

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.В. Ктитров, Ю.Ю. Шумилов

**РАСЧЕТ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ
И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ**

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 681.51 (075)

ББК 32.965я7

К87

Ктитров С.В., Шумилов Ю.Ю. Расчет установившихся режимов и переходных процессов в нелинейных системах: Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2008. – 208 с.

В пособии приведены приближенные методы анализа процессов в нелинейных системах автоматического управления в модификациях, предназначенных для решения сложных инженерных задач. Основное внимание уделено применению метода гармонической линеаризации к расчету нелинейных колебаний и переходных процессов.

Пособие предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теории автоматического управления.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент д-р техн. наук, проф. А.Д. Модяев

ISBN 978-5-7262-1022-3

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	9
1.1. Описание нелинейных динамических систем, разделимых на линейные и нелинейные подсистемы	9
1.2. Представление линейной части системы в пространстве состояний	13
1.3. Кусочно-линейное описание нелинейных статических элементов	18
1.4. Модели типовых нелинейностей систем управления	22
1.5. Примеры описания нелинейных систем управления	26
Контрольные вопросы и упражнения	29
Глава 2. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ	32
2.1. Гармоническая линеаризация нелинейных элементов	32
2.2. Условия применимости метода гармонической линеаризации	47
2.3. Применение метода гармонической линеаризации для расчета симметричных колебаний	50
2.4. Метод шаблонов	60
2.5. Расчет несимметричных колебаний	68
2.6. Методика уточнения первой гармоники	81
2.7. Применение метода гармонической линеаризации к расчету параметров вынужденных колебаний.....	98
2.8. Расчет систем с несколькими нелинейностями	101
Контрольные вопросы и упражнения	105
Глава 3. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ	109
3.1. Статистическая линеаризация нелинейных функций.	109
3.2. Статистические характеристики линейных динамических звеньев	114

3.3. Расчет статистических характеристик процессов в замкнутой нелинейной системе	117
3.4. Расчет колебаний в нелинейных системах при случайных воздействиях	122
Контрольные вопросы и упражнения	125
 Глава 4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ.....	126
4.1. Построение областей устойчивости нелинейных систем в пространстве их параметров	126
4.2. Расчет автоколебательных режимов с учетом высших гармоник	135
4.3. Оценка точности метода гармонической линеаризации	150
Контрольные вопросы и упражнения	160
 Глава 5. НЕКОТОРЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ	161
5.1. Определение параметров скачкообразного резонанса в нелинейных системах	161
5.2. Расчет переходных процессов и оценка показателей качества системы методом экспоненциальной линеаризации	172
5.3. Модифицированный метод экспоненциальной линеаризации	184
5.4. Расчет параметров колебаний при неравномерной сходимости ряда Фурье	190
Контрольные вопросы и упражнения	203
 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	205

ВВЕДЕНИЕ

Многие из существующих и проектируемых технических систем должны выполнять определенную задачу управления, причем на современном этапе развития техники возникают следующие проблемы: либо объекты управления настолько сложны, что ограничиться их линейными моделями невозможно уже при проектировании, либо требования к качеству систем столь высоки, что даже хорошо изученные объекты управления, линейные модели которых ранее вполне соответствовали возможностям проектировщиков, опиравшихся на традиционные методы анализа и синтеза [1, 2], в настоящее время с применением новых систем управления, проявляют существенно нелинейные свойства.

Практически все реальные системы автоматического управления (САУ) содержат ограничения на значения управления и фазовых координат. Причем данные ограничения, как правило, являются составными частями сложных нелинейных элементов, таких как люфт, гистерезис, зона нечувствительности, трехпозиционное реле с гистерезисом и т.д. За последние несколько десятилетий достигнуты выдающиеся успехи как в анализе свойств САУ с учетом ограничений, так и в синтезе управлений, обеспечивающих наилучшее из всех возможных приближение к заданным показателям качества [3]. В основном полученные управления формируют кусочно-непрерывные функции времени, что является их главной особенностью. При решении многих задач в таких областях, как управление космическими летательными аппаратами, робототехническими комплексами и ряде других, применение данных методов дает положительные результаты.

Существует много задач, в которых управление, цель которого – перевод системы из одной точки фазового пространства в другую точку (или ее окрестность) за конечное время в соответствии с заданным критерием качества, является только первой их частью. Вторая часть заключается в удерживании системы в достигнутой точке (или в ее достаточно малой окрестности) сколь угодно долго. Объединяя две эти части, получим полную задачу управления (или задачу регулирования). Если кусочно-непрерывное управление синтезировано как функция фазовых координат, то оно решает не только первую, но и вторую часть данной задачи, но при этом фор-

мируемые управлением сигналы переходят из класса кусочно-непрерывных в класс только измеримых функций времени. Это означает, что исполнительные устройства системы должны в идеальном случае переключаться за бесконечно малое время. На практике это приводит к необходимости переключения исполнительных устройств с конечной, но весьма высокой частотой, что неизбежно приводит к вибрациям.

Сходные результаты могут быть получены при выполнении первой части задачи регулирования, если САУ имеет описание в виде системы дифференциальных уравнений с невыпуклой правой частью. В перечисленных выше областях приложений данных управлений существует ряд систем, в которых вибрации технически допустимы в течение достаточно длительного времени.

В данном пособии большое внимание уделяется существенно нелинейным системам, в которых вибрации недопустимы по соображениям безопасности, надежности и технической реализуемости САУ. Одним из наиболее характерных примеров из данного класса являются авиационные системы.

Если с целью устранения высокочастотных колебаний вместо релейных элементов в закон управления вводятся элементы типа «ограничение» (с уровнем ограничения равным уровню переключения реле), то вместо вибраций возникают нелинейные колебания более низкой частоты, но с большей амплитудой. Кроме того, в этом случае существенно возрастает влияние других нелинейных элементов САУ на параметры колебательных режимов.

Следовательно, если в существенно нелинейной САУ недопустимо использование разрывных законов управления, то применение непрерывных законов управления, являющихся элементами последовательности, построенной указанным выше способом, стремящейся к кусочно-непрерывному управлению, приводит к автоколебаниям. С другой стороны, сохранение адекватности реальной системы линеаризованной модели невозможно без неприемлемого снижения показателей качества.

Проблемы, присущие существенно нелинейным системам, требуют решения ряда взаимосвязанных задач:

- разработка методов анализа устойчивости существенно нелинейных систем в частотной области, с целью их адаптации к многоконтурным системам с большим числом нелинейностей;

- разработка алгоритмов синтеза нелинейных непрерывных законов управления, обеспечивающих асимптотическую устойчивость нелинейных САУ и основанных на результатах анализа систем частотными методами;

- исследование влияния синтезированных законов управления на качество САУ и определение методов улучшения с их помощью показателей качества;

- обоснование устойчивости указанных систем к воздействию помех.

Решение указанных задач синтеза подразумевает предварительное решение задач анализа, рассматриваемых в настоящем пособии.

В первой главе рассматривается математическое описание нелинейных САУ в виде обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-линейной правой частью, приводится методика аналитического описания кусочно-линейных функций и модели типовых нелинейных элементов.

Вторая глава целиком посвящена методу гармонической линеаризации (МГЛ). Рассматриваются условия применимости метода, особенности его применения при расчете несимметричных колебаний, повышение точности метода с использованием старших гармоник.

В третьей главе описывается метод статистической линеаризации. Рассматриваются особенности статистической линеаризации нелинейностей, в том числе кусочно-линейных функций. Описывается преобразование статистических характеристик процесса линейной частью и их вычисление в замкнутой нелинейной системе.

Четвертая глава посвящена применению обобщенного метода гармонической линеаризации к исследованию устойчивости нелинейных САУ «в целом». Рассматривается в наиболее приемлемом для прикладных задач методика учета высших гармоник нелинейных колебаний в системах управления. Предлагается конструктивный способ оценки точности МГЛ.

В пятой главе приводятся примеры нестандартного применения МГЛ: модификация МГЛ, позволяющая определить параметры колебаний при неравномерной сходимости ряда Фурье; метод экспоненциальной линеаризации, позволяющий оценить показатели

качества переходного процесса, и пример расчета скачков в процессах вынужденных нелинейных колебаний.

Гл. 1, 2 и разд. 5.2, 5.3 написаны С.В. Ктитровым, гл. 3, 4 и разд. 5.1 -- Ю.Ю. Шумиловым, разд. 5.4 написан авторами совместно.

Глава 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Описание нелинейных динамических систем, разделимых на линейные и нелинейные подсистемы

Значительная часть объектов управления принадлежит классу нелинейных стационарных систем с сосредоточенными параметрами, которые могут быть описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)); \\ \bar{y}(t) = \bar{g}(\bar{x}(t), \bar{u}(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

где \bar{x} – переменные состояния; \bar{y} – выходные переменные, \bar{u} – управляющие (входные) переменные, или задающее воздействие; \bar{f} и \bar{g} – нелинейные функции.

Использование представления нелинейной САУ в виде (1.1) в большинстве случаев приводит к расширению класса, в котором рассматривается система, что существенно ограничивает класс методов, которые возможно применить для анализа системы. Как правило, описание (1.1) полной системы получено в результате объединения моделей её подсистем, что приводит к естественной декомпозиции полной модели. Для облегчения анализа модели подсистем, как правило, линеаризуются или формируются как линейные. Однако для существенно нелинейных систем такой подход оказывается неприменим.

Определение 1.1. *Существенно нелинейной непрерывной системой с сосредоточенными параметрами будем называть систему, описываемую нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, при линеаризации правых частей которых в окрестности исследуемого решения путем перехода к первому приближению рядом Тейлора всех нелинейных функций переменных состояния, полученная линейная система имеет решения, принадлежащие другому классу функций, чем решения исходной нелинейной системы.*

Например, решение нелинейной системы имеет вид незатухающих колебаний, а решение линеаризованной системы либо не огра-

ничено, либо имеет конечный предел. К этому же классу следует отнести и системы, которые не могут быть линеаризованы указанным способом в окрестности исследуемого режима.

Дальнейшая декомпозиция существенно нелинейной системы (подсистемы), как правило, позволяет выделить один или более нелинейный элемент (звено), исключение которого выводит систему из класса существенно нелинейных. В большинстве технических систем, а именно такие системы являются предметом анализа теории автоматического управления, такой элемент может быть описан статической нелинейной функцией, как правило, имеющей либо разрывы первого рода, либо недифференцируемой, либо то и другое одновременно. Таким образом, будем считать, что рассматриваемые системы можно разделить на совокупность подсистем (звеньев), принадлежащих либо классу линейных (описываемых линейными дифференциальными уравнениями), либо нелинейных, описываемых статическими нелинейными функциями. При этом дифференциальные уравнения будем относить к линейным подсистемам, а нелинейные функции, имеющиеся в правых частях, будут образовывать нелинейные подсистемы, если их линеаризация приводит к существенному изменению свойств полной системы. Сформулируем вышесказанное в следующих определениях.

Определение 1.2. *Линейным звеном будем называть подсистему, которая описывается системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Определение 1.3. *Статическим нелинейным звеном назовем подсистему, описываемую нелинейной функцией, значение которой полностью определяется её аргументами и не содержит в своем описании дифференциальных уравнений (операторов дифференцирования).*

Определение 1.4. *Систему вида (1.1), которую можно описать совокупностью линейных и статических нелинейных звеньев, назовем системой, делимой на линейные и нелинейные подсистемы (звенья).*

Каноническое описание линейной стационарной системы в пространстве состояний следующее:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{u}(t); \\ \vec{y}(t) = C\vec{x}(t) + D\vec{u}(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

где A, B, C, D – матрицы соответствующих размерностей; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}$ имеют тот же смысл, что и для (1.1).

Чаще всего встречаются нелинейности, описание которых представляет собой скалярную нелинейную функцию одного аргумента

$$y = F(x). \quad (1.3)$$

В особый класс выделяют так называемые «двузначные нелинейности» (далее будем использовать это название без кавычек). Скалярная двузначная нелинейность может быть задана формулой

$$y = F(x, \dot{x}). \quad (1.4)$$

Двузначная нелинейность представляет собой объединение двух функций вида (1.4), называемых ветвями, одна из которых $F^+(x)$ выбирается при положительном значении второго аргумента, другая $F^-(x)$ – при отрицательном. При $\dot{x} = 0$ можно принять

$$F(x, 0) = (F^-(x) + F^+(x)) / 2, \quad (1.5)$$

но из физического смысла следует сохранить значение, соответствующее той ветви, которая выбиралась до обращения производной в нуль, что приводит к необходимости дополнительно к (1.4) указания начальных условий для x и \dot{x} . Другой способ, позволяющий избежать неоднозначности, – отнесение состояния нулевой производной к одной из ветвей, например соответствующей положительному \dot{x} , но, как и при использовании (1.5), такой подход может привести к разрывам первого рода. На практике двузначные нелинейности используются в качестве моделей нелинейных элементов, входные сигналы которых таковы, что смена ветви нелинейности происходит при x , таких, что $F^-(x) = F^+(x)$ и неоднозначности не возникает, а применение (1.5) не приводит к разрывам в выходном сигнале. Таким образом, выражение (1.4) следует рассматривать как функцию двух переменных, причем выполняется

$$F(x, \dot{x}) = F(x, \text{sgn}(\dot{x})).$$

Дадим определения описанным нелинейным элементам.

Определение 1.5. *Однозначной скалярной нелинейностью назовем элемент системы управления, который может быть задан нелинейной функцией вида (1.3).*

Определение 1.6. Двухзначной скалярной нелинейностью будем называть элемент системы управления, который может быть задан функцией вида (1.4) следующим образом:

$$F(x, \dot{x}) = \begin{cases} F^-(x), & \dot{x} < 0; \\ F^+(x), & \dot{x} > 0; \\ (F^-(x) + F^+(x))/2, & \dot{x} = 0. \end{cases}$$

Обобщение одно- и двухзначных нелинейностей на случай векторных аргументов и значений функций предоставляется читателю в качестве упражнения.

Рассмотрим наиболее распространенный случай последовательного соединения звеньев. Входом и выходом звеньев являются скаляры, в этом случае система (1.2) приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t); \\ y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t). \end{cases} \quad (1.6)$$

Подставив вместо $u(t)$ переменную, обозначающую выход нелинейного звена, получим пару «нелинейность – линейное звено». Пусть последовательно соединено несколько таких пар. Каждая такая пара может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} z_i = F_i(u_i); \\ \dot{\bar{x}}_i = A_i\bar{x}_i + B_iz_i; \\ y_i = C_i\bar{x}_i + D_iz_i, \end{cases} \quad (1.7)$$

при этом $u_{i+1} = y_i$. В том случае, если нелинейность в паре двухзначная, производную входной переменной часто удается представить через переменные состояния линейной части предшествующей пары. Существенное упрощение уравнений в том случае может быть получено за счет выбора базиса переменных состояния. Более детально методика описания как линейных, так и нелинейных звеньев представлена в следующих разделах.

1.2. Представление линейной части системы в пространстве состояний

Применение частотных методов анализа и синтеза в линейной теории систем управления привело к широкому распространению передаточных функций для описания линейных систем. Рассмотрим связь передаточных функций с представлением системы в пространстве состояний.

Прежде всего получим передаточную функцию для системы (1.6). Возьмем преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$\begin{cases} s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + BU(s); \\ Y(s) = C\bar{X}(s) + DU(s) \end{cases}$$

и найдем отношение изображений выхода и входа, исключив переменные состояния

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sE - A)^{-1}B + D, \quad (1.8)$$

где E – единичная матрица. Уравнения (1.6) могут быть также записаны с использованием оператора дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$:

$$\begin{cases} p\bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t); \\ y(t) = C\bar{x}(t) + Du(t). \end{cases}$$

Замена дифференцирования переменной (в данном случае векторной) умножением ее на оператор p формально приводит дифференциальные уравнения к алгебраическим. Такая форма записи уравнений системы с точностью до обозначения переменной (s в преобразовании Лапласа, p в операторной форме) совпадает с преобразованием Лапласа исходной системы. По аналогии с (1.8) легко получить дифференциальное уравнение высокого порядка, соответствующее системе (1.6):

$$y(t) = [C(pE - A)^{-1}B + D]u(t), \quad (1.9)$$

которое после упрощения может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n)y(t) = \\ = (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n)u(t). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Определение 1.7. *Запись линейного звена в форме вход-выход с использованием оператора дифференцирования p назовем представлением линейного звена в операторной форме.*

Заметим, что операторная форма представления (1.9), хотя формально и совпадает с передаточной функцией (1.8), может быть использована при описании нелинейных систем, что исключает проблемы с начальными условиями и обоснованием применимости преобразования Лапласа. Учитывая совпадение (1.8) и (1.9) с точностью до коэффициентов, оператор линейного звена так же, как и передаточную функцию, будем обозначать $W(p)$.

