, m-1, m-2, \dots, 1, \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

где  $f_{n-1}^+(\vec{r})$  – источник, который на 1-й итерации задаётся в виде не равной тождественно нулю положительной функции, а на следующих итерациях рассчитывается по формуле:

$$f_n^+(\vec{r}) = \sum_{k=1}^m \chi^{(k)} \phi_n^{+(k)}(\vec{r}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Каждое из уравнений (4.20) при известной правой части имеет вид односкоростного уравнения диффузии с источником и решается при условиях (4.10), обычно, численным методом.

Итерации прекращаются при таком  $n=N$ , когда впервые при заданной погрешности  $\varepsilon > 0$  выполнится неравенство:

$$\left| K_{\varepsilon\phi}^{(n)} - K_{\varepsilon\phi}^{(n-1)} \right| \leq \varepsilon K_{\varepsilon\phi}^{(n)},$$

где  $K_{\varepsilon\phi}^{(n)} = \frac{\int_V f_n^+(\vec{r}) dV}{\int_V f_{n-1}^+(\vec{r}) dV}$  – приближённое значение  $K_{\varepsilon\phi}$  на  $n$ -й

итерации. Полученные таким образом значения  $K_{\varepsilon\phi} = K_{\varepsilon\phi}^{(N)}$ ,  $\phi^{+(k)}(\vec{r}) = \phi_N^{+(k)}(\vec{r})$  принимаются в качестве решения уравнений (4.15), (4.16).

### 4.3. Сопряжённые уравнения для простых моделей реактора

*Односкоростное приближение.* В этом приближении вероятности взаимодействий нейтронов с ядрами среды не зависят от энергии нейтронов. Поэтому рассматривается только одна группа нейтронов и принимается, что  $\phi^{(1)}(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$  и  $\phi^{+(1)}(\vec{r}) = \phi^+(\vec{r})$ .

Асимптотический поток нейтронов  $\phi(\vec{r})$  и сопряжённая функция  $\phi^+(\vec{r})$  являются решениями одинаковых уравнений:

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} \phi(\vec{r})) - \Sigma_a \phi(\vec{r}) + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \nu_f \Sigma_f \phi(\vec{r}) = 0 ,$$

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} \phi^+(\vec{r})) - \Sigma_a \phi^+(\vec{r}) + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \nu_f \Sigma_f \phi^+(\vec{r}) = 0 \quad (4.21)$$

и принадлежат одному и тому же множеству функций. Поэтому

$$\phi^+(\vec{r}) = C \phi(\vec{r}) ,$$

где множитель  $C$  может принимать любое не равное нулю значение. В результате выражение (4.18) преобразуется к виду:

$$\frac{\delta K_{\text{эф}}}{K_{\text{эф}}^2} = \frac{1}{G_f^+} \int_V \left[ 3 \delta \Sigma_r D^2 |\operatorname{grad} \phi(\vec{r})|^2 - \delta \Sigma_a \phi^2(\vec{r}) + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \delta(\nu_f \Sigma_f) \phi^2(\vec{r}) \right] dV ,$$

где  $G_f^+ = \int_V \nu_f \Sigma_f \phi^2(\vec{r}) dV$ . (4.22)

*Реактор без отражателя.* Пусть реактор без отражателя состоит из одной однородной активной зоны и имеет единую для всех групп нейтронов экстраполированную границу. Тогда можно, воспользовавшись методом разделения переменных, искать распределения  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ ,  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$  в виде:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}) = I_0^{(k)} \psi_0(\vec{r}) , \quad \phi^{+(k)}(\vec{r}) = I_0^{+(k)} \psi_0(\vec{r}) , \quad (4.23)$$

где  $\psi_0(\vec{r})$  – собственная функция, соответствующая ведущему собственному числу  $\alpha_0^2$  (называемому также геометрическим параметром реактора) задачи:

$$\Delta \psi_0(\vec{r}) + \alpha_0^2 \psi_0(\vec{r}) = 0 , \quad \psi_0(\vec{r}_s) = 0 , \quad (4.24)$$

а  $I_0^{(k)}$ ,  $I_0^{+(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) – неизвестные множители, независимые от пространственной переменной  $\vec{r}$ .

Подставляя в уравнения (4.2), (4.3) и (4.15), (4.16) вместо  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ ,  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$  выражения (4.23) и учитывая равенство (4.24), получим алгебраические уравнения для определения множителей  $I_0^{(k)}$ ,  $I_0^{+(k)}$ . При этом уравнения и алгоритм расчёта амплитуд  $I_0^{(k)}$  ничем не отличается от приведённых в разделе 3.4 (см. формулы (3.57) – (3.59)).

Для нахождения  $I_0^{+(k)}$  имеем однородную систему уравнений:

$$-\alpha_0^2 D^{(k)} I_0^{+(k)} - \Sigma_{ad}^{(k)} I_0^{+(k)} + \sum_{j=k+1}^m \Sigma_d^{(k \rightarrow j)} I_0^{+(j)} + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)} \sum_{l=1}^m \chi^{(l)} I_0^{+(j)} = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.25)$$

решение которой нетрудно получить, воспользовавшись нормировкой:

$$K_{\text{эф}} = \sum_{j=1}^m \chi^{(j)} I_0^{+(j)}. \quad (4.26)$$

В результате придём к простым формулам расчёта  $I_0^{+(k)}$  (начиная со значения  $I_0^{+(m)}$  для последней группы):

$$I_0^{+(k)} = \frac{\nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)} + \sum_{j=k+1}^m \Sigma_d^{(k \rightarrow j)} I_0^{+(j)}}{\alpha_0^2 D^{(k)} + \Sigma_{ad}^{(k)}}, \quad k = m, m-1, \dots, 1.$$

Величину  $K_{\text{эф}}$  (при известных значениях  $I_0^{(k)}, I_0^{+(k)}$ ) получим с помощью формул (3.58) или (4.26).

Представление решений уравнений (4.2), (4.3) и (4.15), (4.16) в форме (4.23) позволяет изменение  $\delta K_{\text{эф}}$ , обусловленное малым изменением свойств реактора в пределах объёма  $V_0 \subset V$ , записать в виде:

$$\delta K_{\text{эф}} = \delta_{tr} K + \delta_c K + \delta_d K + \delta_f K, \quad (4.27)$$

где отдельные слагаемые отвечают за изменения соответствующих макроскопических сечений и рассчитываются по формулам:

$$\delta_{tr} K = 3 \sum_{k=1}^m \delta \Sigma_{tr}^{(k)} (D^{(k)})^2 I_0^{(k)} I_0^{+(k)} \xi_0, \quad \delta_c K = - \sum_{k=1}^m \delta \Sigma_c^{(k)} I_0^{(k)} I_0^{+(k)} \xi_1,$$

$$\delta_d K = \sum_{k=1}^{m-1} I_0^{(k)} \sum_{j=k+1}^m \delta \Sigma_d^{(k \rightarrow j)} (I_0^{+(j)} - I_0^{+(k)}) \xi_1, \quad (4.28)$$

$$\delta_f K = \sum_{k=1}^m [\delta (\nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)}) I_0^{(k)} - \delta \Sigma_f^{(k)} I_0^{(k)} I_0^{+(k)}] \xi_1.$$

Здесь  $\xi_0 = \frac{\int_{V_0} |\text{grad } \psi_0(\vec{r})|^2 dV}{\int_V \psi_0^2(\vec{r}) dV}$ ,  $\xi_1 = \frac{\int_{V_0} \psi_0^2(\vec{r}) dV}{\int_V \psi_0^2(\vec{r}) dV}$  и принято

во внимание, что  $\Sigma_d^{(k)} = \sum_{j=k+1}^m \Sigma_d^{(k \rightarrow j)}$ , а поэтому

$$\sum_{k=2}^m I_0^{+(k)} \sum_{j=1}^{k-1} \delta \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} I_0^{(j)} = \sum_{k=1}^{m-1} I_0^{(k)} \sum_{j=k+1}^m \delta \Sigma_d^{(k \rightarrow j)} I_0^{+(j)}.$$

*Двухгрупповые уравнения диффузионно-возрастного приближения.* В этом приближении рассматривается 2-е группы нейтронов: замедляющиеся (или быстрые) и тепловые нейтроны. Основные допущения перечислены в разделе 3.1 пособия, а уравнения для потоков быстрых  $\phi^{(1)}(\vec{r})$  и тепловых  $\phi^{(2)}(\vec{r})$  приведены в разделе 3.3 той же главы. В том же приближении получим следующие сопряжённые уравнения для функций  $\phi^{+(1)}(\vec{r})$ ,  $\phi^{+(2)}(\vec{r})$ :

$$\text{div}(D^{(1)} \text{grad } \phi^{+(1)}(\vec{r})) - \Sigma_{ad}^{(1)} \phi^{+(1)}(\vec{r}) + \Sigma_d^{(1 \rightarrow 2)} \phi^{+(2)}(\vec{r}) = 0,$$

$$\text{div}(D^{(2)} \text{grad } \phi^{+(2)}(\vec{r})) - \Sigma_a^{(2)} \phi^{+(2)}(\vec{r}) + \frac{\mu}{K_{\infty \phi}} \nu_f^{(2)} \Sigma_f^{(2)} \phi^{+(1)}(\vec{r}) = 0.$$

Если воспользоваться выражениями (3.46), (3.47) для макроскопических сечений, то их можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta \phi^{+(1)}(\vec{r}) - \frac{1}{\tau} \phi^{+(1)}(\vec{r}) &= -\frac{\varphi}{\tau} \phi^{+(2)}(\vec{r}), \\ \Delta \phi^{+(2)}(\vec{r}) - \frac{1}{L^2} \phi^{+(2)}(\vec{r}) &= -\frac{\tilde{K}_{\infty}}{\varphi L^2} \phi^{+(1)}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Сопряжённые уравнения (4.29), как и уравнения (3.61), (3.62) для потоков нейтронов  $\phi^{(1)}(\vec{r})$ ,  $\phi^{(2)}(\vec{r})$ , приводятся к виду (3.63). Вследствие этого их решения строятся на базе одних и тех же функций  $\psi_1(\vec{r})$ ,  $\psi_2(\vec{r})$ , удовлетворяющих уравнениям (3.67) при значениях  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , определяемых выражениями (3.66). Поэтому имеем:

$$\begin{aligned}\phi^{+(1)}(\vec{r}) &= A_1^{+(1)}\psi_1(\vec{r}) + A_2^{+(1)}\psi_2(\vec{r}), \\ \phi^{+(2)}(\vec{r}) &= A_1^{+(2)}\psi_1(\vec{r}) + A_2^{+(2)}\psi_2(\vec{r}).\end{aligned}\quad (4.30)$$

Но теперь для коэффициентов  $A_1^{+(1)}$ ,  $A_1^{+(2)}$ ,  $A_2^{+(1)}$ ,  $A_2^{+(2)}$  получим, используя уравнения (4.29), соотношения:

$$A_1^{+(2)} = p^+ A_1^{+(1)}, \quad A_2^{+(1)} = \tilde{p}^+ A_2^{+(2)}, \quad (4.31)$$

где 
$$p^+ = \frac{\tau_c(1 + \omega_1\tau)}{\varphi\tau}, \quad \tilde{p}^+ = \frac{\varphi\tau}{\tau_c(1 + \omega_2\tau)}.$$

Если ограничиться рассмотрением одномерной геометрии реактора, а линейно-независимые решения уравнений (3.67) обозначить так же, как в разделе 3.5, то для  $i$ -й зоны реактора выражения (4.30) примут вид:

- в случае активной зоны (когда  $\tilde{K}_\infty^{(i)} > 1 + \varepsilon_i$ , а параметры принимают значения  $\omega_1 = \beta_i^2$ ,  $\omega_2 = -\gamma_i^2$ , определяемые по формулам (3.66)):

$$\begin{aligned}\phi_i^{+(1)}(r) &= a_i^+ f(\beta_i r) + b_i^+ g(\beta_i r) + \tilde{p}_i^+ [c_i^+ \tilde{f}(\gamma_i r) + d_i^+ \tilde{g}(\gamma_i r)]; \\ \phi_i^{+(2)}(r) &= p_i^+ [a_i^+ f(\beta_i r) + b_i^+ g(\beta_i r)] + c_i^+ \tilde{f}(\gamma_i r) + d_i^+ \tilde{g}(\gamma_i r);\end{aligned}\quad (4.32)$$

- в отражателе (где  $\tilde{K}_\infty^{(i)} = 0$ ,  $\omega_1 = -\nu_i^2 = -\frac{1}{\tau_i}$ ,  $\omega_2 = -\mathcal{G}_i^2 = -\frac{1}{L_i^2}$ ):

$$\begin{aligned}\phi_i^{+(2)}(r) &= c_i^+ \tilde{f}(\mathcal{G}_i r) + d_i^+ \tilde{g}(\mathcal{G}_i r); \\ \phi_i^{+(1)}(r) &= a_i^+ \tilde{f}(\nu_i r) + b_i^+ \tilde{g}(\nu_i r) + \tilde{p}_i^+ [c_i^+ \tilde{f}(\mathcal{G}_i r) + d_i^+ \tilde{g}(\mathcal{G}_i r)].\end{aligned}\quad (4.33)$$

Здесь:  $a_i^+$ ,  $b_i^+$ ,  $c_i^+$ ,  $d_i^+$  – множители, выбираемые так, чтобы выполнялись условия (4.10), а  $p_i^+$ ,  $\tilde{p}_i^+$  – коэффициенты связи (4.31), рассчитываемые по свойствам  $i$ -й зоны.

Для каждой геометрии выражения (4.32), (4.33) принимают определённый вид. Как и при нахождении потоков нейтронов, выполнение граничных условий приведёт к исключению некоторых частных решений (путём приравнивания нулю стоящих перед ними множителей). Например, для реактора с одной активной зоной (которой соответствует  $i=1$ ) в сферически симметричной геометрии:

$$\phi_1^{+(1)}(r) = a_1^+ \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r}, \quad \phi_1^{+(2)}(r) = a_1^+ p_1^+ \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r}. \quad (4.34)$$

Таким образом, сопряжённые функции (как и потоки нейтронов в реакторе без отражателя) имеют одну и ту же зависимость от пространственной координаты  $r$ . При этом:

$$\frac{\phi_1^{+(2)}(r)}{\phi_1^{+(1)}(r)} = p_1^+ = \frac{(1 + \varepsilon_1)(1 + \beta_1^2 \tau)}{\varphi}. \quad (4.35)$$

Поскольку в тепловом реакторе с резонансным поглотителем вероятность  $\varphi < 1$ , а значение  $\varepsilon_1$  обычно близко к нулю, то в активной зоне  $p_1^+ > 1$  и, следовательно, выполняется неравенство:  $\phi_1^{+(2)}(r) > \phi_1^{+(1)}(r)$ .