Теперь рассмотрим обратную задачу: формирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в форме Коши (1.6) по заданной передаточной функции (или операторному представлению). Если прямая задача имеет однозначное решение, то рассматриваемая обратная однозначно решена быть не может: для представления в виде (1.6) требуется выбрать переменные состояния (исключенные при получении передаточной функции). Вообще говоря, передаточная функция вида

$$W(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (1.11)$$

задает бесконечно много систем вида (1.6), переменные состояния и матрицы которых связаны невырожденным линейным преобразованием P :

$$\begin{aligned} \bar{\hat{x}} &= P\bar{x}; \\ A &= P^{-1}\hat{A}P; & B &= P^{-1}\hat{B}; \\ C &= \hat{C}P; & D &= \hat{D}, \end{aligned}$$

символом « $\hat{}$ » переменные и матрицы в другом базисе. Несмотря на эквивалентность таких систем с математической точки зрения, следует подчеркнуть, что от выбора переменных состояния зависит структура линейной части, определяемая ненулевыми элементами в матрицах A , B , C и D , и, как следствие, вычислительная сложность при анализе или численном моделировании системы.

Итак, пусть дана передаточная функция (1.11). Сначала решим более простую задачу: построим систему уравнений для передаточной функции

$$W_1(s) = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (1.12)$$

Запишем систему, заданную (1.12), в форме (1.10):

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n)y(t) = u(t) \quad (1.13)$$

и введем переменные состояния следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = y_1; \\ x_2 = px_1 = py_1; \\ x_3 = px_2 = p^2 y_1; \\ \dots \\ x_n = px_{n-1} = p^{n-1} y_1. \end{cases} \quad (1.14)$$

Система (1.14) задает $n - 1$ дифференциальных уравнений. Последнее дифференциальное уравнение для переменной x_n получим из (1.13), учитывая, что $px_n = p^n y_1$:

$$px_n = u(t) - a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n. \quad (1.15)$$

Объединяя (1.14) и (1.15), для (1.12) получаем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n; \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \dots - a_1 x_n + u(t). \end{cases} \quad (1.16)$$

Уравнение выхода: $y_1 = x_1$.

Теперь вернемся к (1.8). Выразим (1.11) через (1.12) и перейдем к операторной форме:

$$W(s) = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n) W_1(s);$$

$$Y(s) = (b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n) Y_1(s);$$

$$y(t) = (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n) y_1(t),$$

где $y(t)$, $Y(s)$ – выход системы (1.11) и его изображение, а $y_1(t)$, $Y_1(s)$ – выход и изображение выхода системы (1.12), для которой была получена система в пространстве состояний (1.16). Отметим, что из (1.14) легко выразить производные $y_1(t)$ вплоть до порядка

n . В итоге получаем, что система дифференциальных уравнений (1.16), полученная для (1.12), остается той же и для (1.11), а уравнение выхода системы (1.11) имеет вид:

$$y(t) = (b_n - a_n b_0)x_1(t) + (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)x_2(t) + \dots + (b_1 - a_1 b_0)x_n(t) + b_0 u(t). \quad (1.17)$$

Если порядок числителя передаточной функции хотя бы на единицу меньше порядка знаменателя, то (1.17) упрощается [4, 5]:

$$y(t) = b_n x_1(t) - b_{n-1} x_2(t) - \dots - b_1 x_n(t). \quad (1.18)$$

Как видно из уравнений (1.17), (1.18), выходная переменная системы, числитель передаточной функции которой не является константой, зависит более чем от одной переменной состояния, что требует при формировании системы уравнений введения дополнительного алгебраического уравнения (1.17). Если выход линейной части системы используется как вход нелинейной части, правая часть (1.17) станет аргументом нелинейности, что не всегда удобно при исследовании системы, особенно если нелинейность двузначная.

Поставим задачу такого выбора переменных состояния системы ОДУ, чтобы выходная переменная зависела только от одной фазовой переменной. Пусть линейная часть системы задана передаточной функцией (1.11). Тогда

$$\begin{aligned} Y(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) &= \\ &= U(b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n), \end{aligned}$$

или в операторной форме

$$\begin{aligned} (p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y &= \\ &= (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_{n-1} p + b_n) u. \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые при равных степенях p :

$$\begin{aligned} (y - b_0 u) p^n + (a_1 y - b_1 u) p^{n-1} + \dots + (a_{n-1} y - b_{n-1} u) p + \\ + (a_n y - b_n u) = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Обозначим множитель при старшей степени p через $x_1 = y - b_0 u$, откуда получаем уравнение выхода, в котором выходная переменная выражается только через одну переменную состояния

$$y = x_1 + b_0 u. \quad (1.20)$$

Подставим (1.20) в (1.19):

$$\begin{aligned} & x_1 p^n + (a_1 x_1 - (b_1 - a_1 b_0)u) p^{n-1} + \dots + \\ & + (a_{n-1} x_1 - (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)u) p + (a_n p_1 - (b_n - a_n b_0)u) = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Понизим порядок уравнения, обозначив

$$x_2 = p x_1 + a_1 x_1 - (b_1 - a_1 b_0)u, \quad (1.22)$$

затем, выразив $p x_1$ из (1.22), подставим в (1.21). Продолжим вводить новые переменные состояния аналогично (1.22), понижая порядок полученных уравнений. На k -м шаге новой переменной состояния x_k заменим все коэффициенты при p^{n-k+1} . На последних шагах:

$$\begin{aligned} & (x_{n-1} p + a_{n-1} x_1 - (b_{n-1} - a_{n-1} b_0)u) p - (b_n - a_n b_0)u = 0; \\ & p x_n = -a_n x_1 + (b_n - a_n b_0)x. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Объединяя выражения для переменных состояния из (1.20)–(1.23), получаем итоговую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 + (b_1 - b_0 a_1)u; \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 + x_3 + (b_2 - b_0 a_2)u; \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = -a_{n-1} x_1 + x_n + (b_{n-1} - b_0 a_{n-1})u; \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 + (b_n - b_0 a_n)u, \end{cases} \quad (1.24)$$

выходная переменная выражается (1.20).

Если порядок числителя меньше порядка знаменателя, выходная переменная выражается только одной переменной состояния, так как $b_0 = 0$: $y = x_1$. Алгебраическое уравнение, аналогичное (1.18), тривиально, а потому избыточно, переменная состояния x_1 может быть использована в качестве входа следующего звена, например нелинейности, непосредственно. Дифференциальные уравнения самой системы также упрощаются:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_1 x_1 + x_2 + b_1 u; \\ \dot{x}_2 = -a_2 x_1 + x_3 + b_2 u; \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} = -a_{n-1} x_1 + x_n + b_{n-1} u; \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 + b_n u. \end{cases} \quad (1.25)$$

Простота выражения выходной переменной дополняется довольно простым выражением и для ее производной – это правая часть первого уравнения системы (1.25). Таким образом, представление (1.22) не столько упрощает уравнения по сравнению с (1.16), (1.19) для задач моделирования, сколько может быть полезно для аналитических исследований (входная переменная u присутствует в каждом уравнении (1.22) и может потребоваться дополнительное алгебраическое уравнение для упрощения записи). Приведение (1.16), (1.17) и (1.20), (1.24) к виду (1.6), т. е. получение соответствующих матриц, как и структурных схем, предоставляется читателю в качестве упражнения.

На практике в большинстве случаев систему, заданную произведением или суммой типовых элементарных звеньев, не следует приводить к виду (1.11). Изменение любого параметра линейной части, например постоянной времени, потребует пересчета всех коэффициентов в (1.11), а уж восстановить по дифференциальным уравнениям постоянные времени элементарных звеньев в этом случае и вовсе не представляется возможным. Рекомендуются при суммировании передаточных функций каждое слагаемое описывать своей системой дифференциальных уравнений, а затем суммировать их выходы. Произведение заменяется последовательным соединением, причем звенья числителя при составлении уравнений следует объединять со звеньями знаменателя, имеющими такой же или более высокий порядок.

1.3. Кусочно-линейное описание нелинейных статических элементов

Для описания нелинейных статических элементов в системах автоматического управления часто используют кусочно-линейные функции (КЛФ). Такое описание обладает рядом преимуществ. Так, возможно применение хорошо развитых линейных методов анализа, например метода припасовывания. Кусочно-линейное представление часто применяется при интерполяции экспериментальных данных. Использование КЛФ позволяет задавать нелинейности, имеющие разрывы первого рода.

Определение 1.8. *Кусочно-линейной функцией называют функцию, область определения которой является объединением отрезков, на каждом из которых она линейна.*

Рассмотрим описание КЛФ одной переменной. КЛФ задается на объединении сегментов, на каждом из которых КЛФ линейна (рис. 1.1). Будем называть границы сегментов x_i узлами КЛФ (пусть, для определенности, число узлов равно N). Перенумеруем их последовательно слева направо: $x_1 < x_2 < \dots < x_N$. Аналогично перенумеруем сегменты (N узлов задают $N + 1$ сегмент), начиная с нуля. Тогда i -й узел будет разделять сегменты с номерами $i - 1$ и i . Соответственно, угловой коэффициент наклона КЛФ на j -м сегменте обозначим k_j .

Один из способов описания КЛФ состоит в её описании линейной функцией на каждом сегменте:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_0 + k_0 x, & x < x_1; \\ \alpha_1 + k_1 x, & x_1 < x < x_2; \\ \dots & \\ \alpha_i + k_i x, & x_i < x < x_{i+1}; \\ \dots & \\ \alpha_N + k_N x, & x_N < x; \\ \frac{\alpha_{i-1} + k_{i-1} x_i + \alpha_i + k_i x_i}{2}, & x = x_i. \end{cases} \quad (1.26)$$

КЛФ с разрывами 1-го рода может быть задана по-разному в узле, имеющим разрыв. Значение функции может быть задано либо равным левому или правому пределу функции в узле, либо, как в (1.26), равным полусумме пределов. Последнее описание выбрано потому, что обеспечивает выполнение условий Дирихле, необходимых при разложении значения функции в ряд Фурье (предполагаем, что аргумент КЛФ непрерывная функция, хотя бы в окрестности точки разрыва КЛФ). Представление (1.26) при большом N не наглядно, трудоемко и усложняет проведение аналитических расчетов в системах с КЛФ, заданных в форме (1.26). КЛФ можно также записать с использованием единого аналитического выражения. Покажем, как это сделать.

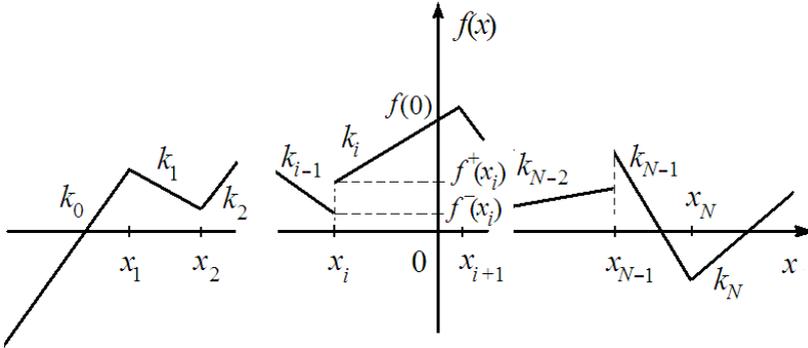


Рис. 1.1. КЛФ, имеющая N узлов

Любая КЛФ, в том числе имеющая разрывы первого рода, может быть описана формулой следующего вида [6]:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \sum_{j=1}^N \{b_j|x - x_j| + c_j \operatorname{sgn}(x - x_j)\}. \quad (1.27)$$

Покажем, как на основе описания (1.26) можно получить (1.27). Введем элементарную КЛФ, которую зададим следующим образом:

$$f_E(x) = \frac{x + |x|}{2}. \quad (1.28)$$

График этой функции представлен на рис. 1.2. Пусть $g(x)$ – некоторая КЛФ. Тогда, для любого $\tilde{x} > x_M$, x_M – узел $g(x)$, M – число узлов $g(x)$, т.е. \tilde{x} больше любого узла $g(x)$, функция

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \tilde{k}f_E(x - \tilde{x})$$

задает КЛФ, имеющую $(M + 1)$ -й дополнительный узел в точке \tilde{x} , причем $\tilde{g}(x) = g(x)$ для всех $x < \tilde{x}$, \tilde{k} – коэффициент. Пусть дополнительно, функция \tilde{g} претерпевает разрыв величины δ в точке \tilde{x} . Для конструирования разрывов первого рода исполь-

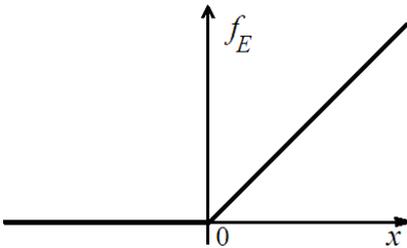


Рис. 1.2. График элементарной КЛФ

зуюм функцию

$$f_B(x) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(x)), \quad (1.29)$$

которую умножим на величину разрыва. Тогда выражение для \tilde{g} примет вид

$$\tilde{g}(x) = g(x) + \tilde{k} f_E(x - \tilde{x}) + \delta f_B(x - \tilde{x}).$$

Построим, по аналогии, КЛФ с N узлами, последовательно добавляя узлы слева направо. Обозначим через $f_i(x)$ КЛФ, к которой добавлено i первых узлов. Тогда

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \alpha_0 + k_0 x; \\ f_i(x) &= f_{i-1}(x) + (k_i - k_{i-1}) f_E(x - x_i) + \\ &\quad + f_B(x - x_i) (f^+(x_i) - f^-(x_i)), \end{aligned} \quad (1.30)$$

где $f^+(x_i)$ и $f^-(x_i)$ – пределы КЛФ справа и слева в точке x_i соответственно. По построению искомой КЛФ будет $f_N(x)$. Подставим (1.28) и (1.29) в (1.30):

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_{i-1}(x) + \frac{k_i - k_{i-1}}{2} x + \frac{k_i - k_{i-1}}{2} |x - x_i| - \frac{k_i - k_{i-1}}{2} x_i + \\ &\quad + \frac{1}{2} (f^+(x_i) - f^-(x_i)) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - x_i) (f^+(x_i) - f^-(x_i)). \end{aligned}$$

При $i = N$

$$\begin{aligned} f(x) = f_N(x) &= \alpha_0 + k_0 x + \sum_{i=1}^N \frac{k_i - k_{i-1}}{2} x + \sum_{i=1}^N \frac{k_i - k_{i-1}}{2} |x - x_i| + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} (f^+(x_i) - f^-(x_i)) \operatorname{sgn}(x - x_i) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [(f^+(x_i) - f^-(x_i)) - (k_i - k_{i-1}) x_i]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Обозначив

$$a_0 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} [(f^+(x_i) - f^-(x_i)) - (k_i - k_{i-1}) x_i]; \quad (1.32)$$

$$a_1 = k_0 + \sum_{i=1}^N \frac{k_i - k_{i-1}}{2} = \frac{k_0 + k_N}{2}; \quad (1.33)$$

$$b_i = \frac{k_i - k_{i-1}}{2}; \quad (1.34)$$

$$c_i = \frac{1}{2}(f^+(x_i) - f^-(x_i)), \quad (1.35)$$

из (1.31) получаем аналитическое представление КЛФ (1.27), причем значения коэффициентов в выражении (1.27) определяются (1.31)–(1.35). Если известно значение КЛФ в нуле, вместо выражения (1.32) удобнее использовать следующее:

$$a_0 = f(0) - \sum_{i=1}^N [b_i |x_i| + c_i \operatorname{sgn}(x_i)], \quad (1.36)$$

полученное из (1.27) при $x = 0$. Если КЛФ непрерывна в узле x_i , то $c_i = 0$.

Теперь рассмотрим, как могут быть описаны с использованием единой аналитической формулы двузначные нелинейности. Обозначим через $F^+(x)$ функцию, соответствующую возрастающему x , а через $F^-(x)$ – функцию, описывающую выход нелинейности при $\dot{x} < 0$. Тогда

$$F(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} \dot{x})F^+(x) + \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} \dot{x})F^-(x), \quad (1.37)$$

или

$$F(x, \dot{x}) = \frac{F^+(x) + F^-(x)}{2} + \frac{F^+(x) - F^-(x)}{2} \operatorname{sgn} \dot{x}.$$

Заметим, что при объединении ветвей на основе (1.37) значение функции при $\dot{x} = 0$ равно (1.5).

Определение 1.9. *Двузначной КЛФ будем называть двузначную функцию, обе ветви которой – КЛФ.*

Двузначная КЛФ, таким образом, может быть задана единым аналитическим выражением с использованием (1.27) и (1.37).

1.4. Модели типовых нелинейностей систем управления

В качестве примера применения (1.27) – (1.37) опишем некоторые типовые нелинейности, часто используемые при создании математических моделей систем автоматического управления [6].

Нелинейный элемент «ограничение», или «насыщение», изображен на рис. 1.3. Элемент характеризует ограничение хода механических элементов, ограниченные мощности источников энергии, может использоваться для формирования характеристик датчиков с учетом диапазона измерений. Нелинейность имеет описание

$$F(x) = k \frac{1}{2} (|x + x_1| - |x - x_1|). \quad (1.38)$$

Характеристика типа «зона нечувствительности» (рис. 1.4) задается формулой

$$F(x) = k \left[x + \frac{1}{2} (|x - x_1| - |x + x_1|) \right]$$

и может определяться перекрытиями в пневматических и гидравлических золотниках, предварительной затяжкой пружин, сухим трением в подвижных частях, зазорами в шарнирных и зубчатых соединениях или между контактами электрического устройства.

При малых сигналах нелинейный элемент «ограничение с зоной нечувствительности» (рис. 1.5) подобен зоне нечувствительности, а при больших – ограничению. Его описание:

$$F(x) = k \frac{1}{2} (|x - x_1| - |x + x_1| + |x + x_2| - |x - x_2|).$$

В пневматических сервоусилителях, реактивных приводах, потенциометрических схемах обычно встречаются звенья, которые могут быть описаны нелинейностями «реле» и «трехпозиционное реле». Графики нелинейностей изображены на рис. 1.6, 1.7, а их

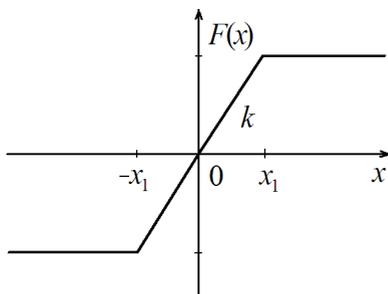


Рис. 1.3. Нелинейность типа «ограничение»

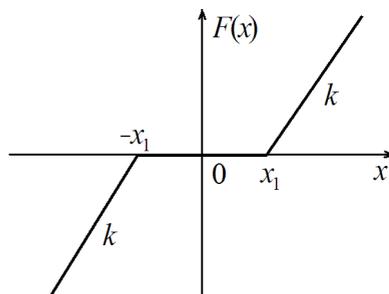


Рис. 1.4. Нелинейность типа «зона нечувствительности»

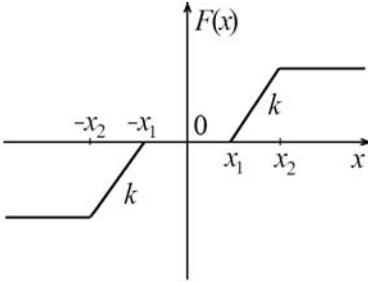


Рис.1.5. Нелинейность типа «ограничение с зоной нечувствительности»

аналитическое описание соответственно:

$$F(x) = \rho \operatorname{sgn}(x);$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \rho (\operatorname{sgn}(x + x_1) + \operatorname{sgn}(x - x_1)).$$

Обычно для простоты разрывы первого рода в нелинейностях соединяют не пунктирной, как на приведенных рисунках, а сплошной линией.

Наличие зазоров (люфтов) в механических системах, учет сухого трения приводит к необходимости использования двузначных нелинейностей. На рис. 1.8 изображено реле с гистерезисом. При изображении двузначных нелинейностей на графике совмещают обе ветви, а соответствие ветви знаку \dot{x} указывается стрелкой в направлении изменения x . Такая нелинейность описывается достаточно просто:

$$F(x, \dot{x}) = \rho \operatorname{sgn}(x - x_1 \operatorname{sgn} \dot{x}).$$

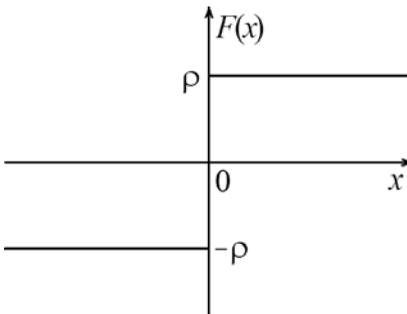


Рис.1.6. Нелинейность типа «реле»

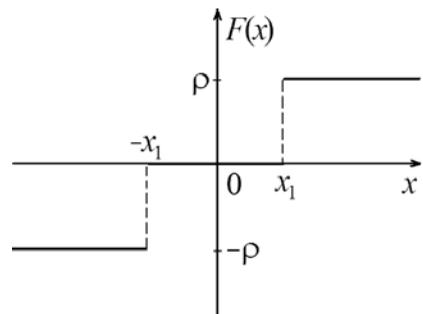


Рис.1.7. Нелинейность типа «трехпозиционное реле»

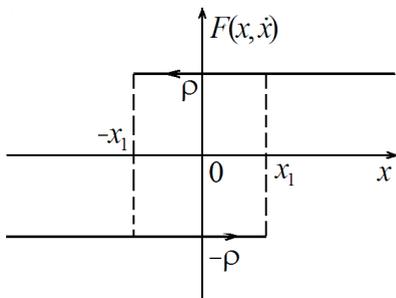


Рис.1.8. Нелинейность типа «реле с гистерезисом»

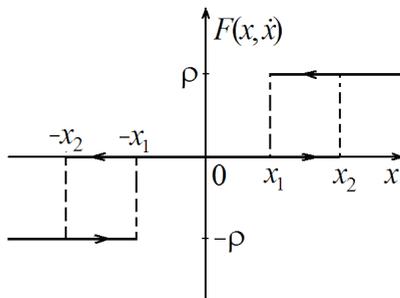


Рис.1.9. Нелинейность типа «трехпозиционное реле с гистерезисом»

Трехпозиционное реле с гистерезисом представлено на рис.1.9 и задается выражением

$$F(x, \dot{x}) = \frac{\rho}{2} (\text{sgn}(x + x_1 + \Delta x(1 + \text{sgn} \dot{x})) + \text{sgn}(x - x_1 - \Delta x(1 - \text{sgn} \dot{x}))), \quad \Delta x = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

Особое место занимает нелинейности типа «люфт», описывающая зазоры в механических передачах. Многие двучленные нелинейности являются упрощенными моделями люфта, так как для адекватного его описания требуется учитывать его состояние в предшествующий момент времени. Его изображение (рис.1.10) представляет собой бесконечное множество замкнутых кривых. Каждая такая кривая (параллелограмм) получается построением траектории точки $z = (x, F(x, \dot{x}))$ при циклическом изменении x , с амплитудой, превышающей x_1 . Особо отметим, что изменения x в границах люфта (между наклонными прямыми с учетом предыдущего выходного значения) не приведут к изменению значения выхода нелинейности. Запишем аналитическое описание люфта для периодического входного сигнала с постоянной амплитудой A и монотонным достижением максимумов и минимумов:

$$F(x, \dot{x}) = k(1 - \text{sgn} \dot{x}) - \frac{k}{4} \left[|x + (A - 2x_1)| - (x + (A - 2x_1)) \right] (1 + \text{sgn} \dot{x}) -$$

$$-\frac{k}{4} [|x - (A - 2x_1)| + (x - (A - 2x_1))] (1 - \operatorname{sgn} \dot{x}). \quad (1.39)$$

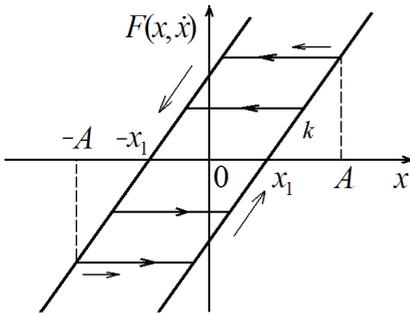


Рис. 1.10. Нелинейность типа «люфт»

этой нелинейности приведен на рис. 1.11. Такая нелинейность может быть описана формулой

$$F(x, \dot{x}) = \frac{k}{2} \operatorname{sgn} \dot{x} \{ |x + (x_2 - 2x_1) \operatorname{sgn} \dot{x}| - |x - x_2 \operatorname{sgn} \dot{x}| \},$$

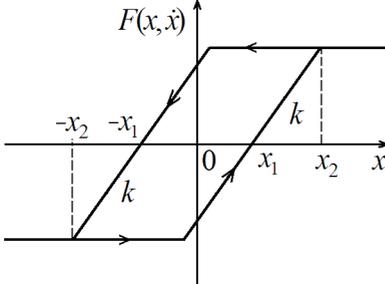


Рис. 1.11. Нелинейность типа «гистерезис»

Описание справедливо, в частности, для $x = A \sin \omega t$. На рис.1.10 отмечены амплитуда сигнала A , толстыми стрелками перемещение пары $(x, F(x, \dot{x}))$ и, тонкими стрелками, направление обхода (против часовой стрелки).

Существенно более простой моделью люфта с ограничением является двузначная нелинейность типа «гистерезис». График

этой нелинейности приведен на рис. 1.11. Такая нелинейность может быть описана формулой

которая получена с использованием (1.38) и отличается по структуре от (1.27), (1.37), при использовании которых получается более громоздкое выражение. Данная модель будет справедлива для сигналов с амплитудой, большей x_2 , и монотонным достижением максимумов и минимумов, как и для (1.39).

1.5. Примеры описания нелинейных систем управления

Приведем примеры применения описанных в данной главе способов описания нелинейных САУ, разделимых на линейные и нелинейные подсистемы.

Пример 1.1. Замкнутая система с одной нелинейностью. Структурная схема системы приведена на рис. 1.12. Нелинейность – ограничение (см. рис. 1.3), $k = 2$, $x_1 = 0,4$, линейная часть задана передаточной функцией

$$W(s) = \frac{5}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}, \quad u - \text{входной сигнал.}$$

Запишем систему уравнений в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 5x_2; \\ \dot{x}_2 = (x_3 - x_2)/T_1; \\ \dot{x}_3 = (|u - x_1 + 0,4| - |u - x_1 - 0,4| - x_3)/T_2. \end{cases}$$

При составлении дифференциальных уравнений линейная часть рассматривалась как последовательное соединение звеньев первого порядка.

Пример 1.2. Структурная схема системы приведена на рис. 1.12, линейная часть задана передаточной функцией

$$W(s) = \frac{T_1s + 1}{T_2^2s^2 + 2T_2\xi s + 1}, \quad \text{нелинейность – реле (см. рис. 1.6), пара-}$$

метр $\rho = 7$. Используя (1.16), (1.18), запишем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2^2}(x_1 + 2T_2\xi x_2 - 7 \operatorname{sgn}(u - x_1 - T_1x_2)). \end{cases}$$

Используя (1.25), получаем такую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{T_2^2}(2T_2\xi x_1 - T_1 \cdot 7 \operatorname{sgn}(u - x_1)) + x_2; \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_2^2}(x_1 - 7 \operatorname{sgn}(u - x_1)). \end{cases}$$

Пример 1.3. Структурная схема системы приведена на рис. 1.13: последовательно соединены нелинейные и линейные подсистемы.

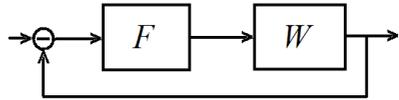


Рис. 1.12. Нелинейная система автоматического управления

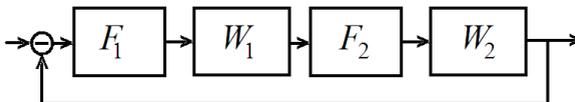


Рис. 1.13. Нелинейная САУ, разделённая на линейные и нелинейные подсистемы

Передаточные функции линейных частей $W_1 = \frac{(T_{11}s + 1)(T_{13}s + 1)}{s(T_{12}s + 1)}$,

$W_2 = \frac{K}{T_{22}^2 s^2 + 2T_{22}\xi_2 s + 1}$, нелинейности F_1 – гистерезис (см. рис.

1.11), F_2 – ограничение с зоной нечувствительности (см. рис. 1.5). Параметры нелинейностей приведены в табл. 1.1. Входной сигнал отсутствует: $u = 0$.

Таблица 1.1

Параметры нелинейностей для примера 1.3

Нелинейность	k	x_1	x_2
F_1	4	0,2	0,4
F_2	1	0,1	5

При формировании уравнений для первой линейной части будем рассматривать первую линейную часть как последовательно соединенные элементарные звенья, причем звенья числителя сгруппированы со звеньями знаменателя (см. разд. 1.2).

Получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = z_1; \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{T_{12}}(z_2 - x_2); \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{T_{22}}(Kz_4 - 2\xi x_3 - x_4); \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{T_{22}}x_3, \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} z_1 = -2 \operatorname{sgn} \frac{x_3}{T_{22}} \left\{ |x_4| - \left| x_4 + 0,4 \operatorname{sgn} \frac{x_3}{T_{22}} \right| \right\}; \\ z_2 = x_1 + T_{11} z_1; \\ z_3 = x_2 + \frac{T_{13}}{T_{12}} (z_2 - x_2); \\ z_4 = \frac{1}{2} (|z_3 - 0,1| - |z_3 + 0,1| + |z_3 + 5| - |z_3 - 5|). \end{cases}$$

С целью облегчения понимания и упрощения записи использованы вспомогательные переменные z (в примере 1.2 подстановка привела к дублированию подвыражений в правой части дифференциальных уравнений). Обратите внимание, что уравнения для колебательного звена записаны в базисе, отличном от использованного в примере 1.2.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Запишите пару «нелинейный элемент – линейная система» в пространстве состояний в стандартной форме.
2. Запишите в матричной форме систему дифференциальных уравнений, описывающую две последовательно соединенные линейные подсистемы, охваченные единичной обратной связью, причем скалярный выход первой подсистемы подается на вход второй с запаздыванием τ_1 .
3. Модифицируйте уравнения, полученные в упражнении 2, добавив запаздывание τ_2 в обратную связь.
4. Как получить передаточную функцию линейной системы по ее дифференциальным уравнениям?
5. Можно ли, зная передаточную функцию, восстановить дифференциальные уравнения, описывающие систему? Если можно, то как? Если нельзя, то почему?
6. Является переход от представления линейной системы передаточной функцией к дифференциальными уравнениями однозначным? Однозначен ли обратный переход?

7. Как упрощается структура дифференциальных уравнений системы, порядок числителя передаточной функции которой меньше порядка ее знаменателя?

8. Запишите матрицы A , B , C , D , используемые в стандартном представлении в пространстве состояний, выразив их через коэффициенты передаточной функции, заданной отношением полиномов.

9. Единственно ли решение задачи из упражнения 8? Почему? Приведите несколько вариантов решения.

10. Запишите дифференциальные уравнения, описывающие систему, заданную передаточной функцией

$$W(s) = \frac{K(T_3s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}.$$

Как изменятся дифференциальные уравнения при охвате системы единичной отрицательной обратной связью?

11. Запишите дифференциальные уравнения для САУ, образованной нелинейностью типа «ограничение» и линейной подсистемой, заданной передаточной функцией

$$W(s) = K \frac{T_3^2 s^2 + 2T_3 \xi s + 1}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)},$$

которые соединены последовательно и охвачены единичной отрицательной обратной связью.

12. Назовите способы описания КЛФ.

13. Какой формулой можно описать КЛФ? Единственно ли такое описание?

14. Что такое «двузначная нелинейность»?

15. Как формулой описать двузначную КЛФ?

16. Назовите типовые нелинейности, описываемые однозначными КЛФ.

17. Назовите типовые нелинейности, описываемые двузначными КЛФ.

18. Можно ли описать нелинейность «люфт» КЛФ? Если можно – то как, если нет – почему?

19. Каким условиям должна удовлетворять КЛФ, чтобы в ее описании формулой те или иные коэффициенты равнялись бы нулю?

20. Запишите формулу непрерывной КЛФ, имеющей узлы в точках $x_1 = -4$ и $x_2 = 4$. $F(0) = 0$, угловые коэффициенты равны 1, -1, 1.

Глава 2. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

2.1. Гармоническая линеаризация нелинейных элементов

Среди процессов, характерных для нелинейных САУ особое место занимают автоколебания.

Определение 2.1. Автоколебаниями называют собственные устойчивые периодические колебания в нелинейной системе, характеристики которых не зависят от начальных условий и полностью определяются свойствами системы.

Несмотря на отсутствие зависимости параметров автоколебаний от начальных условий, в нелинейных системах возможно наличие множества областей с различными типами процессов в зависимости от локализации начальных условий. Это затрудняет выявление автоколебаний путем численного решения нелинейных дифференциальных уравнений (моделирования), которое требуется провести многократно, и делает востребованным аналитические методы, позволяющие определять наличие автоколебаний, исходя из свойств системы, а не при конкретных начальных условиях.

Одним из основных аналитических методов, позволяющих выявить автоколебания и вычислить их параметры, является метод гармонической линеаризации (МГЛ). Вначале изложим метод применительно к нелинейным системам стандартной структуры (нелинейным системам первого класса, согласно [8]).

Определение 2.2. Нелинейной САУ стандартной структуры назовем систему, структурная схема которой представлена на рис.2.1, где F – статическая одно- или двузначная нелинейность; W – произвольная физически реализуемая линейная часть.

К таким системам можно, в той или иной степени приближения, свести значительное число нелинейных САУ.

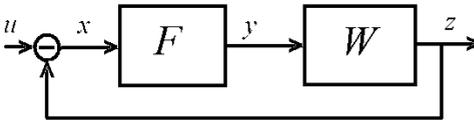


Рис. 2.1. Нелинейная САУ стандартной структуры

Предпосылки, которые положены в основу МГЛ, покажем на примере.

Пример 2.1. Исследуем процессы в системе стандартной структуры (рис. 2.1). Пусть линейная часть описывается передаточной

функцией $W(s) = \frac{1}{s(0,5s+1)(0,2s+1)}$, нелинейность – реле (см. рис.