Если активная зона ( $i = 1$ ) радиуса  $R$  окружена бесконечным отражателем ( $i = 2$ ), то в той же геометрии:

$$\begin{aligned} \phi_1^{+(1)}(r) &= a_1^+ \left[ \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} - p_1^+ \tilde{p}_1^+ \eta_1^+ \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r} \right] \quad \text{при } 0 \leq r \leq R, \\ \phi_1^{+(2)}(r) &= a_1^+ p_1^+ \left[ \frac{\sin(\beta_1 r)}{\beta_1 r} - \eta_1^+ \frac{sh(\gamma_1 r)}{\gamma_1 r} \right] \quad \text{при } 0 \leq r \leq R, \\ \phi_2^{+(2)}(r) &= \phi_1^{+(2)}(R) \frac{R}{r} \exp\left(-\frac{r-R}{L_2}\right) \quad \text{при } r \geq R, \\ \phi_2^{+(1)}(r) &= \left[ \phi_1^{+(1)}(R) - \tilde{p}_2^+ \phi_1^{+(2)}(R) \right] \frac{R}{r} \exp\left(-\frac{r-R}{\sqrt{\tau_2}}\right) + \\ &\quad + \tilde{p}_2^+ \phi_1^{+(2)}(R) \frac{R}{r} \exp\left(-\frac{r-R}{L_2}\right) \quad \text{при } r \geq R, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\text{где } \eta_1^+ = \frac{\gamma_1 \sin(\beta_1 R) + \beta_1 L_2 \cos(\beta_1 R)}{\beta_1 sh(\gamma_1 R) + \gamma_1 L_2 ch(\gamma_1 R)}, \quad p_1^+ \tilde{p}_1^+ = \frac{1 + \beta_1^2 \tau_1}{1 - \gamma_1^2 \tau_1} < 0.$$

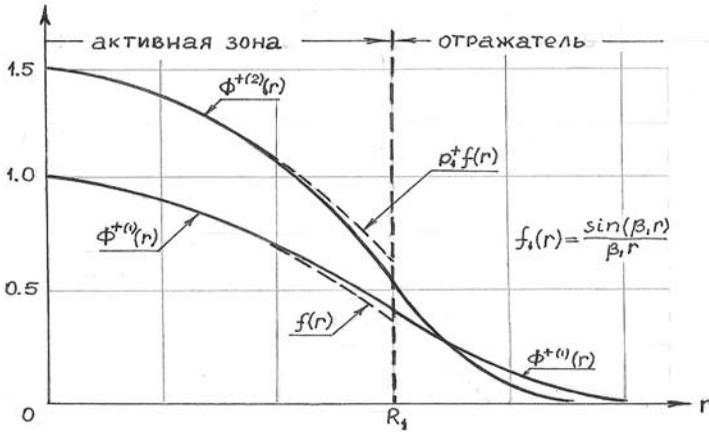


Рис.4.1. Распределения  $\phi^{+(1)}(r)$  и  $\phi^{+(2)}(r)$  в реакторе с отражателем

При получении соотношений (4.36) принято, что  $D_1^{(2)} = D_2^{(2)}$ ; коэффициенты  $b_1^+ = b_2^+ = d_1^+ = d_2^+ = 0$  (чтобы выполнялись условия (4.10) в центре реактора и на бесконечности), а коэффициенты  $c_1^+$ ,  $a_2^+$ ,  $c_2^+$  выражены через значение  $a_1^+$  с помощью условий:

$$\phi_1^{+(1)}(R) = \phi_2^{+(1)}(R), \quad \phi_1^{+(2)}(R) = \phi_2^{+(2)}(R),$$

$$D_1^{(2)} \frac{d\phi_1^{+(2)}}{dr} \Big|_{r=R} = D_2^{(2)} \frac{d\phi_2^{+(2)}}{dr} \Big|_{r=R}.$$

Очевидно, в этом случае выполнение равенства

$$D_1^{(1)} \frac{d\phi_1^{+(1)}}{dr} \Big|_{r=R} = D_2^{(1)} \frac{d\phi_2^{+(1)}}{dr} \Big|_{r=R}$$

даёт условие критичности реактора, которое имеет такой же вид, как в задаче нахождения распределений нейтронов.

Как и в разделе 3.5, можно установить, что  $0 < \eta_1^+ \ll 1$ . Поэтому последние слагаемые в выражениях (4.36) для функций  $\phi_1^{+(1)}(r)$ ,  $\phi_1^{+(2)}(r)$  вносят заметный вклад в соответствующие суммы лишь вблизи границы  $r = R$ . Вдали же от неё (как и в реакторе без отражателя) достаточно хорошо выполняются

соотношения (4.34), (4.35). В отражателе функция  $\phi_2^{+(2)}(r)$  непрерывно уменьшается с ростом  $r$ . Таким образом, зависимость её от пространственной координаты может заметно отличаться от потока тепловых нейтронов  $\phi_2^{(2)}(r)$ , который (как это установлено ранее) может иметь «всплеск» в отражателе. Эти особенности сопряжённых функций отражены на рис.4.1.

#### 4.4. Физический смысл сопряжённой функции

Для выяснения физического смысла функций  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$  рассмотрим вначале особенности решения нестационарных уравнений для потоков нейтронов  $\phi^{(k)}(\vec{r}, t)$  в многогрупповом диффузионном приближении (без учёта запаздывающих нейтронов, с неменяющимися со временем сечениями):

$$\frac{1}{\nu^{(k)}} \frac{\partial \phi^{(k)}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \text{div}(D^{(k)} \text{grad} \phi^{(k)}(\vec{r}, t)) - \Sigma_{ad}^{(k)} \phi^{(k)}(\vec{r}, t) + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \phi^{(j)}(\vec{r}, t) + \chi^{(k)} \sum_{j=1}^m \nu_f^{(j)} \Sigma_f^{(j)} \phi^{(j)}(\vec{r}, t), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.37)$$

при условиях:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}, t)|_{t=0} = \phi^{(k)}(\vec{r}, 0), \quad \phi^{(k)}(\vec{r}, t) \in \Omega_k. \quad (4.38)$$

Здесь  $\nu^{(k)}$  – средняя скорость нейтронов  $k$ -й группы, макроскопические сечения не зависят от времени  $t$ , а множества  $\Omega_k$  описываются соотношениями (4.4).

#### *Свойства решений нестационарной задачи*

Будем искать решение нестационарной задачи (4.37), (4.38) методом разделения переменных, представив потоки  $\phi^{(k)}(\vec{r}, t)$  в виде:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}, t) = T(t) \varphi^{(k)}(\vec{r}), \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.39)$$

где функции  $\varphi^{(k)}(\vec{r}) \in \Omega_k$  и зависят лишь от переменных  $\vec{r}$ , а  $T(t)$  – от времени  $t$ . Обозначив через  $\lambda$  константу разделения, придём к следующим уравнениям для функций  $T(t)$ ,  $\varphi^{(k)}(\vec{r})$ :

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lambda T(t), \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\nu^{(k)}} \varphi^{(k)}(\vec{r}) = \operatorname{div}(D^{(k)} \operatorname{grad} \varphi^{(k)}(\vec{r})) - \Sigma_{ad}^{(k)} \varphi^{(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_d^{(j \rightarrow k)} \varphi^{(j)}(\vec{r}) + \\ + \chi^{(k)} \sum_{j=1}^m \nu_f^{(j)} \Sigma_f^{(j)} \varphi^{(j)}(\vec{r}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Отсюда следует, что  $T(t) \sim \exp(\lambda t)$ , а константа разделения  $\lambda$  может принимать лишь такие значения, при которых существуют нетривиальные решения уравнений (4.41).

Приведём систему уравнений (4.41) к привычному виду задач на собственные значения:

$$\lambda \bar{\varphi}(\vec{r}) = (\hat{\nu} \hat{M}) \bar{\varphi}(\vec{r}), \quad \bar{\varphi}(\vec{r}) \in \Omega, \quad (4.42)$$

где  $\bar{\varphi}(\vec{r})$  – векторная функция (с компонентами  $\varphi^{(k)}(\vec{r})$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ), соответствующая числу  $\lambda$ ,  $\hat{\nu}$  – диагональная матрица с элементами  $\nu^{(k)}$ ,  $\hat{M}$  – дифференциальный матричный оператор такой, что  $\hat{M} \bar{\varphi}$  – векторная функция с компонентами  $(\hat{M} \bar{\varphi})^{(k)}$ , совпадающими с правыми частями уравнений (4.41) при одних и тех же индексах  $k$ . Множество  $\Omega$  образуют векторные функции, компоненты которых  $\varphi^{(k)}(\vec{r}) \in \Omega_k$ .

Введём в рассмотрение сопряжённый оператор  $\hat{M}^+$ , определённый на векторных функциях  $\bar{\varphi}^+(\vec{r})$ , принадлежащих такому множеству  $\Omega^+$ , что имеет место равенство  $\langle \bar{\varphi}^+, \hat{M} \bar{\varphi} \rangle = \langle \hat{M}^+ \bar{\varphi}^+, \bar{\varphi} \rangle$  для любой функции  $\bar{\varphi}(\vec{r}) \in \Omega$ . Учитывая, что  $(\hat{\nu} \hat{M})^+ = \hat{M}^+ \hat{\nu}^+$ , сформулируем сопряжённую задачу на собственные значения  $\lambda^+$  оператора  $\hat{M}^+ \hat{\nu}^+$ :

$$\lambda^+ \bar{\varphi}^+(\vec{r}) = (\hat{M}^+ \hat{\nu}^+) \bar{\varphi}^+(\vec{r}), \quad \bar{\varphi}^+(\vec{r}) \in \Omega^+,$$

где  $\bar{\varphi}^+(\vec{r})$  – собственная функция, соответствующая числу  $\lambda^+$ . Для функций  $\bar{\xi}^+(\vec{r}) = \hat{\nu} \bar{\varphi}^+(\vec{r})$  она примет вид:

$$\lambda^+ \bar{\xi}^+(\vec{r}) = (\hat{\nu} \hat{M}^+) \bar{\xi}^+(\vec{r}), \quad \bar{\xi}^+(\vec{r}) \in \Omega^+. \quad (4.43)$$

В многогрупповом диффузионном приближении множества  $\Omega$  и  $\Omega^+$  совпадают, а уравнениям (4.43) соответствуют:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^+}{\nu^{(k)}} \xi^{+(k)}(\vec{r}) = & \operatorname{div}(D^{(k)} \operatorname{grad} \xi^{+(k)}(\vec{r})) - \Sigma_{ad}^{(k)} \xi^{+(k)}(\vec{r}) + \sum_{j=k+1}^m \Sigma_d^{(k \rightarrow j)} \xi^{+(j)}(\vec{r}) + \\ & + \nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)} \sum_{j=1}^m \chi^{(j)} \xi^{+(j)}(\vec{r}), \quad \xi^{+(k)}(\vec{r}) \in \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Установлено, что в общем случае задачи вида (4.42), (4.43) имеют один и тот же спектр  $\sigma(\lambda)$  собственных значений, в котором помимо дискретного ряда чисел (действительных и комплексных) может присутствовать область непрерывного изменения  $\lambda$  (сплошного спектра). Однако всегда существует ведущее собственное число  $\lambda_0$ , которое является действительным, изолированным и удовлетворяет неравенству:

$$\lambda_0 > \operatorname{Re} \lambda_i, \quad (4.45)$$

где  $\lambda_i$  – любой, не совпадающий с  $\lambda_0$ , элемент спектра  $\sigma(\lambda)$ . Числу  $\lambda_0$  соответствуют единственные собственные функции  $\bar{\varphi}_0(\vec{r})$  (с компонентами  $\varphi_0^{(k)}(\vec{r})$ ) и  $\bar{\xi}_0^+(\vec{r})$  (с компонентами  $\xi_0^{+(k)}(\vec{r})$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ), обращающиеся в нуль лишь на внешней границе реактора.

Допустим, что спектр  $\sigma(\lambda)$  содержит лишь дискретный набор чисел  $\lambda_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ), а система соответствующих им собственных функций  $\bar{\varphi}_i(\vec{r})$  (с компонентами  $\varphi_i^{(k)}(\vec{r})$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ ) полна. Такое предположение выполняется, например, в многогрупповом диффузионном приближении для любой одномерной геометрии реактора с непрерывной пространственной зависимостью. В этом случае (принимая во внимание выражение (4.39)) поток нейтронов в каждой энергетической группе можно представить в виде разложения:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}, t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \exp(\lambda_i t) \varphi_i^{(k)}(\vec{r}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4.46)$$

Установим следующие свойства собственных функций и числа  $\lambda_0$ .

1. *Свойство ортогональности собственных функций.*

Запишем уравнения (4.41) для собственной функции  $\bar{\varphi}_i(\vec{r}) = (\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, \dots, \varphi_i^{(m)})^T$ , соответствующей числу  $\lambda_i$ , а уравнения (4.44) – для функции  $\bar{\xi}_j^+(\vec{r}) = (\xi_j^{+(1)}, \xi_j^{+(2)}, \dots, \xi_j^{+(m)})^T$ , соответствующей числу  $\lambda_j$ . Каждое уравнение в системе (4.41) умножим на  $\xi_j^{+(k)}(\vec{r})$ , проинтегрируем по  $\vec{r} \in V$  и сложим. Каждое уравнение в системе (4.44) умножим на  $\varphi_i^{(k)}(\vec{r})$ , проинтегрируем по  $\vec{r} \in V$  и сложим. Из одного образовавшегося при этом равенства вычтем другое. В результате получим:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \sum_{k=1}^m \int_V \frac{1}{\nu^{(k)}} \varphi_i^{(k)}(\vec{r}) \xi_j^{+(k)}(\vec{r}) dV = 0. \text{ Отсюда следует, что}$$

$$\sum_{k=1}^m \int_V \frac{1}{\nu^{(k)}} \varphi_i^{(k)}(\vec{r}) \xi_j^{+(k)}(\vec{r}) dV = \begin{cases} 0, & \lambda_i \neq \lambda_j \\ \gamma_i, & \lambda_i = \lambda_j \end{cases}, \quad (4.47)$$

где значение  $\gamma_i$  задаётся в соответствии с выбранным способом нормировки собственных функций. В дальнейшем преобразования, которые были выполнены с уравнениями (4.41), (4.44) и привели к соотношению (4.47) будем называть процедурой перекрёстного умножения, интегрирования и вычитания.

2. *Соотношение между числом  $\lambda_0$  и реактивностью реактора.*

Применим процедуру перекрёстного умножения, интегрирования и вычитания к уравнениям (4.2), (4.44), записанным для асимптотического потока нейтронов  $\bar{\phi}_0(\vec{r}) = (\phi_0^{(1)}, \phi_0^{(2)}, \dots, \phi_0^{(m)})^T$  и собственной функции  $\bar{\xi}_0^+(\vec{r})$  соответственно. В результате получим:

$$\lambda_0 = \left(1 - \frac{1}{K_{\phi}}\right) \frac{1}{\mathcal{G}_0}, \quad (4.48)$$

где  $\mathcal{G}_0$  – положительный множитель, принимающий значение:

$$\mathcal{G}_0 = \frac{\int_V \sum_{k=1}^m \frac{1}{\nu^{(k)}} \phi_0^{(k)}(\vec{r}) \xi_0^{+(k)}(\vec{r}) dV}{\int_V \sum_{k=1}^m \nu_f^{(k)} \Sigma_f^{(k)} \phi_0^{(k)}(\vec{r}) \sum_{j=1}^m \chi^{(j)} \xi_0^{+(j)}(\vec{r}) dV}. \quad (4.49)$$

Из равенства (4.48) следует, что:

$$\begin{aligned} \text{если } K_{эф} = 1 \text{ (критический реактор), то } \lambda_0 = 0, \\ \text{если } K_{эф} > 1 \text{ (надкритический реактор), то } \lambda_0 > 0, \\ \text{если } K_{эф} < 1 \text{ (подкритический реактор), то } \lambda_0 < 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Множитель  $\mathcal{G}_0$  имеет размерность времени. Его можно трактовать как время жизни (мгновенных) нейтронов в реакторе произвольной формы.

### 3. Собственные функции критического реактора.

В критическом реакторе (где  $K_{эф} = 1$ ,  $\lambda_0 = 0$ ) уравнения (4.41) для компонент  $\phi_0^{(k)}(\vec{r})$  собственной функции  $\bar{\phi}_0(\vec{r})$  совпадают по виду с уравнениями (4.2) для асимптотических потоков  $\phi^{(k)}(\vec{r})$ . Решения их ищутся на одном и том же множестве функций. То же самое можно сказать в отношении функций  $\xi_0^{+(k)}(\vec{r})$  и  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$ , получаемых из решения уравнений (4.44) и (4.15) соответственно. Поэтому

$$\phi^{(k)}(\vec{r}) = C \phi_0^{(k)}(\vec{r}), \quad \phi^{+(k)}(\vec{r}) = C^+ \xi_0^{+(k)}(\vec{r}), \quad (4.51)$$

где  $C$ ,  $C^+$  – не равные нулю постоянные множители, выбираемые обычно из условий нормировки. Для некритического реактора соотношения (4.51) не выполняются. В этом можно убедиться, рассматривая переход к соответствующему условно-критическому реактору. В одном случае это делается за счёт изменения числа нейтронов деления (заменяя  $\nu_f^{(k)}$  на  $\frac{\nu_f^{(k)}}{K_{эф}}$ ), а в другом случае – за счёт изменения поглощения нейтронов (заменяя макросечения  $\Sigma_{ад}^{(k)}$  на сумму  $\Sigma_{ад}^{(k)} + \frac{\lambda_0}{\nu^{(k)}}$ ).