1.6) величиной $\rho=1$. Обозначим через $u(t)$ – входной сигнал, $x(t)$ – сигнал ошибки, y – выход нелинейного элемента, $z(t)$ – выход системы. Примем для простоты изложения $u(t) = 0$ и построим процессы в системе ($z(0) = 0,1$). В установившемся режиме в системе имеют место автоколебания (рис. 2.2), близкие к синусоидальным в точке z – на выходе системы. Заметим, что на выходе нелинейности колебания имеют прямоугольную форму (рис. 2.3), так как реле может принимать всего два значения при ненулевом аргументе. Для анализа сигналов в системе в установившемся режиме используем тригонометрический ряд Фурье в форме

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k). \quad (2.1)$$

Члены ряда (2.1) называют гармониками, параметры A_k и φ_k есть амплитуда и фаза k -й гармоники соответственно, ω – частота автоколебаний. Первую гармонику также называют основной гармоникой. Разложим в ряд (2.1) сигналы $z(t)$ и $y(t)$. В табл. 2.1 приведены амплитуды первых девяти гармоник этих сигналов (амплитуды четных гармоник равны нулю) и их отношения к амплитуде

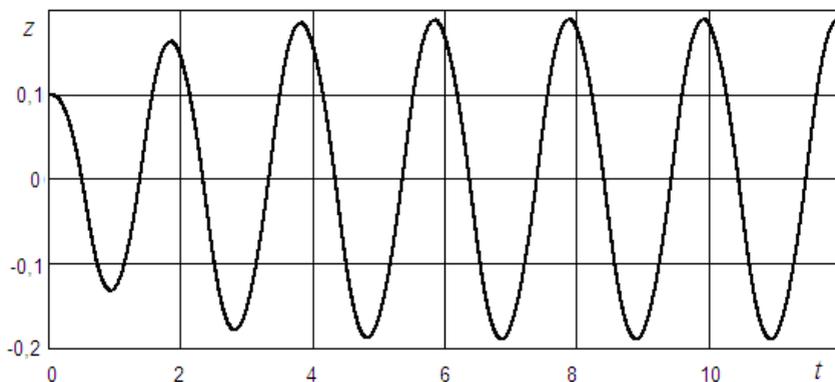


Рис. 2.2. Автоколебания в нелинейной системе

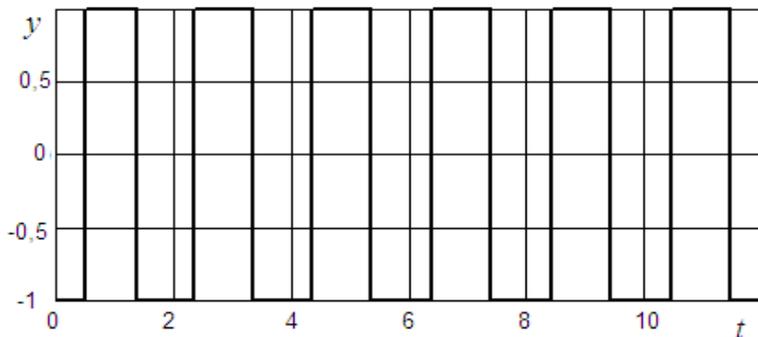


Рис. 2.3. Колебания на выходе реле

первой гармоники того же сигнала. Постоянная составляющая $A_0/2$ отсутствует.

Таблица 2.1

Амплитуды гармоник сигналов в нелинейной системе

Сигнал k , номер гармоники	z		y	
	A_k	A_k / A_1	A_k	A_k / A_1
1	0,191241	1	1,27389	1
3	0,0047565	0,0249	0,42454	0,333
5	0,000554013	0,00289	0,254618	0,1998
7	0,000325127	0,00170	0,181757	0,1427
9	0,000149317	0,000781	0,14125	0,1117

Амплитуды гармоник сигнала z убывают существенно быстрее, чем амплитуды y . Более того, амплитуда уже 3-й гармоники (это следующая по величине ненулевая гармоника после первой) составляет единицы процентов от амплитуды первой гармоники сигнала z , в то время как для сигнала y данная величина составляет более 30 %. Таким образом, при приближенных расчетах в данной задаче можно ограничиться только одной основной гармоникой при описании сигнала z , но при описании сигнала y так поступить нельзя. Итак, примем

$$z = A \sin(\omega t + \varphi) . \quad (2.2)$$

В силу того, что вход системы принят нулевым, выполняется

$$x = -z . \quad (2.3)$$

Напомним, что наша задача – описание установившегося периодического режима, а это означает, что начало отсчета времени может быть выбрано произвольно. Выберем t таким, чтобы при описании сигнала x фаза равнялась бы нулю. Следовательно, чтобы описать сигнал на входе нелинейного элемента

$$x = A \sin(\omega t) , \quad (2.4)$$

достаточно задать два параметра – амплитуду A и частоту колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T – период автоколебаний. Зная сигнал на входе

нелинейности, можно вычислить y , а затем и z . С учетом приближения (2.2) в разложении y в ряд Фурье можно ограничиться только первой гармоникой, так как амплитуда остальных существенно уменьшается линейной частью системы, как было показано на примере. Используя (2.3), можно получить уравнения для нахождения параметров автоколебаний: амплитуды A и частоты ω . При этом на выходе нелинейного элемента рассматриваются только гармоники, образующие сигнал на ее входе (в данном примере – только первая гармоника), а остальные отбрасываются, т.е. нелинейный элемент заменяется другим, проявляющим при преобразовании гармоники свойства линейного элемента. Такая замена нелинейности была названа гармонической линеаризацией, а метод расчета периодических процессов с использованием такой замены получил название метода гармонической линеаризации (МГЛ).

МГЛ может быть использован для анализа систем достаточно широкого класса, определение которого будет дано дальше в данной главе. Если же сигнал на входе нелинейности представить с достаточной точностью не удается, следует применить обобщенный МГЛ, которому посвящена гл. 4.

Рассмотрим гармоническую линеаризацию нелинейностей более подробно. Разложим сигнал $y(t)$ (далее предполагаем, что условия Дирихле выполняются) в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[0, T]$

$$y(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) dt; \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin k\omega t dt; \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos k\omega t dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ряд в форме (2.1) может быть получен из (2.5) следующим преобразованием:

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (2.7)$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}. \quad (2.8)$$

Здесь и далее выражение в форме (2.8) следует трактовать как определение аргумента величины $a_k + ib_k$ с учетом знаков a_k и b_k .

Более корректно (2.8) можно записать так:

$$\varphi_k = \arg(a_k + ib_k).$$

Запись (2.8) приводится как общепринятая при изложении МГЛ.

Если $y(t)$ – выход нелинейности $F(x)$ при подаче на нее сигнала $x(t) = A \sin \omega t$, имеющего период $T = \frac{2\pi}{\omega}$, выражения (2.6) можно записать иначе

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(A \sin \omega t) dt; \\ a_k &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(A \sin \omega t) \sin k\omega t dt; \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F(A \sin \omega t) \cos k\omega t dt .$$

Произведя замену переменной интегрирования $\psi = \omega t$, получаем окончательные расчетные формулы

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) d\psi ; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin k\psi d\psi ; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos k\psi d\psi . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как следует из (2.7), (2.9), A_0 , A_k , φ_k не зависят от периода колебаний, но зависят от амплитуды входного сигнала как от параметра. Эта зависимость отличает данный вид линеаризации от линеаризации путем разложения в ряд Тейлора и позволяет сохранить нелинейные свойства элемента.

С учетом того, что $\dot{x}(t) = \omega A \cos \omega t$, для двузначных нелинейностей $F(x, \dot{x})$ формулы (2.9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) d\psi ; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin k\psi d\psi ; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos k\psi d\psi . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Несмотря на наличие в выражениях (2.10) параметра ω , коэффициенты A_0 , a_k , b_k не зависят от частоты, так как при вычислении значения нелинейности используется только знак второго аргумента, на который ω не влияет.

В случае нечетных однозначных и нечетно-симметричных двузначных нелинейностей $a_k = b_k = 0$ при $k = 2n$, n – целое. Это следует из равенств:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin 2n\psi d\psi = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin 2n\psi d\psi;$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos 2n\psi d\psi = -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos 2n\psi d\psi.$$

Под нечетно-симметричными здесь понимается такая двузначная нелинейность, нечетность которой обеспечивается одновременно по первому и второму аргументам.

Пусть линейризованный выходной сигнал содержит только одну гармонику

$$y_l(t) = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Найдем эквивалентный коэффициент усиления нелинейности J , такой что $y_l(t) = J \cdot x(t)$, причем $x(t) = A \sin(\omega t)$. С учетом того,

что $px(t) = \omega A \cos \omega t$, откуда $\cos \omega t = \frac{p}{\omega A} x(t)$, получаем

$$y_l(t) = \left(\frac{a_1}{A} + \frac{b_1 p}{\omega A} \right) A \sin \omega t = J(A, p) \cdot x(t).$$

Обозначим:

$$q(A) = \frac{a_1(A)}{A}; \quad (2.11)$$

$$q'(A) = \frac{b_1(A)}{A}. \quad (2.12)$$

Коэффициенты $q(A)$ и $q'(A)$ называют коэффициентами гармонической линейризации и, согласно (2.10), вычисляют по формулам

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin \psi d\psi; \quad (2.13)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (2.14)$$

В обозначениях (2.11) искомый эквивалентный коэффициент определяется выражением

$$J(A, p) = q(A) + \frac{pq'(A)}{\omega}. \quad (2.15)$$

Выражение (2.15) является аналогом передаточной функции, записанной в операторной форме. Формально заменим p на s и подставим $s = i\omega$ в (2.15). Полученное таким образом выражение

$$\bar{J}(A) = q(A) + iq'(A) \quad (2.16)$$

называют амплитудно-фазовой характеристикой нелинейности, так как (2.16) позволяет определить по синусоидальному сигналу на входе нелинейности параметры первой гармоники сигнала на выходе нелинейности. Действительно,

$$A_1 = |\bar{J}(A)|A = A\sqrt{q^2(A) + q'^2(A)}; \quad (2.17)$$

$$\varphi_1 = \arg \bar{J}(A) = \operatorname{arctg} \frac{q'(A)}{q(A)} = \operatorname{arctg} \frac{b_1(A)}{a_1(A)}. \quad (2.18)$$

Напомним, что для линейной подсистемы, заданной передаточной функцией $W(s)$, аналогичные выражения (для установившегося режима при $t \rightarrow \infty$) выглядят следующим образом: $A_l = A|W(i\omega)|$, $\varphi_l = \arg W(i\omega)$. Фаза входного синусоидального сигнала полагается равной нулю. По этой причине (2.15) называют эквивалентной передаточной функцией (ЭПФ).

Важный частный случай представляют однозначные нечетные нелинейности. Их реакция на синусоидальный сигнал может быть описана только с помощью синусов и, следовательно, $q'(A) = 0$.

Коэффициенты гармонической линеаризации (2.13), (2.14) нелинейностей, описанных в гл. 1, приведены в табл. 2.2 и 2.3 (люфт с учетом входного сигнала здесь отнесен к двузначным нелинейностям, см. гл. 1).

На последние две нелинейности, представленные в табл. 2.3, следует обратить особое внимание. Они отличаются друг от друга направлением обхода – против часовой стрелки и по часовой стрелке, соответственно. Если вычислить фазу первой гармоники φ_1 (2.18), то для первой нелинейности $\varphi_1 < 0$, для второй – $\varphi_1 > 0$. Поэтому двузначные нелинейности с направлением обхода против часовой стрелки получили название фазозапаздывающие, а по ча-

совой стрелке – фазоопережающие. Они также получили названия «пассивные» и «активные» соответственно.

Таблица 2.2

**Коэффициенты гармонической линеаризации
типовых однозначных нелинейностей**

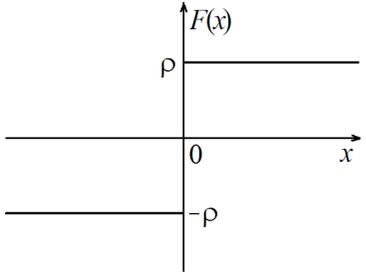
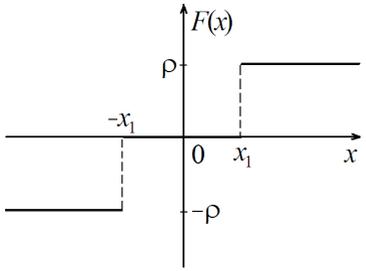
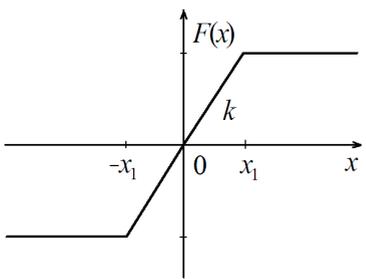
График нелинейности	$q(A)$
	$\frac{4\rho}{\pi A}$
	$\frac{4\rho}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2}$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>
	$\frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_1}{A} + \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>

График нелинейности	$q(A)$
	$k - \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_1}{A} + \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A} \right)^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>
	$\frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_2}{A} - \arcsin \frac{x_1}{A} + \right.$ $\left. + \frac{x_2}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_2}{A} \right)^2} - \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A} \right)^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_2$</p>

Таблица 2.3

**Коэффициенты гармонической линеаризации
типовых двузначных нелинейностей**

График нелинейности	$q(A)$	$q'(A)$
	$\frac{4\rho}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A} \right)^2}$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>	$-\frac{4\rho x_1}{\pi A^2}$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>

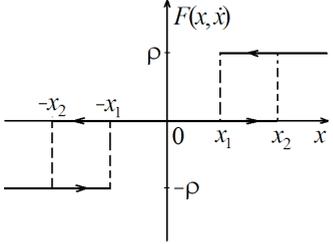
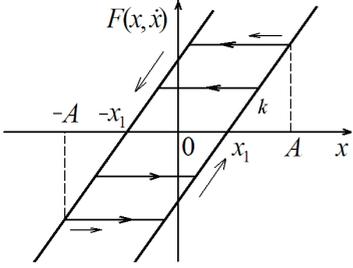
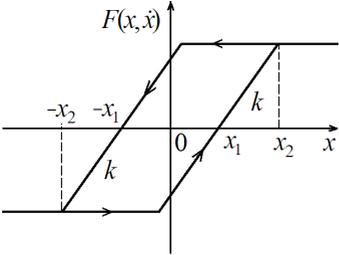
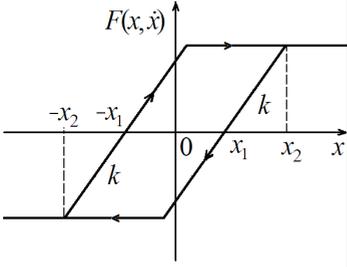
График нелинейности	$q(A)$	$q'(A)$
	$\frac{2\rho}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x_2}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2} \right)$ <p>при $A > x_2$</p>	$-\frac{2\rho}{\pi A^2} (x_2 - x_1)$ <p>при $A > x_2$</p>
	$\frac{k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin(\alpha) + 2\alpha \sqrt{\frac{x_1}{A} \left(1 - \frac{x_1}{A}\right)} \right]$ <p>при $A \geq x_1$, где $\alpha = 1 - \frac{2x_1}{A}$</p>	$-\frac{4kx_1}{\pi A} \left(1 - \frac{x_1}{A}\right)$ <p>при $A \geq x_1$</p>
	$\frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_2}{A} - \arcsin \frac{x_1}{A} + \frac{x_2}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_2}{A}\right)^2} + \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2} \right)$ <p>при $A \geq x_2$</p>	$-\frac{4x_1(x_2 - x_1)}{\pi A^2}$ <p>при $A \geq x_2$</p>

График нелинейности	$q(A)$	$q'(A)$
	$\frac{k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_2}{A} - \arcsin \frac{x_1}{A} + \frac{x_2}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_2}{A} \right)^2} + \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A} \right)^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_2$</p>	$\frac{4x_1(x_2 - x_1)}{\pi A^2}$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_2$</p>

Для приближенного вычисления коэффициента гармонической линейризации $q(A)$ в этом случае можно воспользоваться формулами квадратур Стеклова. Для таких нелинейностей

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(A \sin \psi) \sin k\psi d\psi .$$

Заменим переменную интегрирования, обозначив $x = A \sin \psi$, тогда

$$d\psi = \frac{dx}{A \cos \psi} = \frac{dx}{\pm A \sqrt{1 - (x/A)^2}}, \text{ знаменатель положителен при}$$

$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$. Также обозначим $\zeta = x/A$, $\tilde{F}(\zeta) = F(\zeta)\zeta$. Тогда

$$q(A) = \frac{2}{\pi A} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{F}(\zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta .$$

С использованием формулы квадратур Стеклова интеграл вида

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{F}(\zeta)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta \text{ вычисляется следующим образом:}$$

$$I = \frac{1}{6} \left(\tilde{F}(1) + \tilde{F}(-1) + 2\tilde{F}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) \right) - \frac{\tilde{F}^{(6)}(\xi)}{2^5 \cdot 6!} .$$

В итоге получим

$$q(A) \approx \frac{2}{3A} \left(F(A) + F\left(\frac{A}{2}\right) \right). \quad (2.19)$$

Формула (2.19) является точной для нечетных нелинейностей, которые описываются полиномами до 5-го порядка включительно. В противном случае можно рассматривать аппроксимацию таким полиномом, и формула (2.19) становится приближенной. Для более точной оценки $q(A)$ можно использовать формулу

$$q(A) \approx \frac{1}{3A} \left(F(A) + F\left(\frac{A}{2}\right) + \sqrt{3}F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}A\right) \right), \quad (2.20)$$

полученную аналогично. Для полиномов до 11-й степени включительно (2.20) является точной.

Пример 2.2. Вычислим коэффициент гармонической линейризации реле, $\rho = 1$. Применяя (2.11), получим $q(A) = \frac{4}{\pi A} \approx \frac{1,273}{A}$. По

формуле (2.12) $q(A) \approx \frac{4}{3A} \approx \frac{1,333}{A}$, что превышает точное значение

на 5 %, а с использованием (2.13) $q(A) \approx \frac{2 + \sqrt{3}}{3A} \approx \frac{1,244}{A}$, что на 2 %

меньше.

Пример 2.3. Построим зависимость амплитуды синусоиды на выходе гармонически линейризованной нелинейности типа «ограничение» от амплитуды на ее входе. Нелинейность имеет $k = 1$, $x_1 = 1$. Обозначим амплитуду входной синусоиды через A , амплитуду первой гармоники ряда Фурье выхода нелинейности через A_1 . Нелинейность является однозначной, поэтому для $A \geq x_1$ можно записать $A_1 = q(A)A$, где, с учетом параметров данной нелинейности,

$q(A) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{A}\right)^2} \right)$. При $A \leq x_1$ справедливо

$A_1 = kA$, или для данной нелинейности $A_1 = A$. Искомая зависимость представлена на рис. 2.4. Кривая качественно повторяет гра-

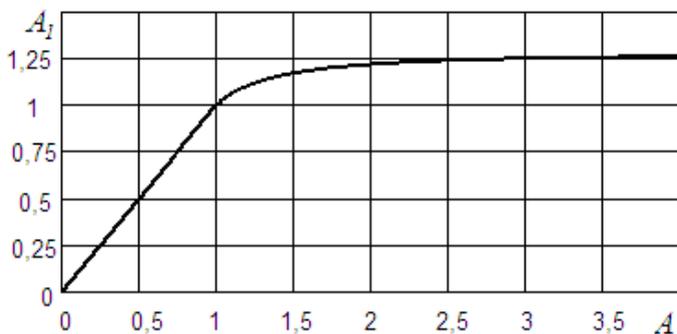


Рис. 2.4. Амплитуда на выходе линейризованного ограничения

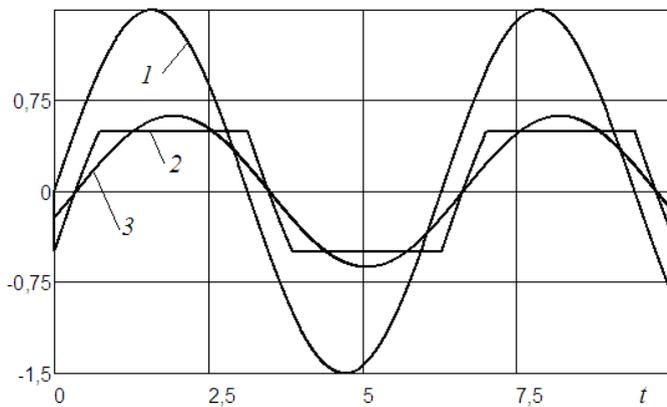
фик нелинейности, но насыщение наступает при большей, чем величина ограничения, амплитуде. Читателю предлагается построить аналогичный график для реле и объяснить результат.

Пример 2.4. Сравним результат прохождения синусоидального сигнала через активную и пассивную нелинейности типа «гистерезис с ограничением» (см. рис. 1.11) между собой и с первой гармоникой выходного сигнала.

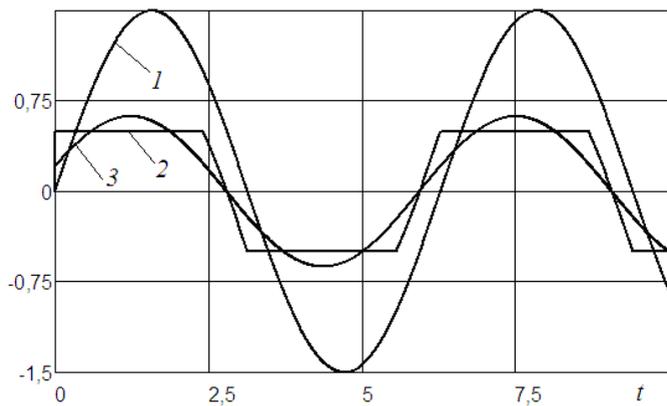
На рис. 2.5 представлены графики, соответствующие пассивной и активной нелинейностям. На рисунке легко заметить запаздывание и опережение по фазе первой гармоники выходного сигнала относительно входного сигнала в пассивной и активной нелинейностях соответственно. Величину фазового запаздывания вычислим с использованием коэффициентов гармонической линеаризации

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \operatorname{arctg} \frac{q'(A)}{q(A)} = \\ &= -\operatorname{arctg} \frac{4x_1(x_2 - x_1)}{\pi A^2 k \left(\operatorname{arcsin} \frac{x_2}{A} - \operatorname{arcsin} \frac{x_1}{A} + \frac{x_2}{A} \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{A^2}} + \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{A^2}} \right)}. \end{aligned}$$

Для активной нелинейности величина фазового опережения будет иметь противоположный знак.



a



б

Рис. 2.5. Процессы в пассивной (*a*) и активной (*б*) нелинейностях:
 1 – входной сигнал; 2 – выходной сигнал;
 3 – первая гармоника выходного сигнала

2.2. Условия применимости метода гармонической линеаризации

Условия, при которых возможно применение гармонической линеаризации нелинейностей для расчета периодических установившихся режимов определим для системы, структурная схема которой приведена на рис. 2.1, следуя [8]. Входной сигнал u полагаем нулевым, передаточная функция (оператор линейной части) имеет вид $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$, $R(p)$ и $Q(p)$ – алгебраические многочлены с вещественными коэффициентами, степень $R(p)$ ниже степени $Q(p)$, $F(x, px)$ – некоторая однозначная или двузначная нелинейность. Задача состоит в том, чтобы определить условия, при которых периодический сигнал $x(t)$ достаточно близок к синусоидальному и может быть приближенно представлен в виде (2.4).

Запишем дифференциальное уравнение системы

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (2.21)$$

Предполагаем, что существует периодическое решение x уравнения (2.21). Воспользуемся методом малого параметра [9]. Точное решение x представим рядом Фурье $x = x_1 + \varepsilon x_B$, где слагаемое x_1 описывает первую гармонику и равно $A_1 \sin \omega t$, высшие гармоники

обозначены через $x_B = \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$, ε – малый параметр.

Тогда сигнал на выходе нелинейности записывается так: $y = F(x_1 + \varepsilon x_B, px_1 + \varepsilon px_B)$. При гармонической линеаризации нелинейности ее выход вычисляется на основе приближенного описания входного сигнала и полагается равным $F(x_1, px_1)$. С использованием разложения в ряд Тейлора по ε запишем их разность в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta F(x, px) &= F(x_1 + \varepsilon x_B, px_1 + \varepsilon px_B) - F(x_1, px_1) = \\ &= \varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_B + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_B \right] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots \end{aligned} \quad (2.22)$$

Выражение (2.22) будет мало при малости или хотя бы ограниченности частных производных, что справедливо для большинства не-

линейностей, включая разрывные, так как в (2.22) используются значения производных в точке предполагаемого решения, которое может не совпадать с точками разрыва нелинейности. Кроме того, из предположения о близости x_1 к решению системы следует малость x_B . Разложим в ряд Фурье приближение выходного сигнала

$$F(x_1, px_1) = F_0 + \left(F_1 + \frac{F'_1}{\omega} p \right) \sin \omega t + \sum_{k=2}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + f_k) \quad (2.23)$$

и разность (2.22), дополняющую (2.23) до точного y :

$$\Delta F(x, px) = \varepsilon G_0 + \varepsilon \left(G_1 + \frac{G'_1}{\omega} p \right) \sin \omega t + \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} G_k \sin(k\omega t + g_k). \quad (2.24)$$

Теперь подставим (2.23) и (2.24) в (2.21), учитывая, что

$$x_1 = A_1 \sin \omega t, \quad x_B = \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k):$$

$$\begin{aligned} & Q(p)A_1 \sin \omega t + Q(p)\varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \\ & + R(p)F_0 + R(p)\left(F_1 + \frac{F'_1}{\omega} p \right) \sin \omega t + R(p) \sum_{k=2}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + f_k) + \\ & + R(p)\varepsilon G_0 + \varepsilon \left(G_1 + \frac{G'_1}{\omega} p \right) \sin \omega t + \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} G_k \sin(k\omega t + g_k) = 0. \end{aligned}$$

Данное уравнение разделим на уравнения по гармоникам. Для постоянной составляющей получаем:

$$F_0 + \varepsilon G_0 = 0,$$

откуда следует, что с точностью до ε должно выполняться $F_0 = 0$ (сейчас мы рассматриваем колебания без постоянной составляющей, расчет систем с несимметричными колебаниями будет рассмотрен далее). Очевидно, это условие выполняется для нечетных нелинейностей.

Уравнение для первой гармоники, определяющее искомое приближенное решение таково:

$$Q(p)A_1 \sin \omega t + R(p)\left(F_1 + \frac{F'_1}{\omega} p \right) \sin \omega t + \varepsilon \left(G_1 + \frac{G'_1}{\omega} p \right) \sin \omega t = 0. \quad (2.25)$$

Откуда (см. выше о преобразовании линейной и линеаризованной нелинейной частями синусоидального сигнала в установившемся режиме), предполагая, что многочлен $Q(p)$ не имеет чисто мнимых корней,

$$x_1 = A_1 \sin \omega t = \left| \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} \right| \sqrt{F_1^2 + F_1'^2} \sin \left(\omega t + \arg \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} + \arctg \frac{F_1'}{F_1} + \pi \right) + \\ + \varepsilon \left| \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} \right| \sqrt{G_1^2 + G_1'^2} \sin \left(\omega t + \arg \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} + \arctg \frac{G_1'}{G_1} + \pi \right). \quad (2.26)$$

Как видно из (2.26) при решении уравнения (2.25), а следовательно, при приближенном решении (2.21) с точностью до ε , можно не учитывать поправку (2.22).

Теперь рассмотрим условия, при которых уравнения для высших гармоник можно не учитывать. Запишем уравнения при $k = 2, 3, \dots$

$$Q(p)\varepsilon A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + R(p)F_k \sin(k\omega t + f_k) + \\ + R(p)\varepsilon G_k \sin(k\omega t + g_k) = 0. \quad (2.27)$$

Выразим, аналогично (2.26), k -ю гармонику:

$$\varepsilon x_k = \varepsilon A_k \sin k\omega t = \left| \frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)} \right| F_k \sin \left(k\omega t + f_k + \arg \frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)} + \pi \right) + \\ + \varepsilon \left| \frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)} \right| G_k \sin \left(k\omega t + g_k + \arg \frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)} + \pi \right). \quad (2.28)$$

Из (2.28) следует, что для малости k -х гармоник (которые мы собираемся отбрасывать при расчетах) необходимо, чтобы множитель $\left| \frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)} \right| F_k$ был достаточно мал. Сравнивая (2.28) и (2.26), за-

ключаем, что при сопоставимых по величине F_k и $\sqrt{F_1^2 + F_1'^2}$, а это справедливо для многих существенных нелинейностей, по крайней мере, для небольших k (см., например, табл. 2.2), для того чтобы можно было считать (2.28) пренебрежимо малым порядка ε , необходимо потребовать выполнения условия:

$$\left| \frac{R(ik\omega)}{Q(ik\omega)} \right| \ll \left| \frac{R(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|, \quad (2.29)$$

которое принято называть условием фильтра, или гипотезой фильтра. Физически условие (2.29) означает, что амплитуды синусоид, составляющих ряд Фурье сигнала на выходе нелинейности на старших частотах, кратных основной частоте, частоте колебаний, усиливаются линейной частью существенно меньше, чем первая гармоника. Гипотезой же (2.29) называют, потому что для проверки выполнения условия (2.29) необходимо знать ω , которую получают, применяя МГЛ. Таким образом, возможность применения метода обосновывается только после его применения. Оценить, будет ли справедливо (2.29) до определения ω , можно по виду амплитудной частотной характеристики линейной части. Для того, чтобы она убывала, потребуем, чтобы порядок многочлена $R(p)$ по p был меньше порядка $Q(p)$.

Итак, перечислим условия, которым должна удовлетворять система, для применения МГЛ при определении колебаний, приближенно описываемых одной гармоникой.

1. Разделимость системы на статический нелинейный элемент и линейную часть.

2. Выполнение условия фильтра (2.22).

3. Отсутствие корней $Q(\lambda) = 0$, таких, что $\text{Re} \lambda = 0$, $\text{Im} \lambda \neq 0$.

4. Ограниченность частных производных нелинейности $\frac{\partial}{\partial x} F(x, px)$ и $\frac{\partial}{\partial px} F(x, px)$ за исключением, быть может, множества точек меры нуль.

5. Отсутствие постоянной составляющей на выходе нелинейного элемента (для симметричных колебаний).

Приведенные условия сформулированы для основного варианта МГЛ. Модификации МГЛ, для которых они существенно ослаблены, приведены в гл. 4 и 5.

2.3. Применение метода гармонической линеаризации для расчета симметричных колебаний

Опишем порядок расчета параметров симметричных автоколебаний в системе, имеющей структурную схему, приведенную на

рис. 2.1, $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$. Эту систему задает дифференциальное уравнение

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0. \quad (2.30)$$

Проведем гармоническую линеаризацию функции $F(x, \dot{x})$, для чего вычислим коэффициенты гармонической линеаризации нелинейности по формулам

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin \psi d\psi; \quad (2.31)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos \psi d\psi \quad (2.32)$$

и заменим в (2.30) нелинейный элемент линеаризованным

$$F(x, px) \approx \left(q(A) + \frac{q'(A)p}{\omega} \right) x. \quad (2.33)$$

Линеаризованное уравнение примет вид

$$Q(p)x + R(p) \left(q(A) + \frac{q'(A)p}{\omega} \right) x = 0. \quad (2.34)$$

Периодическое решение (2.34) ищем как для линейного уравнения в виде

$$x = A \sin \omega t, \quad (2.35)$$

искомыми являются параметры A и ω . В линейной системе (2.35) будет решением, если ее характеристическое уравнение имеет корни $\pm i\omega$. Найдем характеристическое уравнение (2.34) подстановкой Эйлера $x = e^{\lambda t}$:

$$Q(\lambda) + R(\lambda) \left(q(A) + \frac{q'(A)\lambda}{\omega} \right) = 0 \quad (2.36)$$

и подставим в (2.36) $\lambda = i\omega$ (доказательство эквивалентности подстановки $\lambda = -i\omega$ читателю предоставляется в качестве упражнения)

$$Q(i\omega) + R(i\omega) \left(q(A) + iq'(A) \right) = 0. \quad (2.37)$$

Уравнение (2.37) носит название уравнения гармонического баланса. Решая (2.37), а это два уравнения – для действительных и для мнимых составляющих, – находим искомые параметры автоколе-

баний – амплитуду A и частоту ω . После того, как частота определена, следует проверить, выполняется ли условие фильтра (2.29), т.е. можно ли было применять МГЛ.

Отметим, что, несмотря на решение формально линейных уравнений, с использованием МГЛ получено решение нелинейной системы. Действительно, коэффициенты гармонической линеаризации q и q' нелинейно зависят от параметров решения A и ω , в некоторой степени передавая нелинейные свойства исходной нелинейности. В отличие от линейных колебаний найденные параметры не зависят от начальных условий и полностью определяются только свойствами системы.

Следующее замечание связано с применением ЭПФ. Формально (2.37) можно получить, заменив нелинейность эквивалентным коэффициентом усиления $J(A, p)$ (2.11) и записав для получения характеристического уравнения знаменатель передаточной функции замкнутой системы, произведя подстановку $p = i\omega$:

$$1 + W(i\omega)\bar{J}(A) = 0. \quad (2.38)$$

Если в рассматриваемой системе нелинейность однозначная, решение уравнений гармонического баланса упрощается. Запишем для данного случая (2.37):

$$Q(i\omega) + R(i\omega)q(A) = 0$$

и явно выделим действительные и мнимые составляющие:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} Q(i\omega) + \operatorname{Re} R(i\omega)q(A) = 0; \\ \operatorname{Im} Q(i\omega) + \operatorname{Im} R(i\omega)q(A) = 0. \end{cases}$$

Решая относительно $q(A)$, получим

$$\begin{cases} q(A) = -\frac{\operatorname{Re} Q(i\omega)}{\operatorname{Re} R(i\omega)}; \\ \operatorname{Re} R(i\omega) \operatorname{Im} Q(i\omega) - \operatorname{Re} Q(i\omega) \operatorname{Im} R(i\omega) = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Частота автоколебаний находится из второго уравнения системы (2.39) и не зависит от типа и параметров нелинейности, а определяется только линейной частью системы. По найденной частоте ω из первого уравнения вычисляем значение $q(A)$, а затем и амплитуду автоколебаний.