Коэффициенты  $A_i$  в формуле (4.46) определим, используя начальное условие (4.38), которое запишем в виде (заменяв индекс  $i$  на  $j$ ):

$$\phi^{(k)}(\vec{r}, 0) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \varphi_j^{(k)}(\vec{r}), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Умножим обе части этого равенства на функцию  $\frac{1}{\nu^{(k)}} \xi_i^{+(k)}(\vec{r})$ , проинтегрируем по переменным  $\vec{r} \in V$  и сложим. Учитывая свойство ортогональности (4.47), получим:

$$A_i = \frac{1}{\gamma_i} \sum_{k=1}^m \int_V \frac{1}{\nu^{(k)}} \phi^{(k)}(\vec{r}, 0) \xi_i^{+(k)}(\vec{r}) dV, \quad (4.52)$$

где  $\gamma_i = \sum_{k=1}^m \int_V \frac{1}{\nu^{(k)}} \varphi_i^{(k)}(\vec{r}) \xi_i^{+(k)}(\vec{r}) dV, \quad i = 0, 1, 2, \dots$

Выражение (4.46) позволяет обобщить выводы, сделанные ранее (в главе 1) на базе простой модели реактора (без отражателя, в односкоростном диффузионном приближении). Учитывая свойства (4.45) и (4.50) собственных чисел, нетрудно установить, что при  $t \rightarrow \infty$  потоки  $\phi^{(k)}(\vec{r}, t)$  стремятся к распределениям  $\phi_0^{(k)}(\vec{r}, t) = A_0 \exp(\lambda_0 t) \varphi_0^{(k)}(\vec{r})$ . Потоки  $\phi_0^{(k)}(\vec{r}, t)$  в критическом реакторе ( $\lambda_0 = 0$ ) не зависят от времени  $t$ , а в некритическом

реакторе ( $\lambda_0 \neq 0$ ) меняются с периодом  $T_0 = \mathcal{G}_0 \frac{K_{\text{эф}}}{|1 - K_{\text{эф}}|}$ . Для

расчёта  $\mathcal{G}_0$  в многогрупповом приближении имеем формулу (4.49).

Переход от начальных распределений  $\phi_0^{(k)}(\vec{r})$  к асимптотическим потокам  $\phi_0^{(k)}(\vec{r}, t)$  определяется близостью собственных чисел

$\lambda_0, \lambda_1$  и происходит за время  $\delta t \approx \frac{3}{|\lambda_0 - \lambda_1|}$ .

### *Асимптотическая ценность нейтронов*

Рассмотрим критический реактор с заданными свойствами, который до момента времени  $t = 0$  работал на постоянной

мощности, однозначно связанной со скоростью деления ядер  $W_0$ . Пусть значению  $W_0$  соответствуют распределения потоков нейтронов  $\phi_0^{(k)}(\vec{r})$  и сопряжённых функций  $\phi_0^{+(k)}(\vec{r})$ , удовлетворяющих уравнениям (4.2), (4.3), (4.15), (4.16) и соотношениям (4.51). Будем считать, множители  $C, C^+$  находятся из условий:

$$C \sum_{l=1}^m \int_{\vec{r}' \in V} \Sigma_f^{(l)} \phi_0^{(l)}(\vec{r}') d\vec{r}' = W_0, \quad C C^+ = W_0, \quad (4.53)$$

а собственные функции  $\bar{\varphi}_i(\vec{r}), \bar{\xi}_i(\vec{r})$  нормированы так, что в соотношениях (4.47)  $\gamma_i = 1$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Тогда потоки  $\phi_0^{(k)}(\vec{r})$  будут иметь размерность  $см^{-2} с^{-1}$ , функции  $\phi_0^{+(k)}(\vec{r})$  – размерность  $с^{-1}$  (если скорость нейтронов брать в  $см сек^{-1}$ , сечения деления – в  $см^{-1}$ , а объём – в  $см^3$ ).

Предположим, что в момент времени  $t = 0$  в единичный объём, находящийся в окрестности точки  $\vec{r}'$ , поместили  $\Delta q^{(s)}$  нейтронов  $s$ -й группы. Распределения нейтронов  $\phi^{(k)}(\vec{r}, t)$  при  $t > 0$  даёт решение уравнений (4.2) с начальным условием:

$$\phi^{(k)}(\vec{r}, 0) = \phi_0^{(k)}(\vec{r}) + \Delta q^{(s)} \nu^{(s)} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \eta(k - s), \quad \vec{r} \in V, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.54)$$

где  $\eta(k - s) = \begin{cases} 1, & k = s \\ 0, & k \neq s \end{cases}$ , а  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  – дельта-функция Дирака.

Такое решение было получено ранее и записано в виде разложения (4.46). При этом коэффициенты  $A_i$  рассчитываются по формулам (4.52), в которых вместо функции  $\phi(\vec{r}, 0)$  берётся сумма (4.54).

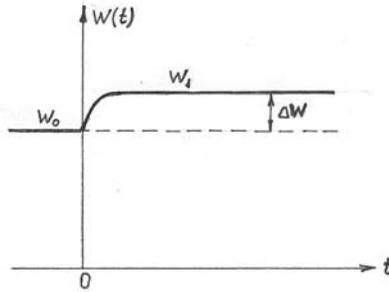


Рис.4.2. Изменение мощности  $W(t)$  со временем  $t$  при помещении  $\Delta q^{(s)}$  нейтронов при  $t = 0$

По истечении некоторого промежутка времени в реакторе установится новое распределение потоков  $\phi_1^{(k)}(\vec{r})$ , которому соответствует новое значение мощности  $W_1 = W_0 + \Delta W$  (также измеряемое скоростью деления ядер). Причём,

$$\phi_1^{(k)}(\vec{r}) = \phi^{(k)}(\vec{r}, t \rightarrow \infty) = A_0 \phi_0^{(k)}(\vec{r}), \quad A_0 = \frac{1}{\gamma_0} \sum_{k=1}^m \int_{\vec{r} \in V} \frac{1}{v^{(k)}} \xi_0^{+(k)}(\vec{r}) \phi^{(k)}(\vec{r}, 0) d\vec{r}.$$

Используя выражение (4.54) для потоков  $\phi^{(k)}(\vec{r}, 0)$ , а также выбранное выше условие нормировки собственных функций ( $\gamma_0 = 1$ ) и соотношения (4.53), получим:

$$A_0 = C + \Delta q^{(s)} \xi_0^{+(s)}(\vec{r}'), \quad W_1 = \sum_{k=1}^m \int_{\vec{r} \in V} \Sigma_f^{(k)} \phi_1^{(k)}(\vec{r}) d\vec{r} = W_0 + \Delta q^{(s)} \phi_0^{+(s)}(\vec{r}').$$

$$\text{Отсюда следует: } \phi_0^{+(s)}(\vec{r}') = \frac{\Delta W}{\Delta q^{(s)}}, \quad (4.55)$$

где  $\Delta W = W_1 - W_0$  – изменение асимптотической мощности реактора. Очевидно, изменение  $\Delta W > 0$ . При ином (чем в (4.53)) выборе величины  $C_0^+$  необходимо говорить лишь о

$$\text{пропорциональности: } \phi_0^{+(s)} \sim \frac{\Delta W}{\Delta q^{(s)}}.$$

Поскольку значения  $s$  и  $\vec{r}'$  были выбраны произвольно, то полученный в виде (4.55) результат относится к любой группе  $k$  и точке  $\vec{r}$ . Таким образом, значение сопряжённой функции  $\phi_0^{+(k)}(\vec{r})$  в критическом реакторе равно (или пропорционально) тому изменению асимптотической мощности реактора, которое происходит при помещении одного нейтрона, имеющего кинетическую энергию  $E^{(k)} = \frac{1}{2} m_n (v^{(k)})^2$ , в единичный объём в окрестности точки  $\vec{r}$ . Поэтому функция  $\phi_0^{+(k)}(\vec{r})$  получила название ценности нейтронов группы  $k$  в точке  $\vec{r}$  реактора по отношению к асимптотической мощности или асимптотической ценности нейтронов.

Из сказанного выше следует, что ценность  $\phi_0^{+(k)}(\vec{r}) \geq 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  во всех точках  $\vec{r} \in V$  (обращается в нуль лишь на экстраполированной границе), а величина  $G_f^+$ , определяемая выражением (4.19), имеет смысл ценности нейтронов деления. При внесении в реактор дополнительного источника нейтронов  $\delta q^{(k)}(\vec{r})$ , распределённого непрерывно по объёму  $V$  для каждой группы  $k$ , полное изменение мощности  $\Delta W_q$  можно оценить по формуле:

$$\Delta W_q = \sum_{k=1}^m \int_V \phi^{+(k)}(\vec{r}) \delta q^{(k)}(\vec{r}) dV, \quad (4.56)$$

если константы  $C_0$ ,  $C_0^+$  получены из выражений (4.53) и принято, что  $\gamma_0 = 1$  (см. формулу (4.47)).

Кроме того, имеет место следующий закон сохранения асимптотической ценности:

«Ценность первоначально помещённых в реактор  $\delta q$  нейтронов равна сумме ценностей вторичных нейтронов, появившихся за малый промежуток времени  $\Delta t$  из  $\delta q$  впущенных нейтронов».

Здесь вторичными нейтронами называют как возникшие в результате рассеяния и деления ядер нейтроны, так и те из  $\delta q$  нейтронов, которые не испытали столкновений с ядрами среды за

время  $\Delta t$ . В приложении 2 дано применение этого закона сохранения к получению интегро-дифференциального уравнения для ценности нейтронов.

Теперь можно дать простое объяснение изображённым на рис.4.1 зависимостям сопряжённых функций  $\phi^{+(k)}(r)$ ,  $k=1,2$  (4.36). Учитывая, что  $\phi^{+(1)}(r)$  – ценность быстрого, а  $\phi^{+(2)}(r)$  – ценность теплового нейтрона на расстоянии  $r$  от центра реактора, имеем:

- ценность  $\phi^{+(2)}(r)$  почти во всей активной зоне больше ценности  $\phi^{+(1)}(r)$  из-за того, что тепловые нейтроны при столкновении с ядрами топлива имеют большую вероятность вызвать деление этих ядер, чем быстрые нейтроны;
- ценность любого нейтрона в отражателе меньше ценности того же нейтрона в активной зоне, поскольку помещаемый в отражатель нейтрон может привести к изменению мощности реактора лишь в том случае, если он в результате диффузии попадёт в активную зону; однако этому препятствуют процессы поглощения нейтрона в отражателе и утечки его из реактора;
- ценности нейтронов  $\phi^{+(k)}(r)$ ,  $k=1,2$  по мере удаления от центра активной зоны непрерывно уменьшаются сначала (при приближении  $r$  к радиусу активной зоны  $R$ ) за счёт возрастания вероятности утечки нейтронов в отражатель, а затем (при удалении  $r$  от  $R$ ) – за счёт уменьшения вероятности нейтронам вернуться в активную зону.

В заключение отметим, что понятие асимптотической ценности нейтронов и закон сохранения ценности можно распространить на некритические состояния реактора. В этом случае необходимо рассматривать условно-критический реактор, отличающийся от реально существующего лишь тем, что в нём при одном делении

любого ядра появляется  $\frac{V_f}{K_{эф}}$  нейтронов. Как известно, в таком реакторе существует стационарное распределение нейтронов, и

можно говорить об асимптотической мощности и её изменении при помещении дополнительного числа нейтронов.

#### 4.5. Применения соотношений теории возмущений

Соотношения (4.18), (4.19) позволяют оценить изменение реактивности (при известных значениях  $\delta\Sigma_{tr}^{(k)}$ ,  $\delta\Sigma_{ad}^{(k)}$  и т.д.), используя решения лишь двух примерно одинаковых по вычислительным затратам задач (4.2) – (4.4) и (4.10), (4.15), (4.16), сформулированных для невозмущённого реактора. Время счёта при этом практически не зависит от числа возмущаемых параметров. Единственное требование состоит в том, чтобы каждое из возмущений было мало. В противном случае расчёты по формулам (4.18), (4.19) могут привести к заметным погрешностям в определении  $\delta K_{эф}$ .

Это иллюстрирует рис.4.3, на котором представлены зависимости  $-\delta\left(\frac{1}{K_{эф}}\right)$  от изменения  $\delta N_5$  концентрации U-235 в активной зоне реактора (через  $N_5^{(0)}$  обозначена концентрация урана-235 в невозмущённом реакторе). Видно, что совпадение результатов расчёта по точной формуле (4.17) и формуле теории малых возмущений (4.18) имеет место в том случае, когда величина  $|\delta N_5|$  мала.

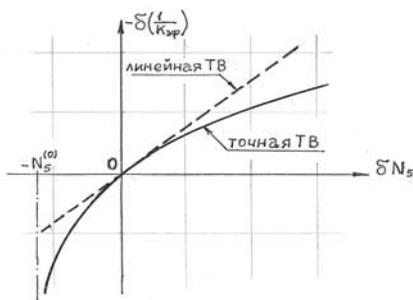


Рис.4.3. Сравнение результатов расчёта по формулам (4.17) и (4.18)

Можно отметить, что формула малых возмущений (4.18) приводит к линейной зависимости  $-\delta\left(\frac{1}{K_{эф}}\right)$  от величины  $\delta N_5$ , а

точная формула (4.17) отражает истинный вид этой зависимости. Несмотря на это в инженерной практике обычно используются соотношения теории малых возмущений, что связано, главным образом, со сравнительно небольшими вычислительными затратами. Остановимся на некоторых применениях этих соотношений.

### *Эффективности материалов*

Пусть возмущающим свойства реактора параметром является концентрация  $N_i(\vec{r})$  ядер сорта  $i$  (например, урана-238), а возмущение состоит в том, что на величину  $\Delta N_i$  меняется концентрация лишь этих ядер в единичном объёме в окрестности точки  $\vec{r}$ . Такое возмущение можно описать формулой:

$$\delta N_i(\vec{r}') = \begin{cases} 0, & l \neq i \\ \Delta N_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}), & l = i \end{cases},$$

если  $\vec{r}' \in V$  – произвольная точка реактора, а  $l = 1, 2, \dots, i, \dots, L$  – порядковый номер присутствующих в реакторе ядер. Происходящие при этом изменения макроскопических сечений в группах  $k = 1, 2, \dots, m$  имеют вид:

$$\delta \Sigma_p^{(k)}(\vec{r}') = \sigma_{p,i}^{(k)} \Delta N_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}), \quad p = c, f, tr, d, \quad (4.57)$$

где  $p$  – тип процесса взаимодействия, а  $\sigma_{p,i}^{(k)}$  – соответствующее микроскопическое сечение взаимодействия нейтронов группы  $k$  с ядрами сорта  $i$ . Предполагается, что при изменении концентраций ядер микроскопические сечения не меняются.

*Коэффициентом чувствительности реактивности  $H_i(\vec{r})$  по отношению к концентрации ядер сорта  $i$  в точке  $\vec{r}$  будем называть то изменение реактивности реактора  $\delta \rho = \frac{\delta K_{эф}}{K_{эф}^2}$ ,*

которое вызвано внесением одного ядра этого сорта в единичный объём, расположенный в окрестности рассматриваемой точки. Поскольку происходящее при этом изменение концентрации  $\delta N_i$  можно считать бесконечно малым, то:

$$H_i(\vec{r}) = \frac{\partial \rho}{\partial N_i(\vec{r})} = \frac{1}{K_{\text{эф}}^2} \frac{\partial K_{\text{эф}}}{\partial N_i(\vec{r})}, \quad (4.58)$$

где производные находятся при известных значениях концентраций  $N_1^{(0)}(\vec{r}), N_2^{(0)}(\vec{r}), \dots, N_L^{(0)}(\vec{r})$  в невозмущённом реакторе.