Устойчивость найденных автоколебаний можно определить несколькими способами. Опишем два из них, являющихся эмпириче-

скими, основанными на исследовании свойств системы при малом отклонении сигнала от найденного решения.

В первом способе сигнал представляется в виде

$$x = \tilde{x} + \delta, \quad (2.40)$$

где \tilde{x} – решение уравнений гармонического баланса; δ – малое отклонение. Подставим (2.40) в нелинейное уравнение (2.30):

$$Q(p)(\tilde{x} + \delta) + R(p)F(\tilde{x} + \delta, p\tilde{x} + \delta) = 0$$

и разложим нелинейность в ряд Тейлора по δ до первого порядка малости:

$$Q(p)\tilde{x} + R(p)F(\tilde{x}, p\tilde{x}) + \\ + Q(p)\delta + R(p)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}F(\tilde{x}, p\tilde{x})\delta + R(p)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}F(\tilde{x}, p\tilde{x})\delta = 0,$$

или, учитывая, что (2.30) – решение (2.37),

$$Q(p)\delta + R(p)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}F(\tilde{x}, p\tilde{x})\delta + R(p)\frac{\partial}{\partial \tilde{x}}F(\tilde{x}, p\tilde{x})\delta = 0. \quad (2.41)$$

Исследуя устойчивость линейного по δ уравнения (2.41), определяем, устойчивы ли найденные автоколебания.

Второй способ основан на описании процесса вблизи периодического как линейного затухающего, для чего вводятся переменные ξ – коэффициент затухания, и отклонения амплитуды ΔA и частоты $\Delta \omega$, а процесс описывается выражением

$$x = (A + \Delta A)e^{-\xi t} \sin(\omega + \Delta \omega)t. \quad (2.42)$$

Очевидно, что процесс, описываемый (2.35), будет устойчивым, если ΔA и ξ будут одного знака. В линейной системе (2.42) соответствуют корни характеристического уравнения

$$-\xi \pm i(\omega + \Delta \omega), \quad (2.43)$$

которые подставим в (2.37). Для этого запишем уравнения гармонического баланса (2.37) в форме

$$X(A, \omega) + iY(A, \omega) = 0, \quad (2.44)$$

обозначив через $X(A, \omega)$ и $Y(A, \omega)$ действительную и мнимую его части, а (2.43) представим в виде $i(\omega + \Delta \omega + i\xi)$, для определенности выбрав знак «+». Поставим в (2.44) формальные амплитуду $\tilde{A} + \Delta A$ и частоту $\tilde{\omega} + \Delta \omega + i\xi$:

$$X(\tilde{A} + \Delta A, \tilde{\omega} + \Delta \omega + i\xi) + iY(\tilde{A} + \Delta A, \tilde{\omega} + \Delta \omega + i\xi) = 0. \quad (2.45)$$

Разложим (2.45) в ряд Тейлора и учтем, что \tilde{A} и $\tilde{\omega}$ – решение (2.44) (частные производные взяты при \tilde{A} , $\tilde{\omega}$):

$$\frac{\partial X}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial X}{\partial \omega} (\Delta \omega + i\xi) + i \frac{\partial Y}{\partial A} \Delta A + i \frac{\partial Y}{\partial \omega} (\Delta \omega + i\xi) = 0. \quad (2.46)$$

Из (2.46) получим

$$\xi = \frac{\frac{\partial X}{\partial A} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial A} \frac{\partial X}{\partial \omega}}{\left(\frac{\partial X}{\partial \omega}\right)^2 - \left(\frac{\partial Y}{\partial \omega}\right)^2} \Delta A,$$

откуда находим условие устойчивости автоколебаний

$$\frac{\partial X}{\partial A} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial A} \frac{\partial X}{\partial \omega} > 0. \quad (2.47)$$

Заметим, что остальные корни (2.45) должны иметь отрицательные действительные части.

Пример 2.5. Исследуем возможность возникновения автоколебаний в системах с линейной частью третьего порядка вида

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)} \text{ и однозначной нелинейностью. Коэф-}$$

фициент гармонической линеаризации в этом случае можно записать как $q(A)$. Характеристическое уравнение линеаризованной системы:

$$T_1 T_2 \lambda^3 + (T_1 + T_2) \lambda^2 + \lambda + Kq(A) = 0.$$

Подставим $\lambda = i\omega$ и запишем уравнение в виде (2.44):

$$\begin{cases} X(A, \omega) = Kq(A) - (T_1 + T_2)\omega^2 = 0; \\ Y(A, \omega) = \omega - T_1 T_2 \omega^3 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения определяем частоту автоколебаний

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}, \text{ а из первого}$$

$$q(A) = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right). \quad (2.48)$$

Определим условия, при которых автоколебания будут устойчивы с использованием (2.47):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X(A, \omega)}{\partial A} &= K \frac{\partial q(A)}{\partial A}; & \frac{\partial X(A, \omega)}{\partial \omega} &= -2 \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}; \\ \frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial A} &= 0; & \frac{\partial Y(A, \omega)}{\partial \omega} &= -2; \\ \frac{\partial X}{\partial A} \frac{\partial Y}{\partial \omega} - \frac{\partial Y}{\partial A} \frac{\partial X}{\partial \omega} &= -2K \frac{\partial q(A)}{\partial A} > 0, \end{aligned}$$

Откуда следует, что условием устойчивости колебаний является выполнение $\frac{\partial q(A)}{\partial A} < 0$.

Проверим выполнение свойства фильтра. Подставляя $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$

в (2.29), для рассматриваемой линейной подсистемы получаем

$$W(ik\omega) = \frac{KT_1 T_2}{(T_1 + T_2)k^2}.$$

С учетом того, что амплитуда гармоник убывает не медленнее, чем M/k , где k – номер гармоники, $M = \text{const}$, получаем, что амплитуды гармоник на входе нелинейности убывают как N/k^3 (для непрерывных нелинейностей как \tilde{N}/k^4). Таким образом, свойство фильтра можно считать выполненным.

Пример 2.6. Применим МГЛ к системе, рассмотренной в примере 2.1. Коэффициент гармонической линеаризации $q(A) = \frac{4}{\pi A}$ (см. пример 2.2), условие отрицательности производной по A для него выполняется, следовательно, автоколебания устойчивы. Частота автоколебаний (см. пример 2.5) составляет $\omega = \frac{1}{\sqrt{0,1}} \approx 3,162$ рад/с. Амплитуду автоколебаний определим из

условия (2.48). Подставляя точное значение для $q(A)$, получаем, 0,182, а с применением формул Стеклова амплитуда составит 0,190 и 0,178 для формул 5-го и 11-го порядка соответственно. Сравним полученные значения с амплитудой и частотой первой гармоники точного решения. Частота колебаний равна 3,083 рад/с, а амплитуда 0,191. Таким образом, относительная погрешность МГЛ для

данной задачи составляет около 2,5 % по частоте и 5 % по амплитуде.

Пример 2.7. В качестве нелинейности в системе из примера 2.5 возьмем ограничение с коэффициентом k (см. рис. 1.3). Частота автоколебаний в случае однозначной нелинейности не зависит от нее и была определена для данной системы в примере 2.5. Выражение для коэффициента гармонической линеаризации ограничения, полученное при $A > x_1$, следующее:

$$q(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_1}{A} + \frac{x_1}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A} \right)^2} \right).$$

При меньших амплитудах сигнал полностью попадает в линейную зону с коэффициентом усиления k , и колебания могут быть точно описаны линейными дифференциальными уравнениями. Поэтому если автоколебания существуют, $A > x_1$ и $q(A) < k$. Из (2.48) полу-

чим условие существования автоколебаний $k > q(A) = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$

или $Kk > \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$, где Kk – коэффициент усиления разомкнутой

системы в зоне линейности нелинейного элемента. Читателю предлагается сравнить полученное условие с условием устойчивости линейной системы с передаточной функцией

$W(s) = \frac{Kk}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$, охваченной единичной обратной связью.

В реальных системах, встречающихся в технике, параметры часто не остаются постоянными, а медленно меняются в процессе их функционирования. Это может быть изменение массы и моментов инерции летательного аппарата при выработке топлива, изменение тяги двигателей и т.п. Кроме того, системы должны нормально функционировать в широком диапазоне параметров, что на практике, например, означает работу при различной нагрузке. Таким образом, расчет систем на наличие автоколебательных режимов необходимо производить для ряда параметров. Одна из возможных графических форм представления результатов таких расчетов – области устойчивости. Областью устойчивости нелинейной системы

называют графическое представление решений уравнений гармонического баланса в зависимости от какого-либо параметра этой системы, чаще всего – коэффициента усиления.

Пример 2.8. Построим область устойчивости системы, рассмотренной в примере 2.5. Для нелинейности типа «реле» (см. рис. 1.6) из (2.48) получим

$$A = \frac{4\rho T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)} K.$$

Область устойчивости для системы с параметрами $T_1 = 0,2$ с, $T_2 = 0,5$ с изображена на рис. 2.6. Стрелками обозначено изменение амплитуды при переходном процессе, соответствующее автоколебаниям.

Заменяем нелинейность на реле с зоной нечувствительности (рис. 1.7). Из (2.48) следует:

$$K \frac{4\rho}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{A}\right)^2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \quad (2.49)$$

Выражение (2.49) удобнее рассматривать как зависимость коэффициента усиления K от амплитуды A . Из условия $\frac{dK}{dA} = 0$ определяем, что при $A = x_1 \sqrt{2}$ величина K минимальна и составляет

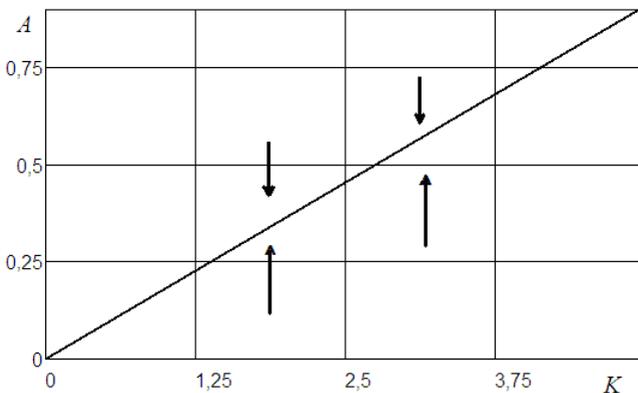


Рис. 2.6. Область устойчивости системы с реле

$\frac{\pi x_1(T_1 + T_2)}{2\rho T_1 T_2}$. Таким образом, для одного значения коэффициента

усиления имеется два решения уравнений гармонического баланса, которые можно различить, сравнивая решение с амплитудой, при которой достигается минимум по K . Для определения устойчивости решений воспользуемся результатом примера 2.5. Для рассматриваемой нелинейности

$$\frac{dq(A)}{dA} = \frac{4x_1}{\pi A \sqrt{A^2 - x_1^2}} \left(\frac{2x_1^2}{A^2} - 1 \right),$$

откуда $\frac{dq(A)}{dA} < 0$ при $A > x_1\sqrt{2}$ и $\frac{dq(A)}{dA} > 0$ при $A < x_1\sqrt{2}$. Область устойчивости при прежних параметрах линейной части представлена на рис. 2.7. Заметим, что при $K^* < \frac{\pi x_1(T_1 + T_2)}{2\rho T_1 T_2}$ в системе автоколебаний нет и она является устойчивой.



Рис. 2.7. Область устойчивости системы с реле с зоной нечувствительности

Пример 2.9. Построим область устойчивости системы с двузначной нелинейностью «реле с гистерезисом» (см. рис. 1.8) с линейной частью, рассмотренной в примерах 2.5 – 2.8. Запишем уравнения для действительной и мнимой составляющих

$$\begin{cases} K \frac{4}{\pi A^2} \sqrt{A^2 - x_1^2} = (T_1 + T_2) \omega^2; \\ K \frac{4x_1}{\pi A^2} = \omega(1 - T_1 T_2 \omega^2). \end{cases}$$

Разделим первое уравнение системы на второе:

$$\frac{4}{x_1} \sqrt{A^2 - x_1^2} = \frac{(T_1 + T_2) \omega}{1 - T_1 T_2 \omega^2}. \quad (2.50)$$

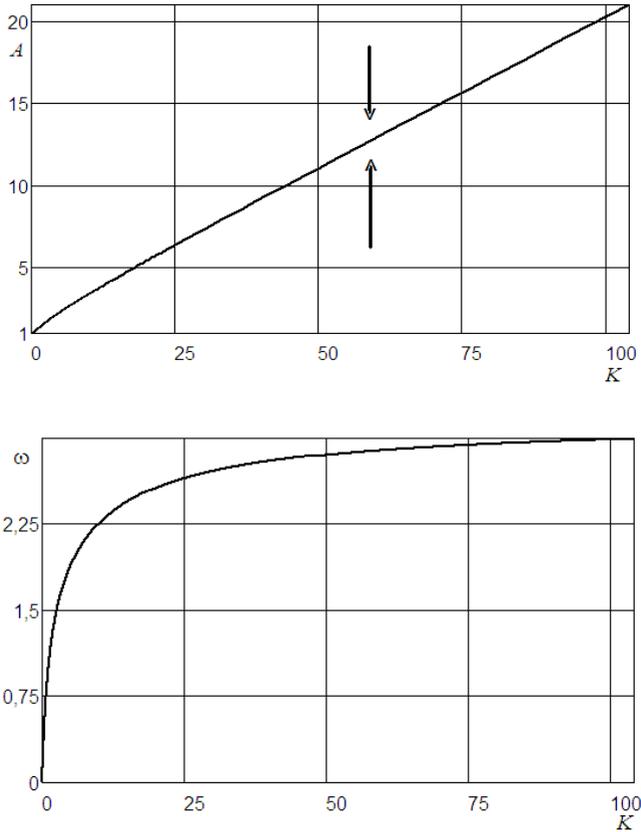


Рис. 2.8. Область устойчивости системы с нелинейностью «реле с гистерезисом»

Из (2.50) с учетом положительности параметров следует, что $\omega < \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$. Используя ω в качестве параметра, построим области

устойчивости. В рассматриваемом случае от коэффициента усиления K будут зависеть два параметра автоколебаний – амплитуда и частота, поэтому область устойчивости представляет собой два графика. На рис. 2.8 изображена область устойчивости при $x_1 = 1$, $\rho = 1$, $T_1 = 0,2$ с, $T_2 = 0,5$ с. Как следует из рис. 2.8, в системе имеют место автоколебания во всем диапазоне возможных коэффициентов усиления. Кривая зависимости амплитуды автоколебаний начинается от величины $A = x_1$.

2.4. Метод шаблонов

В анализе линейных систем автоматического управления широко применяются логарифмические амплитудно-фазовые частотные характеристики. Их применение позволяет графически представить характеристики системы в широком диапазоне частот. Воспользоваться наглядностью такого представления при решении уравнений гармонического баланса позволяет метод шаблонов.

Запишем уравнения гармонического баланса в форме (2.38):

$$1 + W(i\omega)\bar{J}(A) = 0. \quad (2.51)$$

Оставим в левой части уравнения частотную характеристику линейной подсистемы

$$W(i\omega) = -\frac{1}{\bar{J}(A)}. \quad (2.52)$$

Геометрическое представление левой части уравнения – годограф, правой части – кривая, называемая шаблоном нелинейности. Пересечение кривых означает наличие решения уравнения гармонического баланса (2.52).

Пример 2.10. Представим графически решение уравнений гармонического баланса для системы, линейная часть которой задана передаточной функцией $W(s) = \frac{100}{(s+1)(0,5s+1)}$, нелинейность – реле с зоной нечувствительности и гистерезисом (см. рис. 1.9). Па-

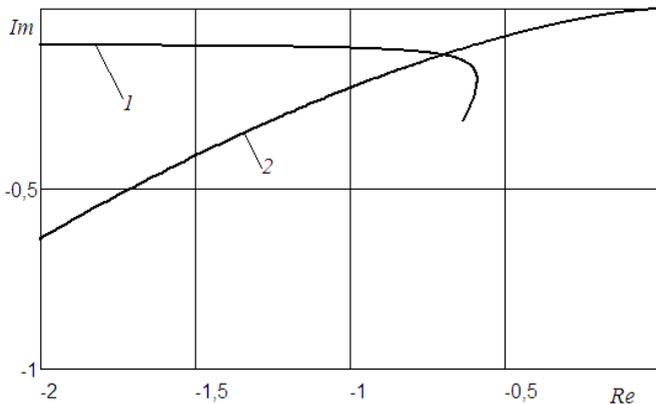


Рис. 2.9. Графическое решение уравнений гармонического баланса:
1 – шаблон; 2 – годограф

параметры нелинейности следующие: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$, $\rho = 1$. Фрагменты частотной характеристики линейной подсистемы и шаблона представлены на рис. 2.9. Из рисунка следует существование в системе периодических колебаний.