Значения  $H_i(\vec{r})$  определим по формуле (4.18), принимая  $\Delta N_i = 1 \frac{\text{ядер}}{\text{см}^3}$ . Учитывая при этом выражение (4.57) и определение (4.58), получим:

$$H_i(\vec{r}) = \frac{1}{G_f^+} \sum_{k=1}^m \left[ 3 \sigma_{tr,i}^{(k)} \left( \vec{J}^{(k)}(\vec{r}), \vec{J}^{+(k)}(\vec{r}) \right) - \phi^{+(k)}(\vec{r}) \sigma_{ad,i}^{(k)} \phi^{(k)}(\vec{r}) + \right. \\ \left. + \phi^{+(k)}(\vec{r}) \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{d,i}^{(j \rightarrow k)} \phi^{(j)}(\vec{r}) + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \chi^{(k)} \phi^{+(k)}(\vec{r}) \sum_{j=1}^m \nu_{f,i}^{(j)} \sigma_{f,i}^{(j)} \phi^{(j)}(\vec{r}) \right]. \quad (4.59)$$

Очевидно, при произвольных (но достаточно малых) изменениях  $\delta N_i(\vec{r})$  концентраций всех присутствующих в реакторе ядер:

$$\delta \rho = \sum_{i=1}^L \int_V H_i(\vec{r}) \delta N_i(\vec{r}) dV. \quad (4.60)$$

Сравнение значений  $H_i(\vec{r})$  для разных ядер позволяет выяснить, в какие части реактора следует поместить (или извлечь) те или иные материалы, чтобы необходимым образом воздействовать на реактивность. В первом приближении можно оценить также количество вводимых материалов.

В качестве примера рассмотрим распределения коэффициентов чувствительности  $H_i(z)$  в плоской геометрии реактора, состоящего из одной активной зоны толщиной  $2h_0$ . Значения  $H_i(z)$  получим в односкоростном диффузионном приближении,

воспользовавшись формулой (4.22). Ограничимся случаем трёх сильно различающихся по своим свойствам материалов ( $i=1, 2, 3$ ):

1 – рассеивающий нейтроны материал:

$$\sigma_s > 0, \quad \sigma_c = \sigma_f = 0, \quad \sigma_{tr} = \sigma_s(1 - \tilde{\mu}),$$

2 – поглотитель нейтронов:  $\sigma_c > 0, \quad \sigma_s = \sigma_f = 0, \quad \sigma_{tr} = \sigma_c,$

3 – делящийся материал:  $\sigma_f > 0, \quad \sigma_s = \sigma_c = 0, \quad \sigma_{tr} = \sigma_f.$

Здесь  $\tilde{\mu}$  – средний косинус угла рассеивания нейтронов. Материалы с перечисленными свойствами будем называть «идеальными». Кроме того примем, что невозмущённый реактор является критическим и имеет достаточно большие размеры, так что:

$$K_{\varepsilon\phi} = 1, \quad 3\alpha_0^2 D^2 \ll 1,$$

где  $\alpha_0^2 = \left(\frac{\pi}{2h}\right)^2$  – геометрический параметр,  $h = h_0 + \Delta_0$ ,  $\Delta_0$  – длина линейной экстраполяции.

Для такого реактора выражение (4.22) принимает вид:

$$H_i(z) = \frac{1}{G_f^+} \left[ 3\sigma_{tr,i} D^2 \left( \frac{\partial\phi(z)}{\partial z} \right)^2 - \sigma_{a,i} \phi^2(z) + \nu_{f,i} \sigma_{f,i} \phi^2(z) \right], \text{ где}$$

$$\phi(z) = C \cos(\alpha_0 z), \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -C\alpha_0 \sin(\alpha_0 z), \quad G_f^+ = C^2 \nu_f \Sigma_f h.$$

Отсюда имеем:

1 – для рассеивающего нейтроны материала:

$$H_1(z) = \frac{\sigma_{tr,1}}{\nu_f \Sigma_f h} 3\alpha_0^2 D^2 \sin^2(\alpha_0 z),$$

2 – для поглотителя нейтронов:

$$H_2(z) = \frac{\sigma_{c,2}}{\nu_f \Sigma_f h} \left[ 3\alpha_0^2 D^2 \sin^2(\alpha_0 z) - \cos^2(\alpha_0 z) \right],$$

3 – для делящегося материала:

$$H_3(z) = \frac{\sigma_{f,3}}{\nu_f \Sigma_f h} \left[ 3\alpha_0^2 D^2 \sin^2(\alpha_0 z) + (\nu_{f,3} - 1) \cos^2(\alpha_0 z) \right].$$

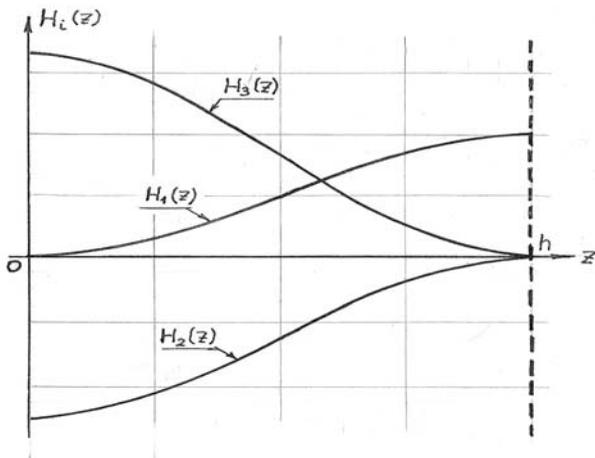


Рис.4.4. Зависимости коэффициентов  $H_i(z)$  от координаты точки  $z$  внесения «идеальных» материалов

Приведённые на рис.4.4 зависимости функций  $H_i(z)$  показывают, в какие области активной зоны следует помещать материалы, близкие по своим ядерно-физическим свойствам к рассмотренным материалам, чтобы увеличить реактивность реактора. В частности, делящийся материал целесообразно размещать вблизи центра активной зоны, а рассеивающий нейтроны материал – на периферии активной зоны. Поглотитель нейтронов максимально снижает реактивность реактора при помещении в центр активной зоны.

### **Эффективности микроскопических сечений**

Допустим, что произошли небольшие изменения микроскопических сечений, например, в результате проведения ряда дополнительных измерений. Для оценки значения реактивности реактора необходимо знать, насколько меняется реактивность при единичном изменении одного из микроскопических сечений.

Коэффициентом чувствительности реактивности  $Y_{p,i}^{(k)}$  по отношению к микроскопическому сечению будем называть то

изменение реактивности реактора  $\delta\rho$ , которое происходит при единичном возрастании микроскопического сечения процесса  $p$  на ядрах сорта  $i$  в  $k$ -й энергетической группе нейтронов (при постоянных значениях остальных микроскопических сечений и концентраций ядер). Из этого определения следует, что

$$Y_{p,i}^{(k)} = \frac{1}{K_{\text{эф}}^2} \frac{\partial K_{\text{эф}}}{\partial \sigma_{p,i}^{(k)}}, \quad (4.61)$$

где производная рассчитывается при известных свойствах невозмущённого реактора.

Для получения этих коэффициентов чувствительности воспользуемся формулой (4.18), предварительно преобразованной к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\delta K_{\text{эф}}}{K_{\text{эф}}^2} = \frac{1}{G_f^+ V} \int \left\{ \sum_{n=1}^m \left[ 3\delta\Sigma_{tr}^{(n)}(\vec{J}^{(n)}(\vec{r}), \vec{J}^{+(n)}(\vec{r})) - \delta\Sigma_a^{(n)}\phi^{(n)}(\vec{r})\phi^{+(n)}(\vec{r}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \delta(v_f^{(n)}\Sigma_f^{(n)})\phi^{(n)}(\vec{r}) \sum_{s=1}^m \chi^{(s)}\phi^{+(s)}(\vec{r}) \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{s=n+1}^m \delta\Sigma_d^{(n \rightarrow s)}\phi^{(n)}(\vec{r})(\phi^{+(s)}(\vec{r}) - \phi^{+(n)}(\vec{r})) \right\} dV. \end{aligned}$$

Здесь принято, что  $\Sigma_d^{(n)} = \sum_{s=n+1}^m \Sigma_d^{(n \rightarrow s)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, m-1$ , и изменён

порядок суммирования в двойной сумме, включающей слагаемые с сечениями перевода нейтронов из одной группы в другую.

Будем считать, что на величину 1 *барн* возрастает одно из микроскопических сечений взаимодействия нейтронов лишь с ядрами  $i$ -го сорта:  $\sigma_{p,i}^{(k)}$ ,  $p = c, f, tr$ , или  $\sigma_{d,i}^{(k \rightarrow j)}$ . Тогда изменения макроскопических сечений можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \delta\Sigma_p^{(n)} = N_i^{(0)}(\vec{r})\eta(n-k), \quad p = c, f, tr; \quad \delta\Sigma_d^{(n \rightarrow s)} = N_i^{(0)}(\vec{r})\eta(n-k)\eta(s-j), \\ \eta(n-k) = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases}; \quad \eta(s-j) = \begin{cases} 0, & s \neq j \\ 1, & s = j \end{cases}, \quad n, s = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в формулу (4.62), получим (рассматривая  $\sigma_{tr}^{(k)}$  как самостоятельное сечение и не учитывая зависимость его от сечений поглощения и рассеяния):

$$\begin{aligned}
Y_{tr,i}^{(k)} &= \frac{1}{G_f^+} \int_V 3(\vec{J}^{(k)}(\vec{r}), \vec{J}^{+(k)}(\vec{r})) N_i^{(0)}(\vec{r}) dV, \\
Y_{c,i}^{(k)} &= -\frac{1}{G_f^+} \int_V \phi^{(k)}(\vec{r}) \phi^{+(k)}(\vec{r}) N_i^{(0)}(\vec{r}) dV, \\
Y_{f,i}^{(k)} &= \frac{1}{G_f^+} \int_V \phi^{(k)}(\vec{r}) \left( \frac{V_{f,i}^{(k)}}{K_{\phi}} \sum_{s=1}^m \chi^{(s)} \phi^{+(s)}(\vec{r}) - \phi^{+(k)}(\vec{r}) \right) N_i^{(0)}(\vec{r}) dV, \\
Y_{d,i}^{(k \rightarrow j)} &= \frac{1}{G_f^+} \int_V \phi^{(k)}(\vec{r}) (\phi^{+(j)}(\vec{r}) - \phi^{+(k)}(\vec{r})) N_i^{(0)}(\vec{r}) dV.
\end{aligned} \tag{4.63}$$

### **Изменение размеров реактора**

Предположим, что в возмущённом реакторе лишь размеры и форма границ зон слабо отличаются от соответствующих геометрических характеристик невозмущённого реактора. Этот случай можно рассматривать как особый вид возмущения, при котором макроскопические сечения  $\Sigma_p^{(k)}$  ( $p = tr, c, f, d$ ) меняются определённым образом только вблизи границ раздела зон, а в остальной части реактора сохраняют прежние значения. Оценим происходящее при этом изменение реактивности  $\delta\rho$  на примере многозонного реактора в произвольной одномерной геометрии (рис.2.1). Ограничимся случаем, когда возмущённый реактор удаётся рассматривать в рамках той же одномерной геометрии.

В одномерных геометриях потоки нейтронов и ценности нейтронов зависят только от расстояния  $r$  от начала координат  $r=0$ . При этом для элемента объёма  $dV$  и векторов токов  $\vec{J}^{(k)}(r)$ ,  $\vec{J}^{+(k)}(r)$  имеем:

$$dV = r^\nu dr, \quad \vec{J}^{(k)}(r) = J^{(k)}(r) \vec{e}_r, \quad \vec{J}^{+(k)}(r) = J^{+(k)}(r) \vec{e}_r.$$

Здесь параметр  $\nu$  имеет тот же смысл, что и в формуле (2.18),  $\vec{e}_r$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $r$ ,

$$J^{(k)}(r) = -D^{(k)} \frac{d\phi^{(k)}(r)}{dr}, \quad J^{+(k)}(r) = -D^{(k)} \frac{d\phi^{+(k)}(r)}{dr} - \text{проекции}$$

токов,  $r = R_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – координаты границ раздела зон.

Коэффициентом чувствительности реактивности  $S_i$  по отношению к размеру  $R_i$  будем называть то изменение реактивности, которое происходит при единичном возрастании (например, на 1 см) координаты  $R_i$  при сохранении прежних значений остальных координат  $R_l$ ,  $l \neq i$ . Тогда возрастанию на  $\delta R_i$  координаты раздела лишь двух соседних зон соответствуют следующие изменения макроскопических сечений:

$$\delta \Sigma_p^{(k)} = \begin{cases} \Delta \Sigma_{p,i}^{(k)}, & r \in [R_i, R_i + \delta R_i] \\ 0, & r \notin [R_i, R_i + \delta R_i] \end{cases},$$

где  $\Delta \Sigma_{p,i}^{(k)} = \Sigma_{p,i}^{(k)} - \Sigma_{p,i+1}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $\Sigma_{p,n+1}^{(k)} = 0$ ,  $\Sigma_{p,i}^{(k)}$  – сечение процесса  $p$  для  $k$ -й группы нейтронов в  $i$ -й зоне невозмущённого реактора.

Отметим, что величина  $|\Delta \Sigma_{p,i}^{(k)}|$  может оказаться достаточно большой (например, когда изменяется граница раздела активной зоны с отражателем и берётся сечение поглощения тепловых нейтронов). Тем не менее, приближение теории малых возмущений выполнится, если отклонение  $\delta R_i$  окажется настолько малым, что распределения нейтронов изменятся незначительно. Если это выполняется при изменении размеров всех зон, то:

$$\delta \rho = \sum_{i=1}^n S_i \delta R_i, \quad (4.64)$$

$$S_i = \frac{R_i^v}{G_f^+} \sum_{k=1}^m \left[ 3 \Delta \Sigma_{tr,i}^{(k)} J^{(k)}(R_i) J^{+(k)}(R_i) - \Delta \Sigma_{ad,i}^{(k)} \phi^{(k)}(R_i) \phi^{+(k)}(R_i) + \right. \\ \left. + \phi^{+(k)}(R_i) \sum_{j=1}^{k-1} \Delta \Sigma_{d,i}^{(j \rightarrow k)} \phi^{(j)}(R_i) + \frac{1}{K_{эф}} \chi^{(k)} \phi^{+(k)}(R_i) \sum_{j=1}^m \Delta(v_{f,i}^{(j)} \Sigma_{f,i}^{(j)}) \phi^{(j)}(R_i) \right]. \quad (4.65)$$

При получении (4.65) учтено, что в силу непрерывности  $\phi^{(k)}$ ,  $\phi^{+(k)}$ ,  $J^{(k)}$ ,  $J^{+(k)}$  для функций  $\theta^{(k,j)}(r)$  вида:  $\theta^{(k,j)}(r) = \phi^{+(k)}(r) \phi^{(j)}(r)$  или  $\theta^{(k,j)}(r) = J^{+(k)}(r) J^{(j)}(r)$ ,  $k, j = 1, 2, \dots, m$ , выполняются равенства:

$$\int_{R_i}^{R_i + \delta R_i} \theta^{(k,j)}(r) r^\nu dr = \theta^{(k,j)}(R_i) R_i^\nu \delta R_i + \varepsilon((\delta R_i)^2),$$

где  $\varepsilon((\delta R_i)^2)$  – величина 2-го порядка малости относительно вариации  $\delta R_i$ .

### ***Температурные коэффициенты реактивности***

Пусть возмущающими свойства реактора параметрами являются средние по объёму какой-либо зоны температуры различных компонент: топлива, теплоносителя, замедлителя и т.д. Изменение каждой из этих температур приводит к изменению эффективного коэффициента размножения нейтронов, что количественно оценивается соответствующими коэффициентами реактивности (по топливу, по теплоносителю и т.д.).