Наличие решения уравнений гармонического баланса представляется таким способом весьма наглядно, но определить, при какой частоте и амплитуде получено решение, затруднительно. Так как амплитуда для шаблона и частота для годографа являются параметрами, необходимо каким-либо способом определять значения параметров кривых в точке пересечения (или точках, если решений несколько).

Существенно облегчить задачу поиска параметров автоколебаний при сохранении наглядности графического решения уравнений гармонического баланса можно, разделив (2.51) на уравнения амплитуд и фаз. Выразим частотную характеристику линейной части через амплитудную и фазовую частотные характеристики линейной подсистемы и их аналоги для нелинейности:

$$W(i\omega) = H(\omega) e^{i\theta(\omega)}; \quad (2.53)$$

$$\bar{J}(A) = q(A) + iq'(A) = \bar{q}(A) e^{i\mu(A)}. \quad (2.54)$$

Подставим (2.53), (2.54) в (2.51):

$$H(\omega)\bar{q}(A)e^{i(\theta(\omega)+\mu(A))} = -1,$$

где

$$\bar{q}(A) = \sqrt{q^2(A) + q'^2(A)};$$

$$\mu(A) = \operatorname{arctg} \frac{q'(A)}{q(A)},$$

и запишем уравнения для амплитуд и фаз отдельно:

$$\begin{cases} H(\omega)\bar{q}(A) = 1; \\ \theta(\omega) + \mu(A) = -\pi + 2\pi n, \end{cases} \quad (2.55)$$

n – целое. Преобразуем (2.55), чтобы слева от знака равенства остались лишь характеристики линейной части и прологарифмируем обе части первого уравнения:

$$\begin{cases} 20\lg H(\omega) = 20\lg \frac{1}{\bar{q}(A)}; \\ \theta(\omega) + 2\pi n = -\pi - \mu(A), \end{cases} \quad (2.56)$$

Уравнения (2.56) называют уравнениями гармонического баланса в логарифмической форме. Коэффициенты гармонической линеаризации не зависят от частоты. Кроме того, фаза нелинейности обычно не превышает по модулю π , фазовая характеристика линейной части значительного числа систем пересекает $-\pi$ при $n = 0$, поэтому слагаемое $2\pi n$ часто опускают и (2.56) записывают в виде

$$\begin{cases} 20\lg H(\omega) = 20\lg \frac{1}{\bar{q}(A)}; \\ \theta(\omega) = -\pi - \mu(A). \end{cases}$$

Система уравнений (2.56) построена таким образом, что значения в левой части равенств определяются линейной частью и зависят только от частоты ω . Выражения справа от знака равенства зависят только от амплитуды A и характеризуют нелинейность. Решение системы определяется одновременным равенством по амплитуде и по фазе при некоторых A и ω . Аргументы функций левой и правой частей уравнений различны, поэтому графически процедура поиска решения состоит в следующем. Строится логарифмическая амплитудно-фазовая частотная характеристика (ЛАФЧХ) линейной части системы. Для нелинейности строится связанная общим аргу-

ментом A пара кривых $20\lg \frac{1}{\bar{q}(A)}$ и $-\pi - \mu(A)$, называемых шаблоном нелинейности. Масштаб шаблона по оси ординат должен быть таким же, как и при построении ЛАФЧХ линейной части, а по оси абсцисс – произвольным. Совместив оси шаблона и ЛАФЧХ и перемещая его вдоль оси абсцисс, находят точки, в которых шаблон пересекает на одной вертикали и амплитудную, и фазовую характеристики. На рис. 2.10 слева условно изображена ЛАФЧХ некоторой линейной части, а справа, в другой системе координат по абсциссе – шаблон нелинейности. По аргументу ЛАФЧХ определяется частота, а по аргументу шаблона – амплитуда автоколебаний.

Для определения устойчивости найденных колебаний можно применить следующий критерий. Если с увеличением амплитуды точка пересечения амплитудной части шаблона и логарифмической амплитудной частотной характеристики (ЛАЧХ) линейной части $20\lg H(\omega)$ выйдет из области, ограниченной ЛАЧХ и осью частот, то колебания устойчивы. Наоборот, если точка пересечения переместится внутрь области, это означает, что найдены неустойчивые колебания. Получить данный критерий можно на основе критерия

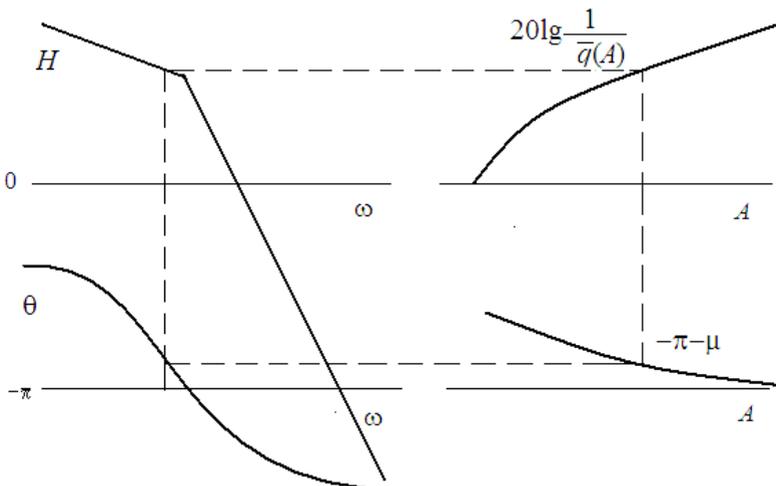


Рис. 2.10. Применение шаблона для поиска автоколебаний.
Условное изображение

Найквиста. Так как при поиске решения в уравнения гармонического баланса подставляются корни с нулевой действительной частью, линеаризованная система находится в точке решения на границе устойчивости. Согласно критерию Найквиста для устойчивой разомкнутой системы, замкнутая система будет находиться на границе устойчивости при выполнении условия:

$$W(i\omega) = -1. \quad (2.57)$$

В методе шаблонов аналог (2.57) приобретает вид

$$W(i\omega) = -1/\bar{J}(A) \quad (2.58)$$

и, следовательно, для устойчивости системы годограф $W(i\omega)$ не должен охватывать точку $-1/\bar{J}(A)$, которая перемещается при изменении амплитуды. Рассматривая охват годографом $W(i\omega)$ точки $-1/\bar{J}(A)$ в логарифмическом масштабе, получаем приведенный критерий.

Эквивалентная фазовая характеристика однозначной нелинейности равна нулю, поэтому фазовая часть шаблона вырождается в прямую $-\pi$, что существенно упрощает поиск решения. Частоты колебаний в этом случае легко найти по пересечениям прямой $-\pi$ и фазовой характеристики линейной части $\theta(\omega)$, и перемещение шаблона не требуется. Вычисляя значение $20 \lg H(\omega)$ в этих точках, получаем значение амплитудной части шаблона, откуда находим амплитуду. Частота автоколебаний определяется только линейной частью и не зависит от типа и параметров нелинейности, что соответствует результату, полученному в разд. 2.3 (формулы (2.39)). Схема решения задачи приведена на рис. 2.11.

Пример 2.11. Найдем методом шаблонов периодические режимы в системе, рассмотренной в примере 2.8 (нелинейность – реле с зоной нечувствительности). Линейная часть задана передаточной

функцией $W(s) = \frac{25}{s(0,2s+1)(0,5s+1)}$, параметры реле $\rho = 1$, $x_1 = 1$.

Применение шаблона нелинейности иллюстрирует рис. 2.12. Найдено два решения. Устойчивость решений можно определить с ис-

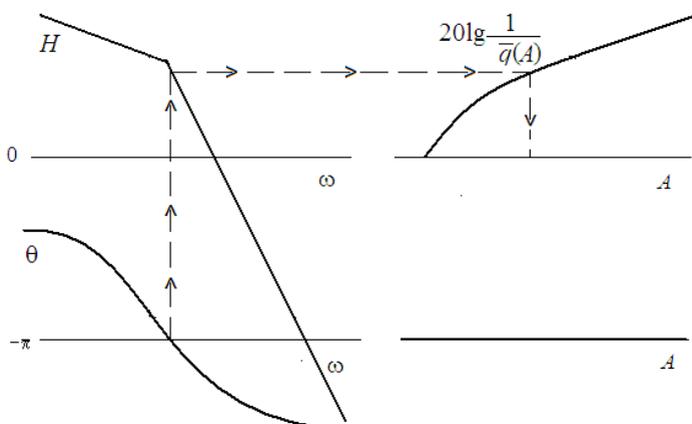


Рис. 2.11. Определение параметров автоколебаний методом шаблонов в случае однозначной нелинейности

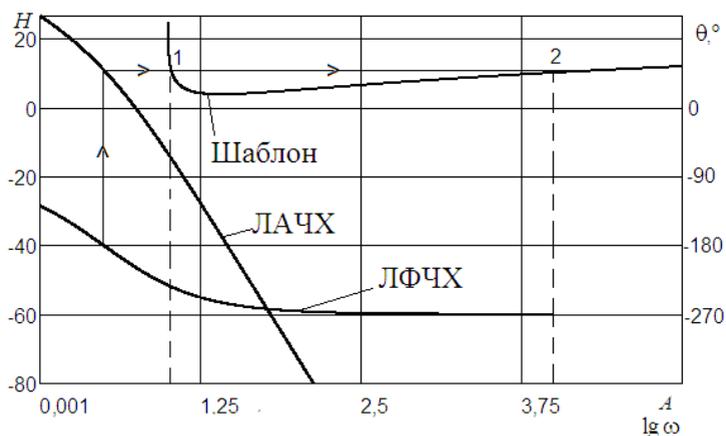


Рис. 2.12. Определение параметров автоколебаний методом шаблонов для нелинейности «реле с зоной нечувствительности»

пользованием правила, основанного на перемещении точки пересечения кривых при изменении амплитуды. Точка 1 при увеличении амплитуды заходит внутрь области, ограниченной ЛАЧХ, что соответствует неустойчивым колебаниям, точка 2 выходит из нее, что соответствует автоколебаниям.

Шаблоны рассмотренных ранее нелинейностей приведены в табл. 2.4. Для двузначных нелинейностей на одном графике изображены амплитудный (верхняя кривая) и фазовый шаблоны. Параметры нелинейностей приняты единичными. Фаза измеряется в градусах.

Таблица 2.4

Шаблоны нелинейностей

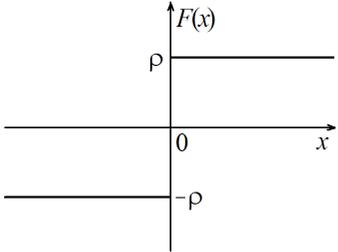
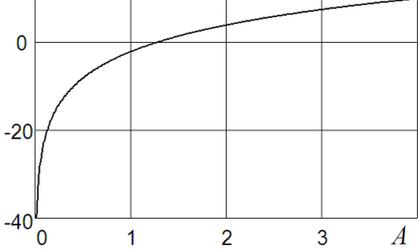
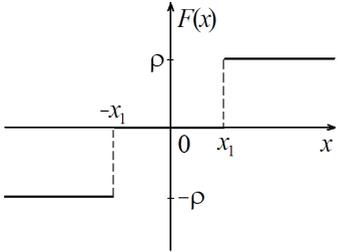
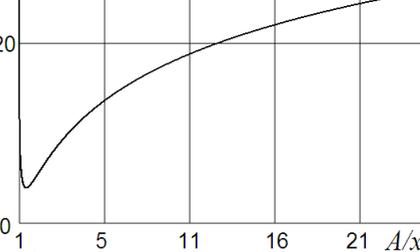
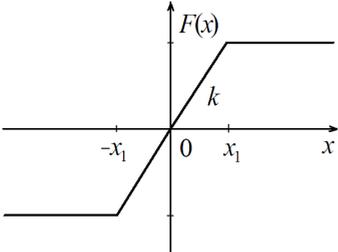
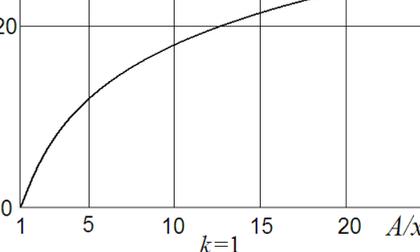
График нелинейности	$20 \lg \frac{1}{\bar{q}(A)}$, дБ, $-\pi - \mu(A)$, град.
	
	
	

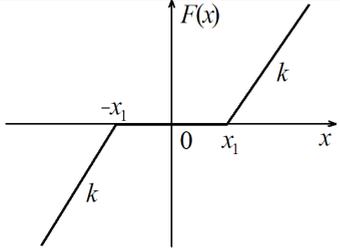
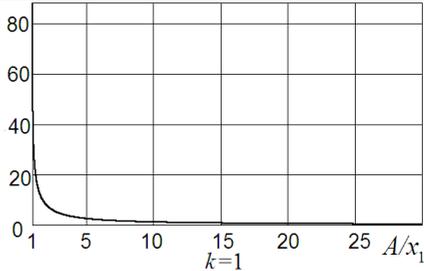
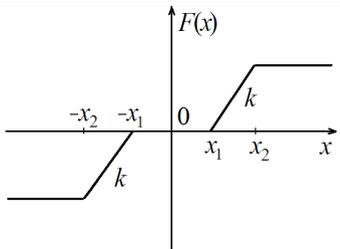
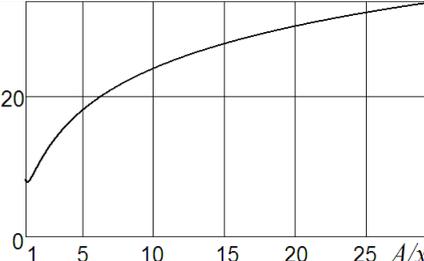
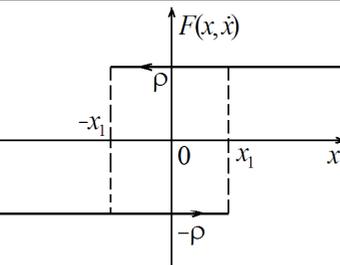
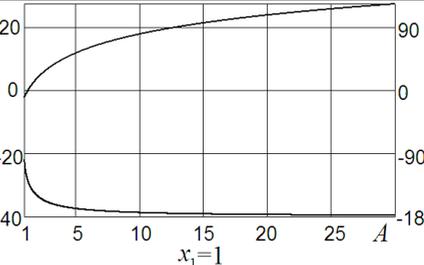
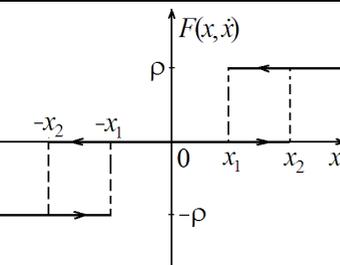
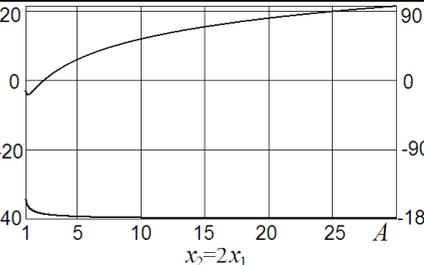
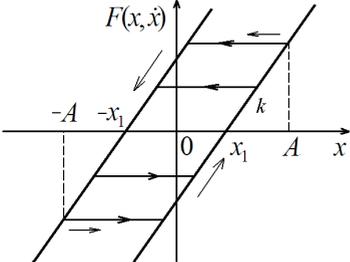
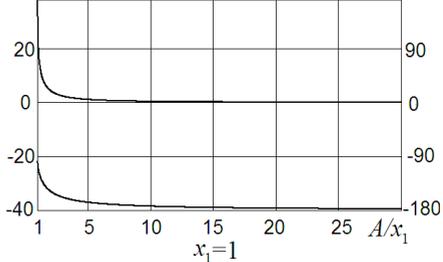
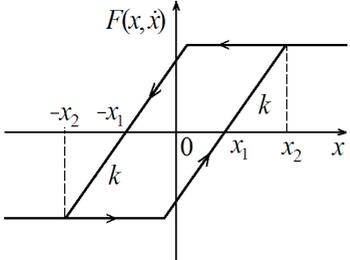
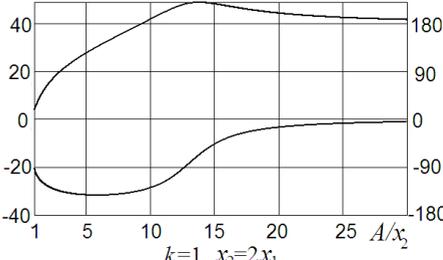
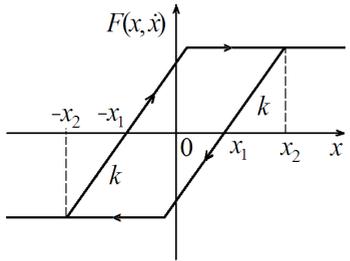
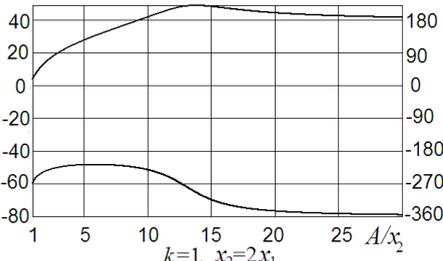
График нелинейности	$20 \lg \frac{1}{\bar{q}(A)}$, дБ, $-\pi - \mu(A)$, град.
	 <p style="text-align: center;">$k=1$</p>
	 <p style="text-align: center;">$k=1, x_2=2x_1$</p>
	 <p style="text-align: center;">$x_1=1$</p>
	 <p style="text-align: center;">$x_2=2x_1$</p>

График нелинейности	$20 \lg \frac{1}{\bar{q}(A)}$, дБ, $-\pi - \mu(A)$, град.
	