*Температурным коэффициентом реактивности*  $KP_T$  будем называть то изменение реактивности, которое происходит при возрастании средней температуры  $T$  какой-либо компоненты на один градус в той или иной части реактора. Из этого определения следует, что:

$$KP_T = \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{T=T_0}, \quad (4.66)$$

где производная рассчитывается при заданном значении  $T = T_0$ . Очевидно, из-за нелинейной зависимости  $K_{эф}$  от температуры, коэффициенты  $KP_T$  будут функциями температуры  $T_0$ .

В некоторых простых случаях (например, для реактора без отражателя в односкоростном диффузионном приближении) температурные коэффициенты реактивности можно получить аналитически. В общем случае это делается с использованием соотношений теории малых возмущений (4.18), (4.19). Воспользовавшись ими, а также введёнными ранее обозначениями для коэффициентов чувствительности и определением (4.66), получим:

$$KP_T = \int_V \sum_l H_l(\vec{r}) \frac{\partial N_l}{\partial T} \Big|_{T=T_0} dV + \sum_p \sum_l \sum_{k=1}^m Y_{p,l}^{(k)} \frac{\partial \sigma_{p,l}^{(k)}}{\partial T} \Big|_{T=T_0} + \sum_i S_i \frac{\partial R_i}{\partial T} \Big|_{T=T_0}. \quad (4.67)$$

Здесь коэффициенты чувствительности реактивности по отношению к концентрациям ядер  $H_l(\vec{r})$ , микроскопическим сечениям взаимодействия  $Y_{p,l}^{(k)}$  и размерам  $S_i$  рассчитываются по формулам (4.59), (4.63) и (4.65) при температуре  $T = T_0$ .

Температурные коэффициенты реактивности используются при анализе безопасности реакторов, исследованиях переходных и аварийных процессов. При проектировании реакторов стремятся к выбору таких материалов и компоновок, чтобы коэффициенты  $KP_T$  были отрицательными и небольшими по абсолютному значению. Тогда реактор становится безопасным и достаточно простым в управлении. В связи с этим приходится анализировать отдельные составляющие  $KP_T$ .

Формула (4.67) содержит большое число слагаемых, имеющих часто разные знаки и абсолютные значения. При выяснении способов снижения  $KP_T$  удобно слагаемые объединить в три составляющие: геометрическую, плотностную и ядерную. Такое разбиение проводится с учётом трёх основных факторов, за счёт которых меняется реактивность реактора. В геометрическую (плотностную) составляющую включают те слагаемые в формуле (4.67), которые связаны с изменением размеров реактора (плотностей материалов). В ядерную составляющую включают те слагаемые, которые связаны с изменениями микроскопических сечений.

Продемонстрируем получение отдельных составляющих для реактора без отражателя (т.е. имеющего одну гомогенную активную зону) в одномерной геометрии с экстраполированной границей, расположенной при  $r = R_0$ . В этом случае (смотри раздел 4.3):

$$\phi^{(k)}(r) = I_0^{(k)} \psi_0(r), \quad \phi^{+(k)}(r) = I_0^{+(k)} \psi_0(r),$$

где  $I_0^{(k)}$ ,  $I_0^{+(k)}$  – спектры нейтронов и ценностей нейтронов, рассчитываемые по формулам (4.25) и (4.26), а  $\psi_0(r)$  – собственная функция, соответствующая ведущему собственному числу  $\alpha_0^2$  задачи (4.24).

*Геометрическая составляющая  $KP_T$ .* Допустим, активная зона представляет собой шар радиуса  $R$  из металлического урана, охлаждаемого за счёт теплового излучения или газовым теплоносителем. В этом случае при расчёте  $KP_T$  можно пренебречь изменением температуры газа (из-за его малой плотности) и не учитывать ядерную составляющую (поскольку в спектре нейтронов практически отсутствуют тепловые и резонансные нейтроны). Основным фактором, влияющим на изменение реактивности с ростом температуры  $T$ , оказывается увеличение внешнего размера  $R$  и, как следствие, уменьшение плотности и концентраций ядер уранового топлива. В результате значение  $KP_T$  будет близко к величине геометрической составляющей  $\rho'_s$ .

Оценим значение  $\rho'_s$ , предполагая, что внешняя граница реактора совпадает с экстраполированной границей, а радиус  $R(T)$  как функция средней температуры топлива  $T$  меняется по закону:

$$R(T) = R_0 \left[ 1 + a_\gamma (T - T_0) \right], \quad (4.68)$$

где  $R_0$  – радиус активной зоны при  $T = T_0$ , а  $a_\gamma$  – коэффициент линейного расширения топлива. Учтём также, что с ростом  $T$  общее количество ядер любого элемента в объёме  $V$  активной зоны не меняется:  $N_l(T)V(T) = const$ . Тогда при малом изменении  $\delta R$  радиуса отклонения в значениях концентраций ядер  $\delta N_l$  и макроскопических сечений  $\delta \Sigma_p^{(k)}$  равны:

$$\delta N_l = -3 \frac{\delta R}{R_0} N_l, \quad \delta \Sigma_p^{(k)} = -3 \frac{\delta R}{R_0} \Sigma_p^{(k)}, \quad p = tr, c, f, d, \quad (4.69)$$

где  $N_l$ ,  $\Sigma_p^{(k)}$  – концентрации ядер и сечения в реакторе (при температуре  $T = T_0$ ).

Вызванное отклонениями (4.69) изменение реактивности  $\delta\rho$  представим в виде суммы:

$$\delta\rho = \delta_s\rho + \delta_\gamma\rho, \quad (4.70)$$

считая, что первое слагаемое  $\delta_s\rho$  связано лишь с изменением радиуса зоны и рассчитывается по формулам (4.64), (4.65) при  $\phi^{(k)}(R_0) = \phi^{+(k)}(R_0) = 0$ , а второе слагаемое  $\delta_\gamma\rho$  учитывает вклад от изменения плотности топлива и находится по формулам (4.59), (4.60). Воспользовавшись уравнением (4.68) для функции  $\psi_0(r)$  и условиями баланса (4.25) для спектров нейтронов  $I^{(k)}$ , имеем:

$$\delta_s\rho = 2\alpha_0^2 \frac{\langle D \rangle}{\langle \nu_f \Sigma_f \rangle} \frac{\delta R}{R_0}, \quad \delta_\gamma\rho = -6\alpha_0^2 \frac{\langle D \rangle}{\langle \nu_f \Sigma_f \rangle} \frac{\delta R}{R_0}, \quad (4.71)$$

где

$$\langle D \rangle = \frac{\sum_{k=1}^m D^{(k)} I_0^{(k)} I_0^{+(k)}}{\sum_{k=1}^m I_0^{(k)} I_0^{+(k)}}, \quad \langle \nu_f \Sigma_f \rangle = \frac{\sum_{k=1}^m \chi^{(k)} I_0^{+(k)} \sum_{j=1}^m \nu_f^{(j)} \Sigma_f^{(j)} I_0^{(j)}}{\sum_{k=1}^m I_0^{(k)} I_0^{+(k)}}.$$

Если теперь в равенства (4.71) вместо  $\delta R$  поставить  $\delta R = R_0 a_\gamma \delta T$ , то для геометрической составляющей  $\rho'_s$  получим:

$$\rho'_s = \left. \frac{\delta\rho}{\delta T} \right|_{T=T_0} = -4\alpha_0^2 \frac{\langle D \rangle}{\langle \nu_f \Sigma_f \rangle} a_\gamma. \quad (4.72)$$

Таким образом, при соблюдении перечисленных выше условий с ростом температуры реактивность уменьшается:  $KP_T \approx \rho'_s < 0$ . На этом основан принцип действия импульсных реакторов, предназначенных для создания кратковременных всплесков нейтронного поля. В таких реакторах возрастание числа нейтронов вначале происходит за счёт введения (с помощью органов регулирования) небольшой положительной реактивности, вызывающего с некоторым запаздыванием по времени рост температуры. Благодаря отрицательной обратной связи ( $KP_T < 0$ ) по истечении определённого времени повышение температуры

вызовет уменьшение реактивности и цепная реакция деления прекратится.

*Плотностная составляющая*  $KP_T$  включает слагаемые, отвечающие за изменение с ростом температуры  $T$  плотностей всех присутствующих в реакторе материалов: топлива, теплоносителя и т.д., которые могут находиться в различных агрегатных состояниях (топливо – в твёрдом, теплоноситель – в жидком или газообразном). Среди них основной вклад вносит изменение плотности теплоносителя, находящегося в жидком состоянии. Это связано с тем, что коэффициент объёмного расширения жидкостей значительно выше, чем у твёрдых материалов, и изменение концентрации теплоносителя (особенно замедлителя, если он также находится в жидком состоянии) может заметно повлиять на поглощение нейтронов и замедляющую способность среды. Что касается реакторов с газовым охлаждением, то для них этот эффект не существен из-за малой плотности газа.

Оценим ту часть  $\rho'_\gamma$  плотностной составляющей  $KP_T$ , которая связана с изменением температуры лишь теплоносителя. При этом будем считать, что плотность, а значит и концентрация ядер теплоносителя  $N_{mn}(T)$ , меняется с увеличением его средней температуры  $T$  по закону:

$$N_{mn}(T) = \frac{N_{mn}^{(0)}}{1 + a_{mn}(T - T_0)},$$

где  $N_{mn}^{(0)}$  – концентрация ядер теплоносителя (при  $T = T_0$ ), а  $a_{mn}$  – коэффициент объёмного расширения теплоносителя. Тогда отклонения макроскопических сечений  $\delta\Sigma_p^{(k)}$  от соответствующих невозмущённых значений  $\Sigma_p^{(k)}$  при малом изменении температуры  $\delta T$  равны:

$$\delta\Sigma_p^{(k)} = \sigma_{p,mn}^{(k)} \delta N_{mn} = -a_{mn} \Sigma_{p,mn}^{(k)} \delta T, \quad p = tr, c, d. \quad (4.73)$$

Здесь учтено, что  $\delta N_{mn} = -a_{mn} N_{mn}^{(0)} \delta T$ ,  $\Sigma_{p,mn}^{(k)} = \sigma_{p,mn}^{(k)} N_{mn}^{(0)}$ .

Подстановка значений  $\delta\Sigma_p^{(k)}$  в виде (4.73) в соотношения (4.28), (4.29) даёт

$$\rho'_\gamma = \frac{\delta \rho}{\delta T} \Big|_{T=T_0} = a_{mn} \frac{1}{\langle \nu_f \Sigma_f \rangle} \left( -3 \langle \Sigma_{tr} \rangle_{mn} \langle D^2 \rangle \alpha_0^2 + \langle \Sigma_c \rangle_{mn} - \langle \Sigma_d \rangle_{mn} \right), \quad (4.74)$$

где

$$\begin{aligned} \langle D^2 \rangle &= \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m (D^{(k)})^2 I_0^{(k)} I_0^{+(k)}, & \langle \Sigma_{tr} \rangle_{mn} &= \frac{1}{A \langle D^2 \rangle} \sum_{k=1}^m \Sigma_{tr,mn}^{(k)} (D^{(k)})^2 I_0^{(k)} I_0^{+(k)}, \\ \langle \Sigma_c \rangle_{mn} &= \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m \Sigma_{c,mn}^{(k)} I_0^{(k)} I_0^{+(k)}, & \langle \Sigma_d \rangle_{mn} &= \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{m-1} I_0^{(k)} \sum_{j=k+1}^m \Sigma_{d,mn}^{(k \rightarrow j)} (I_0^{+(j)} - I_0^{+(k)}), \\ A &= \sum_{k=1}^m I_0^{(k)} I_0^{+(k)}, \text{ а } \langle \nu_f \Sigma_f \rangle \text{ находится так же, как в формуле (4.71).} \end{aligned}$$

Из выражения (4.74) видно, что величина  $\rho'_\gamma$  зависит от значений трёх слагаемых, учитывающих вклады от изменения: первое – утечки нейтронов, второе – поглощения и последнее слагаемое – спектра нейтронов. В реакторе больших размеров (когда значение параметра  $\alpha_0^2$  мало и вкладом от изменения утечки нейтронов можно пренебречь) всё определяется величиной спектральной составляющей  $\langle \Sigma_d \rangle_{mn}$ . Например, в реакторе на быстрых нейтронах с натриевым теплоносителем [11] в области энергий  $E > 1 \text{кэВ}$  находится  $\sim 80 \%$  всех нейтронов и для их ценностей:  $I^{+(k)} > I^{+(j)}$ ,  $k < j$ . Это связано с такими факторами как: уменьшение сечения поглощения, рост числа  $\nu_f^{(k)}$  и увеличение скорости генерации нейтронов за счёт деления ядер сырьевого материала (U-238) с ростом энергии нейтронов  $E$ . В результате значение  $\rho'_\gamma$  может сделаться положительным, что рассматривается как один из недостатков таких реакторов. Одним из способов борьбы с этим недостатком является уменьшение размеров активной зоны. При этом возрастает геометрический параметр  $\alpha_0^2$  и увеличивается вклад от изменения утечки нейтронов.

*Ядерная составляющая*  $KP_T$  рассчитывается, учитывая зависимости микроскопических сечений элементов от температуры в области тепловых и резонансных энергий нейтронов. Она всегда

в качестве одного из слагаемых включает доплеровский коэффициент реактивности  $\rho'_0$ . Этот коэффициент отражает вклад в  $KP_T$  от изменения ширины резонансных уровней у микроскопических сечений  $\sigma_{p,l}^{(k)}$  в тех энергетических группах  $k \in \Delta$ , которые находятся в области энергий  $E \leq 100$  кэВ. В этой области энергий с ростом температуры  $T$  увеличиваются как сечения радиационного захвата  $\sigma_{c,l}^{(k)}$ , так и сечения деления  $\sigma_{f,l}^{(k)}$  для тяжёлых ядер топлива. Поэтому величина доплеровского коэффициента  $\rho'_0$  зависит от соотношения ядер горючего (U-235, Pu-239) и ядер сырьевого элемента (U-238). Продемонстрируем это для реакторов на быстрых нейтронах, в которых можно пренебречь изменениями сечений для тепловых нейтронов (из-за их крайне малой доли в спектре) и считать, что величина ядерной составляющей практически совпадает со значением  $\rho'_0$ .

Известно, что микроскопические сечения  $\sigma_{p,l}^{(k)}$  в резонансной области энергий зависят не только от температуры  $T$ , но и соотношения ядер поглотителя и замедлителя. В многогрупповой системе ядерных данных это учитывается (см. раздел 3.3) с помощью факторов резонансной самоэкранировки  $f_{p,l}^{(k)}$ , заданных для нескольких значений сечения разбавления  $\sigma_{0,l}^{(k)} = \frac{1}{N_l} \sum_{j \neq l} \sigma_{t,j}^{(k)} N_j$ , и приращений факторов  $\Delta f_{p,l}^{(k)} = f_{p,l}^{(k)}(T_2) - f_{p,l}^{(k)}(T_1)$ , заданных при каждом значении  $\sigma_{0,l}^{(k)}$  для двух интервалов температур  $\Delta T = T_2 - T_1$ . Используя эти данные, можно при известных концентрациях ядер  $N_l$  и температуре  $T = T_0 \in \Delta T$  оценить значения заблокированных сечений  $\sigma_{p,l}^{(k)}$  и производных  $\left. \frac{\partial f_{p,l}^{(k)}}{\partial T} \right|_{T=T_0}$  :

$$\sigma_{p,l}^{(k)} = \tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)} f_{p,l}^{(k)}(\sigma_{0,l}^{(k)}, T_0), \quad \left. \frac{\partial f_{p,l}^{(k)}}{\partial T} \right|_{T=T_0} \approx \frac{\Delta f_{p,l}^{(k)}}{\Delta T},$$

где  $\tilde{\sigma}_{p,l}^{(k)}$  – неблокированные сечения, соответствующие бесконечному разбавлению и температуре 300 К.

Ограничимся рассмотрением реактора с большим размером активной зоны и топливом, содержащим два сорта тяжёлых ядер: урана-235 с концентрацией  $N_5$  и урана-238 с концентрацией ядер  $N_8$ . Будем считать, что при получении  $\rho'_0$  можно пренебречь вкладом от изменения утечки нейтронов (вследствие малого значения геометрического параметра  $\alpha_0^2$ ) и спектра нейтронов (из-за близких значений ценностей нейтронов в выражении  $\sum_{k=1}^{m-1} I_0^{(k)} \sum_{j=k+1}^m \delta \Sigma_d^{(k \rightarrow j)} (I_0^{+(j)} - I_0^{+(k)})$ ).

Изменения  $\delta \Sigma_c^{(k)}$ ,  $\delta \Sigma_f^{(k)}$  макроскопических сечений радиационного захвата и деления, обусловленные возрастанием температуры топлива на  $\delta T$ , можно записать в виде:

$$\delta \Sigma_p^{(k)} = \left[ N_8 \sigma_{p,8}^{(k)} \frac{1}{f_{p,8}^{(k)}} \frac{\partial f_{p,8}^{(k)}}{\partial T} + N_5 \sigma_{p,5}^{(k)} \frac{1}{f_{p,5}^{(k)}} \frac{\partial f_{p,5}^{(k)}}{\partial T} \right] \delta T, \quad p = c, f, \quad (4.75)$$

где блокированные микроскопические сечения  $\sigma_{p,l}^{(k)}$ , факторы  $f_{p,l}^{(k)}$  и производные  $\frac{\partial f_{p,l}^{(k)}}{\partial T}$  ( $l = 5, 8, k \in \Delta$ ) рассчитываются при заданной температуре  $T_0$  в области резонансных энергий нейтронов с номерами групп  $k \in \Delta$ . Подстановка этих выражений в соотношения (4.28), (4.29) даёт

$$\rho'_0 = \left. \frac{\delta \rho}{\delta T} \right|_{T=T_0} = A_5 N_5 - A_8 N_8, \quad (4.76)$$

где

$$\begin{aligned}
A_5 &= \frac{1}{G_f^+} \sum_{k \in \Delta} \left[ \frac{1}{f_{f,5}^{(k)}} \frac{\partial f_{f,5}^{(k)}}{\partial T} \left( v_{f,5}^{(k)} \sigma_{f,5}^{(k)} I_0^{(k)} \sum_{j=1}^m \chi^{(j)} I_0^{+(j)} - \sigma_{f,5}^{(k)} I_0^{(k)} I_0^{+(k)} \right) \right] - \\
&\quad - \frac{1}{G_f^+} \sum_{k \in \Delta} \left[ \frac{1}{f_{c,5}^{(k)}} \frac{\partial f_{c,5}^{(k)}}{\partial T} \sigma_{c,5}^{(k)} I_0^{(k)} I_0^{+(k)} \right], \\
A_8 &= \frac{1}{G_f^+} \sum_{k \in \Delta} \frac{1}{f_{c,8}^{(k)}} \frac{\partial f_{c,8}^{(k)}}{\partial T} \sigma_{c,8}^{(k)} I_0^{(k)} I_0^{+(k)}, \quad A_5 > 0, \quad A_8 > 0.
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что в области резонансных энергий нейтронов  $\sigma_{f,8}^{(k)} = 0$ .

Воспользуемся формулой (4.76) для выяснения зависимости доплеровского коэффициента реактивности  $\rho'_0$  от обогащения

$$\text{топлива } Z: \quad Z = \frac{N_5}{N}, \quad N = N_5 + N_8 = \text{const}.$$

В первом приближении примем, что множители  $A_5$ ,  $A_8$  не зависят от обогащения  $Z$ . Тогда  $\rho'_0 \approx N(A_5 + A_8)Z - NA_8$ . Отсюда следует, что при малом обогащении топлива  $\rho'_0 < 0$ , а при большом обогащении  $\rho'_0 > 0$ . Таким образом, при небольших значениях обогащения топлива основное влияние на величину  $\rho'_0$  оказывает увеличение ширины резонансных уровней у сечения захвата нейтронов ядрами U-238, а при высоком обогащении топлива – увеличение ширины резонансных уровней у сечения деления ядер U-235.

### Список литературы

1. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов / Пер. с англ.: Под ред. В.Н.Артамкина. М.: Атомиздат, 1974, 496 с.
2. Фейтберг С.М., Шихов С.Б., Троянский В.Б. Теория ядерных реакторов. Т.1. Элементарная теория реакторов. Учебник для вузов. – М.: Атомиздат, 1978, 400 с.
3. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. М.: Атомиздат, 1973, 376 с.

4. Бартоломей Г.Г., Бать Г.А., Байбаков В.Д., Алхутов М.С. Основы теории и методы расчёта ядерных энергетических реакторов. Учебное пособие для вузов / Под ред. Г.А.Бать. М.: Энергоатомиздат, 1982, 572 с.
5. Галанин А.Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. Учебное пособие для вузов. - М.: Энергоатомиздат, 1984, 416 с.
6. Орлов В.В. Статика однородного реактора. Конспект лекций. – М.: МИФИ, 1983, 104 с.
7. Орлов В.В. Статика неоднородного реактора. Конспект лекций. – М.: МИФИ, 1984, 68 с.
8. Орлов В.В. Кинетика реактора. Конспект лекций. – М.: МИФИ, 1985, 78 с.
9. Марчук Г.И. Методы расчёта ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961, 667 с.
10. Шишков Л.К. Методы решения диффузионных уравнений двумерного ядерного реактора. М.: Атомиздат, 1976, 112 с.
11. Уолтер А., Рейнольдс А. Реакторы – размножители на быстрых нейтронах / Пер. с англ. А.А.Ванькова, В.В.Яровицина. М.: Энергоатомиздат, 1986, 624 с.
12. Групповые константы для расчёта реакторов и защиты. Справочник / Л.П.Абагян, Н.О.Базазянц, М.Н.Николаев, А.М.Цибуля: Под ред. М.Н.Николаева. – М.: Энергоиздат, 1981, 232 с.
13. Петрова Т.Е., Хромова М.Ф. Сборник задач и упражнений по статике неоднородного реактора. – М.: МИФИ, 1991, 28 с.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1

#### Метод условного разделения переменных

При оптимизационных исследованиях реакторов в 2- или 3-мерных геометриях часто с целью экономии расчётного времени прибегают к приближённым методам получения асимптотических распределений нейтронов. Остановимся на кратком изложении одного из таких методов, широко используемого в инженерной практике и получившего название метода условного разделения переменных (МУРП).

Особенности МУРП рассмотрим вначале на примере расчёта  $K_{эф}$  и асимптотического распределения нейтронов в цилиндрическом реакторе, состоящем из активной зоны, окружённой отражателями (боковым и торцевыми). Будем считать, что он симметричен относительно оси  $r=0$  и плоскости  $z=0$ , известны свойства и размеры всех зон. Сечение части такого реактора плоскостью, проходящей через ось симметрии, совпадает в пределах  $0 \leq r \leq R_2$ ,  $0 \leq z \leq H_2$  с приведённым на рис.2.5, если  $r = R_2, z = H_2$  – координаты экстраполированных границ реактора. Здесь же указаны координаты  $r = R_1, z = H_1$  внешних границ активной зоны и номера зон  $(i, j)$ , причём первый индекс  $i$  указывает номер  $i$ -го радиального слоя толщиной  $\Delta R_i = R_i - R_{i-1}$  ( $i = 1, 2, R_0 = 0$ ), а второй индекс – номер  $j$ -го аксиального слоя толщиной

$$\Delta H_j = H_j - H_{j-1} \quad (j = 1, 2, H_0 = 0).$$

В таком реакторе поток нейтронов  $\phi_0(r, z) = C\psi_0(r, z)$ , а функция  $\psi_0(r, z)$  зависит от двух переменных и находится из решения задачи (1.13) как собственная функция двумерного уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D \frac{\partial \psi_0(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \psi_0(r, z)}{\partial z} \right) + \left( \frac{v_f \Sigma_f}{K_{эф}} - \Sigma_a \right) \psi_0(r, z) = 0, \quad (П.1.1)$$

$$\psi_0(r, z) \in \Omega,$$

где в описание множества  $\Omega$  наряду с условиями (В.12) входят условия симметрии решения:

$$\left( \frac{\partial \psi_0(r, z)}{\partial r} \right)_{r=0} = 0, \quad \left( \frac{\partial \psi_0(r, z)}{\partial z} \right)_{z=0} = 0. \quad (П.1.2)$$

Проинтегрируем уравнение (П.1.1) по толщине каждого слоя и введём обозначения:

$$\psi_0(r, z) = \psi_{i,j}(r, z), \quad r \in \Delta R_i, \quad z \in \Delta H_j,$$

$$\varphi_{i,j}(r) = \int_{\Delta H_j} \psi_0(r, z) dz, \quad \xi_{i,j}(z) = \int_{\Delta R_i} \psi_0(r, z) r dr. \quad (П.1.3)$$

В уравнениях, полученных после интегрирования по интервалам  $\Delta H_2$  и  $\Delta R_2$ , сделаем замену:

$$D_{i,2} \left( \frac{\partial \psi_{i,2}}{\partial z} \right)_{z=H_1} = D_{i,1} \left( \frac{\partial \psi_{i,1}}{\partial z} \right)_{z=H_1}, \quad D_{2,j} \left( \frac{\partial \psi_{2,j}}{\partial r} \right)_{r=R_1} = D_{1,j} \left( \frac{\partial \psi_{1,j}}{\partial r} \right)_{r=R_1}.$$

Такая замена возможна в силу непрерывности проекций токов на границах зон, а выполнена она для того, чтобы учесть в дальнейшем влияние преимущественного перемещения нейтронов из активной зоны в отражатель на распределения нейтронов в отражателях.

Предположим, что в пределах каждой зоны искомое решение можно представить в виде произведения функций, зависящих лишь от одной переменной:

$$\psi_{i,j}(r, z) = \theta_{i,j}(r) \zeta_{i,j}(z), \quad (П.1.4)$$

при этом равенства (П.1.3) примут вид:

$$\varphi_{i,j}(r) = \theta_{i,j}(r) \int_{\Delta H_j} \zeta_{i,j}(z) dz, \quad \xi_{i,j}(z) = \zeta_{i,j}(z) \int_{\Delta R_i} \theta_{i,j}(r) r dr. \quad (П.1.5)$$

Очевидно, это предположение должно хорошо выполняться вдали от границ раздела зон с разными свойствами. Поэтому следует ожидать, что МУРП даст хорошую точность расчёта интегральных характеристик (типа отношения чисел процессов в зонах) реактора

с достаточно большими размерами зон. В таких реакторах допущение (П.1.4) нарушается в отношении сравнительно небольшого числа нейтронов.

Используя предположение (П.1.4), придём к системе уравнений относительно неизвестных функций  $\varphi_{i,j}(r)$ ,  $\xi_{i,j}(z)$ , зависящих лишь от одной переменной:

для зон аксиальных слоёв, в которых  $i = 1, 2$  ( $0 \leq r \leq R_2$ ),

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_{i,1}(r)}{dr} \right) + (\omega_{i,1} - \gamma_{i,1}(H_1)) \varphi_{i,1}(r) = 0, \quad (\text{П.1.6})$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_{i,2}(r)}{dr} \right) + (\omega_{i,2} - \gamma_{i,2}(H_2)) \varphi_{i,2}(r) + \gamma_{i,1}(H_1) \frac{D_{i,1}}{D_{i,2}} \varphi_{i,1}(r) = 0, \quad (\text{П.1.7})$$

в зонах радиальных слоёв, где  $j = 1, 2$  ( $0 \leq z \leq H_2$ ),

$$\frac{d^2 \xi_{1,j}(z)}{dz^2} + (\omega_{1,j} - \alpha_{1,j}(R_1)) \xi_{1,j}(z) = 0, \quad (\text{П.1.8})$$

$$\frac{d^2 \xi_{2,j}(z)}{dz^2} + (\omega_{2,j} - \alpha_{2,j}(R_2)) \xi_{2,j}(z) + \alpha_{1,j}(R_1) \frac{D_{1,j}}{D_{2,j}} \xi_{1,j}(z) = 0. \quad (\text{П.1.9})$$

Здесь  $\omega_{1,1} = \left( \frac{K_\infty^{(1,1)}}{K_{\phi}} - 1 \right) \frac{1}{L_{1,1}^2} > 0$  – в активной зоне,

$$\omega_{i,j} = -\frac{1}{L_{i,j}^2} < 0 \text{ – в остальных зонах,}$$

а параметры  $\alpha_{i,j}(R_i)$ ,  $\gamma_{i,j}(H_j)$  ( $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ ) находятся по формулам:

$$\alpha_{i,j}(R_i) \int_{\Delta R_i} \varphi_{i,j}(r) r dr = R_i \left| \frac{d\varphi_{i,j}(R_i)}{dr} \right|, \quad (\text{П.1.10})$$

$$\gamma_{i,j}(H_j) \int_{\Delta H_j} \xi_{i,j}(z) dz = \left| \frac{d\xi_{i,j}(H_j)}{dz} \right|. \quad (\text{П.1.11})$$

Решения уравнений (П.1.6) - (П.1.9) будем искать на множествах непрерывных и неотрицательных функций, удовлетворяющих

следующим (вытекающим из требований, накладываемых на  $\psi_0(r, z)$ ) условиям:

$$\left( \frac{d\varphi_{1,j}}{dr} \right)_{r=0} = 0, \quad \varphi_{2,j}(R_2) = 0, \quad \varphi_{1,j}(R_1) = \varphi_{2,j}(R_1),$$

$$D_{1,j} \left( \frac{d\varphi_{1,j}}{dr} \right)_{r=R_1} = D_{2,j} \left( \frac{d\varphi_{2,j}}{dr} \right)_{r=R_1}, \quad (\text{П.1.12})$$

$$\left( \frac{d\xi_{i,1}}{dz} \right)_{z=0} = 0, \quad \xi_{i,2}(H_2) = 0, \quad \xi_{i,1}(H_1) = \xi_{i,2}(H_1),$$

$$D_{i,1} \left( \frac{d\xi_{i,1}}{dz} \right)_{z=H_1} = D_{i,2} \left( \frac{d\xi_{i,2}}{dz} \right)_{z=H_1}. \quad (\text{П.1.13})$$

Таким образом, решение двумерного уравнения (П.1.1) заменяется решением системы из четырёх (по числу слоёв в реакторе) одномерных уравнений (П.1.6) - (П.1.9). Однако эта система оказывается нелинейной из-за зависимости параметров  $\gamma_{i,j}(H_j)$ ,  $\alpha_{i,j}(R_i)$  от искомых функций. Поэтому используется итерационный метод, в котором последовательно решаются две задачи: задача «А» – решение уравнений (П.1.6), (П.1.7) при условиях (П.1.12) для функций  $\varphi_{i,j}(r)$ , описывающих радиальные распределения в слоях  $j = 1, 2$ , и задача «В» – решение уравнений (П.1.8), (П.1.9) при условиях (П.1.13) для функций  $\xi_{i,j}(z)$ , описывающих аксиальные распределения в слоях  $i = 1, 2$ . На каждой  $n$ -й итерации выполняются следующие вычисления.

По заданным (на первой итерации) или полученным из предыдущей итерации (при  $n=2, 3, \dots$ ) значениям  $\gamma_{i,j}(H_j) = \gamma_{i,j}^{(n-1)}$  решается задача «А», находятся распределения  $\varphi_{i,j}(r) = \varphi_{i,j}^{(n)}(r)$ , наименьшее собственное число  $\alpha_{1,1}^{(n)}$  и оценивается эффективный коэффициент размножения нейтронов  $K_{эф} = K_A^{(n)}$  из равенства:

$$\alpha_{1,1}^{(n)} = \left( \frac{K_\infty^{(1,1)}}{K_A^{(n)}} - 1 \right) \frac{1}{L_{1,1}^2} - \gamma_{1,1}^{(n-1)}. \quad (\text{П.1.14})$$

Соответствующая числу  $\alpha_{1,1}^{(n)}$  собственная функция

$\vec{\varphi}^{(n)}(r) = \begin{pmatrix} \varphi_{i,1}^{(n)}(r) \\ \varphi_{i,2}^{(n)}(r) \end{pmatrix}$  при  $r \in \Delta R_i$  ( $i=1,2$ ) используется для

определения по формулам (П.1.10) параметров  $\alpha_{i,j}(R_i)$ . При этом  $\alpha_{1,1}(R_1) = \alpha_{1,1}^{(n)}$ , что легко установить путём интегрирования уравнения (П.1.6) по  $r \in \Delta R_1$ .

Полученные таким образом значения  $\alpha_{i,j}(R_i) = \alpha_{i,j}^{(n)}$  используются при решении задачи «В». В результате определяется наименьшее собственное число  $\gamma_{1,1}^{(n)}$  задачи, соответствующие ему распределения  $\xi_{i,j}^{(n)}(z)$  и оценивается значение  $K_{эф} = K_B^{(n)}$  из соотношения:

$$\gamma_{1,1}^{(n)} = \left( \frac{K_\infty^{(1,1)}}{K_B^{(n)}} - 1 \right) \frac{1}{L_{1,1}^2} - \alpha_{1,1}^{(n)}. \quad (\text{П.1.15})$$

Затем с использованием собственной функции

$\vec{\xi}^{(n)}(z) = \begin{pmatrix} \xi_{1,j}^{(n)}(z) \\ \xi_{2,j}^{(n)}(z) \end{pmatrix}$ ,  $z \in \Delta H_j$ , ( $j=1,2$ ) по формулам (П.1.11)

рассчитываются параметры  $\gamma_{i,j}(H_j)$ . Причём, как и в задаче «А» (но только интегрированием уравнения (П.1.8) по  $z \in \Delta H_1$ ), можно установить, что  $\gamma_{1,1}(H_1) = \gamma_{1,1}^{(n)}$ . На этом заканчивается одна итерация.

Итерационный счёт продолжается до тех пор, пока не перестанут меняться (в пределах заданных погрешностей) значения  $\alpha_{i,j}^{(n)}, \gamma_{i,j}^{(n)}, K_A^{(n)}, K_B^{(n)}$ . Если это произойдёт, начиная с итерации  $n=N$ , то в качестве эффективного коэффициента размножения двумерного реактора принимается:

$$K_{эф} = K_A^{(N)} \text{ или } K_{эф} = K_B^{(N)},$$

а собственные функции  $\vec{\varphi}^{(N)}(r), \vec{\xi}^{(N)}(z)$  используются для оценки двумерного распределения  $\psi_0(r, z)$ .

Следует отметить, что функции  $\bar{\varphi}^{(N)}(r), \bar{\xi}^{(N)}(z)$ , полученные из решения соответствующих однородных задач, определены с точностью до постоянных множителей  $A_0, B_0$ . Поэтому для согласованных между собой распределений введём обозначения:  $\varphi_{i,j}^{(0)}(r) = A_0 \varphi_{i,j}^{(N)}(r)$ ,  $\xi_{i,j}^{(0)}(z) = B_0 \xi_{i,j}^{(N)}(z)$ , а один из неизвестных множителей выразим через другой множитель из условия равенства интегральных потоков:  $\int_{\Delta R_i} \varphi_{i,j}^{(0)}(r) r dr = \int_{\Delta H_j} \xi_{i,j}^{(0)}(z) dz$

(которое можно записать для любой зоны реактора). Теперь, учитывая предположение (П.1.4) и соотношения (П.1.5), получим:

$$\psi_{i,j}(r, z) = \frac{\varphi_{i,j}^{(0)}(r) \xi_{i,j}^{(0)}(z)}{\int_{\Delta R_i} \varphi_{i,j}^{(0)}(r) r dr}, \quad r \in \Delta R_i, \quad z \in \Delta H_j. \quad (\text{П.1.16})$$

Отсюда видно, что построенное на базе функций (П.1.16) двумерное распределение  $\psi_0(r, z)$  может терпеть разрывы на границах зон. Это является прямым следствием предположения (П.1.4), которое (как ранее отмечалось) в рассматриваемом случае строго не выполняется.

Что касается нахождения неизвестных функций  $\varphi_{i,j}^{(n)}(r), \xi_{i,j}^{(n)}(z)$ , то на каждой итерации это выполняется с использованием известных методов. Так, однородные уравнения (П.1.6), (П.1.8) решаются так же, как для реактора с отражателем (раздел 2.2). При известных распределениях  $\varphi_{i,1}^{(n)}(r), \xi_{1,j}^{(n)}(z)$  уравнения (П.1.7) или (П.1.9) являются неоднородными. Решение каждого из них (например, определение  $\varphi_{i,2}^{(n)}(r)$  в задаче «А») представим, опуская номер итерации  $n$ , в виде

$$\varphi_{i,2}(r) = A_{i,2} \tilde{\varphi}_{i,2}(r) + \tilde{f}_{i,2}(r), \quad i = 1, 2, \quad (\text{П.1.17})$$

где  $\tilde{\varphi}_{i,2}(r)$  – решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{\varphi}_{i,2}}{dr} \right) + (\omega_{i,2} - \gamma_{i,2}) \tilde{\varphi}_{i,2}(r) = 0, \quad (\text{П.1.18})$$

а  $\tilde{f}_{i,2}(r)$  – какое-либо частное решение неоднородного уравнения.

Частное решение удобно искать в форме:  $\tilde{f}_{i,2}(r) = C_{i,2} \varphi_{i,1}(r)$ .

Подставляя сумму (П.1.17) в уравнение (П.1.7) и учитывая равенства (П.1.6) и (П.1.18), получим:

$$C_{i,2} = \frac{D_{i,1}}{D_{i,2}} \frac{\gamma_{i,1}}{(\omega_{i,1} - \gamma_{i,1}) - (\omega_{i,2} - \gamma_{i,2})}, \quad i = 1, 2.$$

Реактору с активной зоной, окружённой отражателем, можно сопоставить эквивалентный «голый» (без отражателя) реактор, в котором материальный  $\omega$  (2.1) и геометрические  $\alpha_r^2$ ,  $\alpha_z^2$  (2.14) параметры равны:

$$\omega = \omega_{1,1}, \quad \alpha_r^2 = \alpha_{1,1}, \quad \alpha_z^2 = \gamma_{1,1},$$

а радиус  $R_3$  и высота  $H_3$  принимают значения:  $R_3 = R + \delta_r$ ,  $H_3 = H + 2\delta_z$ . Если добавки  $\delta_r$ ,  $\delta_z$  выбрать так, чтобы:

$$\left( \frac{2,405}{R_3 + \delta_r} \right)^2 = \alpha_{1,1}, \quad \left( \frac{\pi}{H_3 + 2\delta_z} \right)^2 = \gamma_{1,1},$$

то решение задачи о критичности эквивалентного реактора при условиях

$$\phi(R_3, z) = 0, \quad \phi(r, \pm 0,5H_3) = 0$$

даст те же значения  $K_{3\phi}$  и асимптотического потока нейтронов  $\phi(r, z)$ , что и полученные выше в приближении (П.1.4) в активной зоне реактора с отражателем.

МУРП может быть использован для приближённого расчёта потока нейтронов в более сложных моделях реакторов. Например, если рассматривается многослойный реактор с  $m$  слоями в аксиальном и  $n$  слоями в радиальном направлениях, а асимптотический поток нейтронов ищется в односкоростном диффузионном приближении, то придём к следующим двум системам одномерных уравнений.

Для функций  $\varphi_{i,j}(r)$ , описывающих радиальные распределения нейтронов в зонах  $j$ -х аксиальных слоёв, получим уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_{i,j}(r)}{dr} \right) + \left( \omega_{i,j} - \gamma_{i,j}(H_j) \eta_{i,j} - \bar{\gamma}_{i,j}(H_{j-1})(1 - \eta_{i,j-1}) \right) \varphi_{i,j}(r) + \\ & + \frac{D_{i,j+1}}{D_{i,j}} \bar{\gamma}_{i,j+1}(H_j)(1 - \eta_{i,j}) \varphi_{i,j+1}(r) + \frac{D_{i,j-1}}{D_{i,j}} \gamma_{i,j-1}(H_{j-1}) \eta_{i,j-1} \varphi_{i,j-1}(r) = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.1.19})$$

где параметры  $\gamma_{i,j}(H_j)$  рассчитываются по формулам вида (П.1.11), а значения  $\bar{\gamma}_{i,j+1}(H_j)$ ,  $\eta_{i,j}$  определяются равенствами:

$$\bar{\gamma}_{i,j+1}(H_j) \int_{\Delta H_{j+1}} \xi_{i,j+1}(z) dz = \left| \frac{d\xi_{i,j+1}(H_j)}{dz} \right|, \quad \eta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{d\xi_{i,j}(H_j)}{dz} < 0 \\ 0, & \text{если } \frac{d\xi_{i,j}(H_j)}{dz} \geq 0 \end{cases}. \quad (\text{П.1.20})$$

Для функций  $\xi_{i,j}(z)$ , описывающих аксиальные распределения нейтронов в  $i$ -х слоях, будем иметь уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \xi_{i,j}(z)}{dz^2} + \left( \omega_{i,j} - \alpha_{i,j}(R_i) \delta_{i,j} - \bar{\alpha}_{i,j}(R_{i-1})(1 - \delta_{i-1,j}) \right) \xi_{i,j}(z) + \\ & + \frac{D_{i+1,j}}{D_{i,j}} \bar{\alpha}_{i+1,j}(R_i)(1 - \delta_{i,j}) \xi_{i+1,j}(z) + \frac{D_{i-1,j}}{D_{i,j}} \alpha_{i,j}(R_{i-1}) \delta_{i-1,j} \xi_{i-1,j}(z) = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.1.21})$$

где параметры  $\alpha_{i,j}(R_i)$  находятся по формулам вида (П.1.10), а значения  $\bar{\alpha}_{i,j}(R_i)$  и  $\delta_{i,j}$  определяются равенствами:

$$\bar{\alpha}_{i+1,j}(R_i) \int_{\Delta R_{i+1}} \varphi_{i+1,j}(r) r dr = R_i \left| \frac{d\varphi_{i+1,j}(R_i)}{dr} \right|, \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{d\varphi_{i,j}(R_i)}{dr} < 0 \\ 0, & \text{если } \frac{d\varphi_{i,j}(R_i)}{dr} \geq 0 \end{cases}. \quad (\text{П.1.22})$$

В случае, когда рассматривается многозонный реактор в цилиндрической геометрии, а потоки  $\phi^{(k)}(r, z)$  в энергетических группах  $k = 1, 2, \dots, m$  находятся из решения уравнений (3.32), (3.36), основное допущение метода формулируется в виде:

$$\phi^{(k)}(r, z) = I_{i,j}^{(k)} \theta_{i,j}^{(g)}(r) \zeta_{i,j}^{(g)}(z), \quad k \in \Delta_g, \quad r \in \Delta R_i, \quad z \in \Delta H_j, \quad (\text{П.1.23})$$

где  $I_{i,j}^{(k)}$  – независящие от пространственных переменных амплитуды распределений,  $\Delta_g$  – номера подряд расположенных групп  $k$ , включённых в энергетический диапазон  $g = 1, 2, \dots, G$  (номера диапазонов возрастают с уменьшением энергии нейтронов и  $\sum_{g=1}^G \Delta_g = m$ ),  $\theta_{i,j}^{(g)}(r)$ ,  $\zeta_{i,j}^{(g)}(z)$  – зависящие лишь от одной переменной функции. Таким образом, в зоне  $(i, j)$  всем группам нейтронов  $k \in \Delta_g$  приписывается одно и то же пространственное распределение.

Ограничимся рассмотрением одномерной модели реактора, состоящего из  $n$  зон разного состава (рис.2.1). В этом случае имеем один аксиальный слой, в котором  $\zeta_{i,1}^{(g)} = \cos(\alpha_z z)$ , где  $\alpha_z^2$  – геометрический параметр, рассчитываемый по формуле (2.14). Опуская в дальнейшем индекс  $j$ , введём обозначения:

$$\varphi_i^{(g)}(r) = \theta_i^{(g)}(r) \sum_{k \in \Delta_g} I_i^{(k)}, \quad F_i^{(k)} = I_i^{(k)} \int_{\Delta R_i} \theta_i^{(g)}(r) r dr, \quad k \in \Delta_g. \quad (\text{П.1.24})$$

Здесь функция  $\varphi_i^{(g)}(r)$  описывает пространственное распределение нейтронов диапазона  $g$  в зоне  $i$ , а значение  $F_i^{(k)}$  совпадает с интегральным потоком нейтронов группы  $k$  в той же зоне. Очевидно, что

$$\int_{\Delta R_i} \varphi_i^{(g)}(r) r dr = \sum_{k \in \Delta_g} F_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad g = 1, 2, \dots, G.$$

Складывая уравнения (3.53) для потоков  $\phi^{(k)}(r, z)$  при  $k \in \Delta_g$ , интегрируя их по переменной  $z \in [0, H_1]$  и учитывая допущение (П.1.23), придём к следующим уравнениям для функций  $\varphi_i^{(g)}(r)$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \langle D \rangle_i^{(g)} r \frac{d\varphi_i^{(g)}(r)}{dr} \right) - \left( \langle \Sigma_{ad} \rangle_i^{(g)} + \alpha_z^2 \langle D \rangle_i^{(g)} \right) \varphi_i^{(g)}(r) + \sum_{s=1}^g \langle \Sigma_d \rangle_i^{(s \rightarrow g)} \varphi_i^{(s)}(r) +$$

$$+ \frac{1}{K_{\varphi}} \langle \chi \rangle_i^{(g)} \sum_{s=1}^G \langle \nu_f \Sigma_f \rangle_i^{(s)} \varphi_i^{(s)}(r) = 0, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (\text{П.1.25})$$

где макроскопические сечения (средние в диапазоне  $g$ ) находятся по формулам:

$$\langle D \rangle_i^{(g)} = \frac{1}{A_i^{(g)}} \sum_{k \in \Delta_g} D_i^{(k)} F_i^{(k)}, \quad \langle \Sigma_{ad} \rangle_i^{(g)} = \frac{1}{A_i^{(g)}} \sum_{k \in \Delta_g} \left( \Sigma_{ad,i}^{(k)} F_i^{(k)} - \sum_{s \in \Delta_g} \Sigma_{d,i}^{(s \rightarrow k)} F_i^{(s)} \right),$$

$$\langle \Sigma_d \rangle_i^{(s \rightarrow g)} = \frac{1}{A_i^{(s)}} \sum_{k \in \Delta_s} \sum_{j \in \Delta_g} \Sigma_{d,i}^{(k \rightarrow j)} F_i^{(k)}, \quad \langle \nu_f \Sigma_f \rangle_i^{(g)} = \frac{1}{A_i^{(g)}} \sum_{k \in \Delta_g} \nu_f^{(k)} \Sigma_{f,i}^{(k)} F_i^{(k)},$$

$$\langle \chi \rangle_i^{(g)} = \sum_{k \in \Delta_g} \chi^{(k)}, \quad A_i^{(g)} = \sum_{k \in \Delta_g} F_i^{(k)}. \quad (\text{П.1.26})$$

Граничные условия для функций  $\varphi_i^{(g)}(r)$  вытекают из условий, принятых для потоков  $\phi^{(k)}(r)$ , и получаются путём суммирования соответствующих равенств с последующим использованием допущения (П.1.23).

Интегрируя уравнения (3.53) по толщине  $i$ -й зоны, учитывая непрерывность проекций токов  $D^{(k)} \frac{d\phi^{(k)}}{dr}$  и предположение (П.1.23), получим алгебраические уравнения для определения интегральных потоков  $F_i^{(k)}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ,  $g = 1, 2, \dots, G$ ):

$$D_{i+1}^{(k)} \bar{\alpha}_{i+1}^{(g)}(R_i) (1 - \delta_i^{(g)}) F_{i+1}^{(k)} - \left( \Sigma_{ad,i}^{(k)} + \alpha_z^2 D_i^{(k)} + \alpha_i^{(g)}(R_i) \delta_i^{(g)} D_i^{(k)} + \right.$$

$$\left. + \bar{\alpha}_{i-1}^{(g)}(R_{i-1}) (1 - \delta_{i-1}^{(g)}) D_i^{(k)} \right) F_i^{(k)} + D_{i-1}^{(k)} \alpha_{i-1}^{(g)}(R_{i-1}) \delta_{i-1}^{(g)} F_{i-1}^{(k)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_{d,i}^{(j \rightarrow k)} F_i^{(j)} + \frac{1}{K_{\varphi}} \chi^{(k)} \sum_{j=1}^m \nu_f^{(j)} \Sigma_{f,i}^{(j)} F_i^{(j)} = 0, \quad (\text{П.1.27})$$

где параметры  $\alpha_i^{(g)}(R_i)$ ,  $\bar{\alpha}_{i+1}^{(g)}(R_i)$ ,  $\delta_i^{(g)}$  рассчитываются по формулам вида (П.1.10), (П.1.22) (но записанным для группы  $g$ ). При этом используется то же правило формирования источников

нейтронов в зоне  $i$ , что и в уравнениях (П.1.19), (П.1.21), т.е. на основе знаков производных  $\frac{d\varphi_i^{(g)}(R_i)}{dr}$  на границах зон.

Уравнения (П.1.19), (П.1.21) или (П.1.25), (П.1.27) обычно решаются численно, используя метод итераций источников. На каждой итерации уравнения вида (П.1.19), (П.1.21) сводятся к конечно-разностным уравнениям, совпадающим по форме с (2.66). Поэтому можно воспользоваться теми же приёмами, которые описаны в разделе 2.5. В связи с этим полезно отметить, что для реактора с небольшим числом слоёв возможно применение метода матричной факторизации. Действительно, ранее указывалось на его низкую эффективность из-за высокой размерности матриц в уравнениях вида (2.73), определяемой числом точек сетки разбиения вдоль осей  $r$  или  $z$ . Теперь размерности матриц совпадают с числом слоёв  $n$  или  $m$  вдоль тех же направлений.

Что касается системы алгебраических уравнений (П.1.27), то на каждой итерации при известных источниках

$$\sum_{k=1}^m \nu_f^{(k)} \Sigma_{f,i}^{(k)} F_i^{(k)} = \sum_{g=1}^G \langle \nu_f \Sigma_f \rangle_i^{(g)} \int_{\Delta R_i} \varphi_i^{(g)}(r) r dr$$

они решаются последовательно, начиная с первой энергетической группы. При этом для любой группы  $k$  уравнения для потоков  $F_i^{(k)}$  принимают вид «трехточечных» уравнений, которые проще всего решать методом прогонки.

## Приложение 2

### Интегро-дифференциальное уравнение для ценности нейтронов

В многогрупповом диффузионном приближении рассматривается проинтегрированный по всему телесному углу поток нейтронов и принимается, что вероятности взаимодействия нейтронов с ядрами среды не зависят от энергии  $E$  в пределах каждого энергетического интервала  $\Delta E_k$ . Поэтому и ценности  $\phi^{+(k)}(\vec{r})$  являлись функциями лишь пространственной переменной  $\vec{r}$  и были постоянными для всех нейтронов  $k$ -й группы.

На самом деле макроскопические сечения рассеяния  $\Sigma_s(\vec{r}, E)$ , радиационного захвата  $\Sigma_c(\vec{r}, E)$ , деления  $\Sigma_f(\vec{r}, E)$ , а также спектр нейтронов деления  $\chi(E)$  непрерывно меняются с изменением энергии  $E$ . Плотности вероятностей рассеяния  $W_{s,l}(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega})$  на ядрах сорта  $l$  зависят как от энергий  $E, E'$ , так и от направлений полёта нейтронов  $\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'$  до (помечено штрихами) и после рассеяния. В силу этого асимптотический поток нейтронов  $\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  в условно-критическом реакторе становится функцией переменных  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  и находится из решения интегро-дифференциального уравнения переноса нейтронов (для сокращения записи через  $\vec{v}$  обозначены переменные  $E, \vec{\Omega}$ , а через  $\vec{v}'$  – переменные  $E', \vec{\Omega}'$ ):

$$-\vec{\Omega} \nabla \phi(\vec{r}, \vec{v}) - \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, \vec{v}) + \int \int_{E' \vec{\Omega}'} \Sigma_s(\vec{r}, E') W_s(\vec{r}, \vec{v}' \rightarrow \vec{v}) \phi(\vec{r}, \vec{v}') d\vec{\Omega}' dE' + \frac{1}{K_{эф}} \frac{\chi(E)}{4\pi} \int \int_{E' \vec{\Omega}'} \nu_f \Sigma_f(\vec{r}, E') \phi(\vec{r}, \vec{v}') d\vec{\Omega}' dE' = 0 \quad (\text{П.2.1})$$

при условиях:

$$\text{функция } (\vec{\Omega}, \vec{n}) \phi(\vec{r}, \vec{v}) \text{ непрерывна при всех } \vec{r} \in V, \\ 0 \leq E \leq E_0, \vec{\Omega} \in \vec{\Omega} \text{ и } (\vec{\Omega}, \vec{n}) \phi(\vec{r}_s, \vec{v}) = 0 \text{ при } (\vec{\Omega}, \vec{n}) \leq 0. \quad (\text{П.2.2})$$

Здесь принимается, что распределение нейтронов деления изотропно по углу и одинаково для всех делящихся ядер,  $\vec{\Omega}$  (или  $\vec{\Omega}'$ ) – множество всех векторов единичной длины  $\vec{\Omega}$  (или  $\vec{\Omega}'$ ), идущих из центра сферы к точкам её поверхности,  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали в точках  $\vec{r}_s$  выпуклой границы реактора с вакуумом,  $\Sigma_t(\vec{r}, E)$  – полное макроскопическое сечение, а  $W_s(\vec{r}, \vec{v}' \rightarrow \vec{v})$  – плотность вероятности рассеяния, определяемая равенством

$$\Sigma_s(\vec{r}, E) W_s(\vec{r}, \vec{v}' \rightarrow \vec{v}) = \sum_l \sigma_{s,l}(E') W_{s,l}(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}) \rho_l(\vec{r}),$$

в котором  $\sigma_{s,l}(E')$  – микроскопическое сечение рассеяния, а  $\rho_l(\vec{r})$  – концентрация ядер сорта  $l$ .

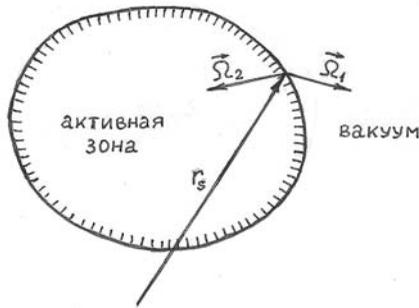


Рис.П.2.1. Выпуклая граница с вакуумом

Теперь изменение асимптотической мощности реактора будет зависеть не только от энергии  $E$  и координат точки  $\vec{r}$ , но и от направления полёта  $\vec{\Omega}$  нейтрона в этой точке. В этом проще всего убедиться, рассматривая два способа помещения нейтрона энергии  $E$  в какую-либо точку  $\vec{r}_s$  выпуклой границы с вакуумом (рис. П.2.1). Они различаются направлениями полёта  $\vec{\Omega}_1$  и  $\vec{\Omega}_2$ . Если в первом случае (вдоль вектора  $\vec{\Omega}_1$ ) нейтрон попадает в вакуум и не может изменить мощность реактора, то во втором случае (вдоль вектора  $\vec{\Omega}_2$ ) нейтрон имеет конечную вероятность столкнуться с ядром делящегося материала и вызвать его деление, что приведёт к изменению мощности. Поэтому в общем случае асимптотическая ценность нейтронов  $\phi^+$  будет функцией переменных  $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ .

Получим уравнение для функции  $\phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  в условно-критическом реакторе, опираясь на закон сохранения ценностей. С этой целью в единичный объём в окрестности точки  $\vec{r} \in V$  поместим  $\delta q$  нейтронов энергии  $E = \frac{1}{2} m v^2$ , летящих вдоль единичного вектора  $\vec{\Omega}$  (рис. П.2.2). Ценность таких

нейтронов равна  $\delta q \phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ , если  $\phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$  – ценность одного нейтрона в рассматриваемой фазовой точке. Определим ценности вторичных нейтронов, появившихся из  $\delta q$  первоначально впущенных нейтронов за малый промежуток времени  $\Delta t$ . При этом ограничимся теми же процессами взаимодействия нейтронов с ядрами среды, что и в уравнении (П.2.1). Скорости соответствующих процессов будем относить к точке  $\vec{r}$ , имея в виду осуществляемый в дальнейшем предельный переход при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

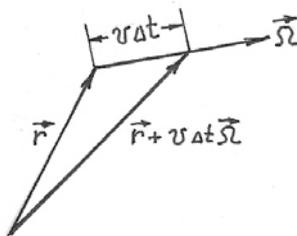


Рис. П.2.2. Схема движения впущенных нейтронов.

Имеем следующие составляющие ценности вторичных нейтронов:

1. Ценность нейтронов  $P_t^+$ , не испытавших взаимодействий с ядрами среды за время  $\Delta t$ :

$$P_t^+ = [\delta q - \delta q v \Delta t \Sigma_t(\vec{r}, E)] \phi^+(\vec{r} + v \Delta t \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}).$$

2. Ценность нейтронов  $P_s^+$ , появившихся в течение времени  $\Delta t$  за счёт упругих и неупругих столкновений с ядрами:

$$P_s^+ = \int \int_{E' \vec{\Omega}'} \delta q v \Delta t \Sigma_s(\vec{r}, E) W_s(\vec{r}, E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}') \phi^+(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' dE'.$$

3. Ценность нейтронов  $P_f^+$ , возникших за время  $\Delta t$  в результате деления ядер среды:

$$P_f^+ = \int \int_{E' \vec{\Omega}'} \Delta N v \Delta t \Sigma_f(\vec{r}, E) \frac{v_f(\vec{r}, E)}{K_{эф}} \frac{\chi(E')}{4\pi} \phi^+(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' dE'.$$

Здесь учтено, что в условно-критическом реакторе на одно деление ядра в среднем приходится  $\frac{\nu_f(\vec{r}, E)}{K_{эф}}$  нейтронов деления, которые имеют изотропное угловое распределение. Кроме того, принято во внимание, что:

- число нейтронов из  $\delta q$  впущенных нейтронов, испытавших за время  $\Delta t$  любые виды взаимодействий с ядрами среды, равно  $\delta q \nu \Delta t \Sigma_t(\vec{r}, E)$ , и поэтому разность  $\delta q - \delta q \nu \Delta t \Sigma_t(\vec{r}, E)$  даёт то количество нейтронов, которое по истечении времени  $\Delta t$  окажется в точке  $\vec{r} + \nu \Delta t \vec{\Omega}$ , имея энергию  $E$  и двигаясь в направлении вектора  $\vec{\Omega}$ ;
- число нейтронов, имеющих после упругих и неупругих столкновений с ядрами среды энергию  $E'$  и летящих вдоль вектора  $\vec{\Omega}'$  внутри соответствующих единичных интервалов энергии и телесного угла, равно  $\delta q \nu \Delta t \Sigma_s(\vec{r}, E) W_s(\vec{r}, E, \vec{\Omega} \rightarrow E', \vec{\Omega}')$ ;
- число нейтронов деления, появившихся с энергией  $E'$  и направлением полёта  $\vec{\Omega}'$  внутри соответствующих единичных интервалов энергии и телесного угла, равно  $\delta q \nu \Delta t \Sigma_f(\vec{r}, E) \frac{\nu_f(\vec{r}, E)}{K_{эф}} \frac{\chi(E')}{4\pi}$ .

Используя закон сохранения ценностей, придём к равенству:

$$\delta q \phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = P_t^+ + P_s^+ + P_f^+. \quad (\text{П.2.3})$$

Раскладывая функцию  $\phi^+(\vec{r} + \nu \Delta t \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega})$  в ряд по параметру  $\Delta t$ :

$$\phi^+(\vec{r} + \nu \Delta t \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) = \phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \nu \Delta t \vec{\Omega} \nabla \phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \dots$$

и переходя в (П.2.3) к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \phi^+(\vec{r}, \vec{\nu}) - \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi^+(\vec{r}, \vec{\nu}) + \Sigma_s(\vec{r}, E) \int \int_{E' \vec{\Omega}'} W_s(\vec{r}, \vec{\nu} \rightarrow \vec{\nu}') \phi^+(\vec{r}, \vec{\nu}') d\vec{\Omega}' dE' + \\ & + \frac{1}{K_{эф}} \frac{\nu_f \Sigma_f(\vec{r}, E)}{4\pi} \int \int_{E' \vec{\Omega}'} \chi(E') \phi^+(\vec{r}, \vec{\nu}') d\vec{\Omega}' dE' = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

Учитывая физический смысл ценности нейтронов, решение следует искать при условиях:

$$\begin{aligned} & (\vec{\Omega}, \vec{n})\phi^+(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) - \text{непрерывная функция при всех } (\vec{r}, E, \vec{\Omega}), \\ & (\vec{\Omega}, \vec{n})\phi^+(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0 \text{ при } (\vec{\Omega}, \vec{n}) \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.5})$$

Можно показать, что операторы уравнения (П.2.4) сопряжены к соответствующим операторам уравнения переноса нейтронов (П.2.1) на множествах функций, удовлетворяющих условиям (П.2.2), (П.2.5). Это позволяет, используя изложенные в разделе 4.1 преобразования, получить соотношения теории возмущений для изменения реактивности реактора. В частности, в приближении малых возмущений вместо (4.18) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta K_{\text{эф}}}{K_{\text{эф}}^2} = & \frac{1}{G_f^+} \int_V \int_E \int_{\vec{\Omega}} \phi^+(\vec{r}, \vec{v}) \left[ -\delta \Sigma_t(\vec{r}, E) \phi(\vec{r}, \vec{v}) + \int_{E'} \int_{\vec{\Omega}'} \delta(\Sigma_s W_s) \phi(\vec{r}, \vec{v}) d\vec{\Omega}' dE' + \right. \\ & \left. + \frac{1}{K_{\text{эф}}} \frac{\chi(E)}{4\pi} \int_{E'} \int_{\vec{\Omega}'} \delta(v_f \Sigma_f) \phi(\vec{r}, \vec{v}') d\vec{\Omega}' dE' \right] d\vec{\Omega} dE dV, \end{aligned} \quad (\text{П.2.6})$$

где  $\delta \Sigma_t$ ,  $\delta(\Sigma_s W_s)$ ,  $\delta(v_f \Sigma_f)$  – изменения макроскопических сечений;

$$G_f^+ = \int_V \int_E \int_{\vec{\Omega}} \frac{\chi(E)}{4\pi} \phi^+(\vec{r}, \vec{v}) \int_{E'} \int_{\vec{\Omega}'} v_f \Sigma_f(\vec{r}, E') \phi(\vec{r}, \vec{v}') d\vec{\Omega}' dE' d\vec{\Omega} dE dV -$$

ценность нейтронов деления.

Анатолий Михайлович Кузьмин

**Основы теории критичности, методы  
расчёта и возмущение реактивности  
реактора**

Учебное пособие

Редактор Е.Е.Шумакова  
Оригинал-макет изготовлен А.М.Кузьминым

Подписано в печать 05.12.2008. Формат 60×84 1/16.  
Печ.л. 9,75. Уч.-изд.л. 9,75. Тираж 150 экз.  
Изд. № 4/В. Заказ №

---

Московский инженерно-физический институт  
(государственный университет),  
115409, Москва, Каширское шоссе, д.31.  
Типография издательства «ТРОВАНТ»,  
г. Троицк Московской области