	
	

С широким применением вычислительной техники метод шаблонов как средство решения уравнений гармонического баланса можно считать устаревшим. Однако и настоящее время метод шаблонов представляет интерес как наглядное качественное средство графического анализа, позволяющее быстро ответить на вопросы:

- в каких диапазонах частот возможны автоколебания;
- сколько решений имеют уравнения гармонического баланса, устойчивы ли они;

- как изменятся параметры колебаний при модификации системы;
- как следует изменить линейную или нелинейную части для устранения автоколебаний или изменения их параметров.

2.5. Расчет несимметричных колебаний

При решении задачи в разд. 2.1 для ее упрощения было принято $u = 0$ (рис. 2.1). Пусть $u \neq 0$, $u = \text{const}$. Тогда сигнал на входе нелинейности запишем в следующем виде

$$x(t) = x_0 + \bar{x}(t), \quad (2.59)$$

где $\bar{x}(t) = A \sin \omega t$. Выход нелинейности уже необязательно будет симметричным. Коэффициенты ряда Фурье сигнала на выходе нелинейности теперь следует вычислять с учетом постоянной составляющей во входном сигнале по формулам

$$A_0(x_0, A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + A \sin \psi) d\psi; \quad (2.60)$$

$$a_k(x_0, A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + A \sin \psi) \sin k\psi d\psi; \quad (2.61)$$

$$b_k(x_0, A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + A \sin \psi) \cos k\psi d\psi. \quad (2.62)$$

Обозначим:

$$F_0(x_0, A) = A_0(x_0, A) / 2, \quad (2.63)$$

$$q(x_0, A) = a_1(x_0, A) / A, \quad (2.64)$$

$$q'(x_0, A) = b_1(x_0, A) / A. \quad (2.65)$$

Линеаризуем нелинейность, выделив, как и прежде, коэффициенты при централизованной периодической составляющей

$$y_l(t) = F_0(x_0, A) + \left(q(x_0, A) + \frac{q'(x_0, A)p}{\omega} \right) \bar{x}(t).$$

Дифференциальное уравнение, описывающее систему, в которой возможны несимметричные колебания, запишем в следующей форме

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)f(t), \quad (2.66)$$

где $f(t)$ – внешнее воздействие, управляющее или возмущающее; оператор $S(p)$, передающий воздействие $f(t)$, определяется точкой его приложения в системе. Если таких воздействий несколько, например n , то правая часть уравнения (2.66) примет вид

$$\sum_{j=1}^n S_j(p) f_j(t). \text{ Будем считать, что правая часть (2.66) меняется}$$

медленно по отношению к параметрам автоколебаний. В зависимости от порядка нулевого корня $S(p)$ это обеспечивается, например, выполнением хотя бы одного из соотношений $|f(t+T) - f(t)| \ll |f(t)|$ или $|pf(t)T| \ll |f(t)|$, T – период автоколебаний. В системах с астатизмом первого порядка условия примут вид $|pf(t+T) - pf(t)| \ll |pf(t)|$ или $|p^2 f(t)T| \ll |pf(t)|$.

Применяя метод малого параметра, решение (2.66) представим следующим образом:

$$x = x_0 + A \sin \omega t + \varepsilon x_B,$$

где $x_B = \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$ – высшие гармоники. Определяя, как и

в случае симметричных колебаний, разность выходов нелинейности при подстановке приближенного и точного решений и представляя их рядами Фурье, получаем выражения, которые совпадают с (2.22) – (2.24), отличаться при несимметричных колебаниях будут лишь значения соответствующих коэффициентов. Подставим полученные выражения в (2.66):

$$\begin{aligned} & Q(p)x_0 + Q(p)A_1 \sin \omega t + Q(p)\varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \\ & + R(p)F_0 + R(p)\left(F_1 + \frac{F_1'}{\omega} p\right) \sin \omega t + R(p) \sum_{k=2}^{\infty} F_k \sin(k\omega t + f_k) + \quad (2.67) \\ & + R(p)\varepsilon G_0 + \varepsilon \left(G_1 + \frac{G_1'}{\omega} p\right) \sin \omega t + \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} G_k \sin(k\omega t + g_k) = S(p)f(t) \end{aligned}$$

и выделим из (2.67) уравнения для каждой из гармоник. Уравнение для постоянных составляющих

$$Q(p)x_0 + R(p)F_0 + R(p)\varepsilon G_0 = S(p)f(t) \quad (2.68)$$

преобразуем следующим образом. Отбросим слагаемое порядка ε и подставим $p = 0$. Такая подстановка является эквивалентным преобразованием, так как умножение операторов $Q(p)$, $R(p)$ на константу означает умножение на нее свободного члена соответствующего полинома (напомним, что $p = \frac{d}{dt}$). В правой части сначала следует вычислить $S(p)f(t)$, и лишь потом отбросить переменные составляющие полученного выражения. Результат условно запишем через $S(0)f(t)$. Тогда (2.68) примет следующий вид:

$$Q(0)x_0 + R(0)F_0 = S(0)f(t). \quad (2.69)$$

Уравнение (2.69) называют уравнением постоянных составляющих.

Уравнения для первой и последующих гармоник аналогичны (2.25), полученным для симметричных колебаний, но коэффициенты рядов Фурье F_i и G_i получены для (2.59) по (2.60) – (2.62). Используя обозначения (2.63) – (2.65), запишем уравнение для первой гармоники:

$$\begin{aligned} Q(p)A_1 \sin \omega t + R(p) \left(q(x_0, A_1) + \frac{q'(x_0, A_1)}{\omega} p \right) A_1 \sin \omega t + \\ + \varepsilon \left(G_1 + \frac{G_1'}{\omega} p \right) \sin \omega t = 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Отбрасывая слагаемое порядка ε и подставляя $i\omega$ в характеристическое уравнение, соответствующее (2.70), получаем совместно с (2.69) систему для определения параметров несимметричных автоколебаний

$$\begin{cases} Q(0)x_0 + R(0)F_0(x_0, A) = S(0)f(t); \\ Q(i\omega) + R(i\omega)(q(x_0, A) + iq'(x_0, A)) = 0. \end{cases} \quad (2.71)$$

Как указывалось, таких параметров три – постоянное смещение x_0 , амплитуда A и частота колебаний ω . Первое уравнение (2.71), уравнение для постоянных составляющих, имеет действительные коэффициенты. Второе уравнение в (2.71), коэффициенты которого комплексные, распадается на два – для действительных и мнимых членов, поэтому для поиска трех вещественных параметров имеется три уравнения с вещественными коэффициентами. Один из методов решения системы (2.71) – сначала выразить смещение x_0

через амплитуду, т.е. найти $x_0(A)$ из уравнения для постоянных составляющих и затем подставить в остальные уравнения. Далее решение не отличается от случая симметричных колебаний.

При обосновании применения МГЛ в случае симметричных колебаний было получено условие фильтра (2.29). Очевидно, из того, что уравнения для первой и высших гармоник при симметричных и несимметричных колебаниях идентичны с точностью до коэффициентов, следует, что условие фильтра должно выполняться и в рассматриваемом случае.

Пусть линейная часть системы, изображенной на рис. 2.1, имеет нулевой полюс, т.е.

$$Q(p) = pQ_1(p),$$

а на вход подается постоянный сигнал $u(t) = u_1 = \text{const}$. Тогда $S(p) = Q(p)$, $S(p)u(t) = 0$, так как $pu_1 = 0$. Уравнение для постоянных составляющих (2.69) упрощается:

$$R(0)F_0(x_0, A) = 0. \quad (2.72)$$

Из (2.72) следует, что $F_0(x_0, A) = 0$, в противном случае должно будет выполняться $R(0) = 0$, что противоречит (2.72). Другими словами, линеаризация выхода нелинейности в астатической системе при постоянном входном воздействии не будет иметь постоянной составляющей.

В случае однозначной нелинейности система (2.71) примет вид

$$\begin{cases} Q(0)x_0 + R(0)F_0(x_0, A) = S(0)f(t); \\ \text{Re } Q(i\omega) + \text{Re } R(i\omega)q(x_0, A) = 0; \\ \text{Im } Q(i\omega) + \text{Im } R(i\omega)q(x_0, A) = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} Q(0)x_0 + R(0)F_0(x_0, A) = S(0)f(t); \\ q(x_0, A) = -\frac{\text{Re } Q(i\omega)}{\text{Re } R(i\omega)}; \\ \text{Re } R(i\omega) \text{Im } Q(i\omega) - \text{Re } Q(i\omega) \text{Im } R(i\omega) = 0. \end{cases} \quad (2.73)$$

Из (2.73) следует, что частота автоколебаний, как и в случае колебаний без постоянной составляющей, определяется линейной частью. Более того, сравнивая (2.73) с (2.39), получаем

$$q_C(A_C) = q(x_0, A),$$

где $q_C(A_C)$ – коэффициент гармонической линейзации для сигнала с нулевой постоянной составляющей; A_C – его амплитуда. Следует заметить, что равенство коэффициентов гармонической линейзации не означает равенства амплитуд колебаний.

В табл. 2.5 приведены коэффициенты гармонической линейации нелинейностей и их смещения, полученные с учетом постоянной составляющей. В табл. 2.6 представлены соответствующие коэффициенты двузначных нелинейностей. Для более компактного представления формул в табл. 2.5, 2.6 использованы следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \frac{x_1 + x_0}{A}, \quad \beta_1 = \frac{x_1 - x_0}{A},$$

$$\alpha_2 = \frac{x_2 + x_0}{A}, \quad \beta_2 = \frac{x_2 - x_0}{A},$$

$$\gamma = \frac{x_2 - x_1}{A}.$$

Сравнивая табл. 2.2 и 2.5, можно оценить, насколько усложняются коэффициенты по сравнению со случаем симметричных колебаний.

Таблица 2.5

Коэффициенты гармонической линейации типовых однозначных нелинейностей при несимметричных колебаниях

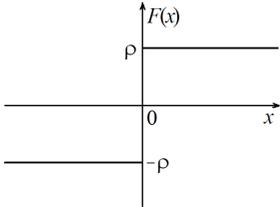
График нелинейности	$F(x_0, A), q(x_0, A)$
	$F(x_0, A) = \frac{2\rho}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{A},$ $q(x_0, A) = \frac{4\rho}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_0}{A}\right)^2}$ <p style="text-align: center;">при $A > x_0$</p>

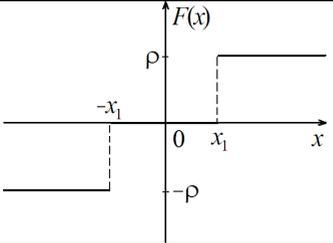
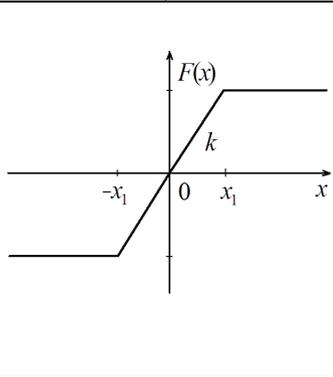
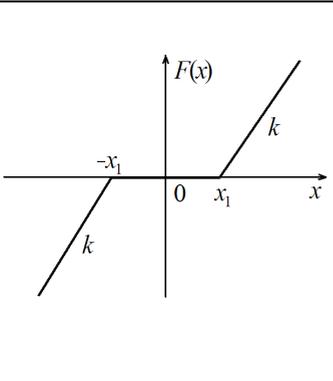
График нелинейности	$F(x_0, A)$, $q(x_0, A)$
	$F(x_0, A) = \frac{\rho}{\pi A} (\arcsin \alpha_1 - \arcsin \beta_1),$ $q(x_0, A) = \frac{4\rho}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \beta_1^2} + \sqrt{1 - \alpha_1^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1 + x_0$</p>
	$F(x_0, A) = \frac{k}{\pi} \left((x_1 + x_0) \arcsin \alpha_1 - \right.$ $\left. - (x_1 - x_0) \arcsin \beta_1 + \right.$ $\left. + A \sqrt{1 - \alpha_1^2} - A \sqrt{1 - \beta_1^2} \right)$ $q(x_0, A) = \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \alpha_1 + \arcsin \beta_1 + \right.$ $\left. + \beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1 + x_0$</p>
	$F(x_0, A) = kx_0 - \frac{k}{\pi} \left((x_1 + x_0) \times \right.$ $\left. \times \arcsin \alpha + A \sqrt{1 - \alpha_1^2} - A \sqrt{1 - \beta_1^2} \right)$ $q(x_0, A) = k - \frac{k}{\pi} \left(\arcsin \beta_1 + \arcsin \alpha_1 + \right.$ $\left. + \beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} + \alpha_1 \sqrt{1 - \alpha_1^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1 + x_0$</p>

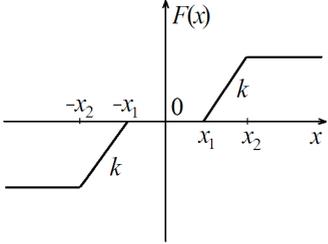
График нелинейности	$F(x_0, A), q(x_0, A)$
	$F(x_0, A) = \frac{k(x_2 - x_1)}{\pi} (\arcsin \gamma - \arcsin \beta_2) -$ $-\frac{k}{\pi} \{ (x_1 - x_0) \times (\arcsin \beta_2 - \arcsin \beta_1) -$ $- (x_2 + x_1) (\arcsin \gamma - \arcsin \beta_1) \} -$ $-\frac{kA}{\pi} \left(\sqrt{1 - \beta_2^2} - \sqrt{1 - \beta_1^2} - \sqrt{1 - \alpha_2^2} + \right.$ $\left. + \sqrt{1 - \beta_1^2} \right),$ $q(x_0, A) = \frac{k}{\pi} (\arcsin \beta_2 - \arcsin \beta_1 +$ $+ \arcsin \gamma - \arcsin \beta_1 +$ $+ \beta_1 \sqrt{1 - \beta_1^2} - \beta_2 \sqrt{1 - \beta_2^2} +$ $+ \alpha_1 \sqrt{1 - \alpha_1^2} - \alpha_2 \sqrt{1 - \alpha_2^2} +$ $+ \frac{2k}{\pi A} (x_1 - x_0) \times \left(\sqrt{1 - \beta_2^2} - \sqrt{1 - \beta_1^2} \right) -$ $+ \frac{2k}{\pi A} (x_1 + x_0) \times \left(\sqrt{1 - \alpha_2^2} - \sqrt{1 - \alpha_1^2} \right) +$ $+ \frac{2k(x_2 - x_1)}{\pi A} \times \left(\sqrt{1 - \beta_2^2} + \sqrt{1 - \beta_1^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_2 + x_0$</p>

Таблица 2.6

**Коэффициенты гармонической линеаризации типовых
двухзначных нелинейностей при несимметричных колебаниях**

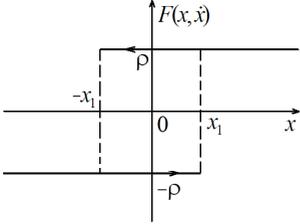
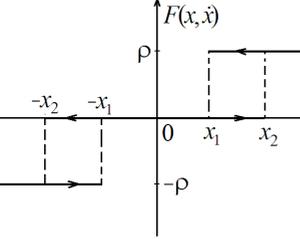
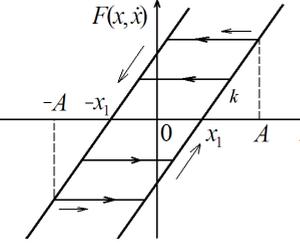
График нелинейности	Коэффициенты гармонической линеаризации $F(x_0, A)$, $q(x_0, A)$, $q'(x_0, A)$
	$F(x_0, A) = \frac{\rho}{A} (\arcsin \alpha_1 - \arcsin \beta_1),$ $q(x_0, A) = \frac{2\rho}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \beta_1^2} + \sqrt{1 - \alpha_1^2} \right),$ $q'(x_0, A) = -\frac{2\rho x_1}{\pi A^2} \text{ при } A \geq x_1 + x_0 $
	$F(x_0, A) = \frac{\rho}{2\pi} (\arcsin \alpha_2 - \arcsin \beta_2 + \arcsin \alpha_1 - \arcsin \beta_1),$ $q(x_0, A) = \frac{\rho}{\pi A} \left(\sqrt{1 - \beta_2^2} + \sqrt{1 - \alpha_2^2} + \sqrt{1 - \alpha_2^2} - \sqrt{1 - \alpha_1^2} \right);$ $q'(x_0, A) = -\frac{2\rho}{\pi A^2} (x_2 - x_1)$ <p align="center">при $A \geq x_2 + x_0$</p>
	$F(x_0, A) = kx_0,$ $q(x_0, A) = \frac{k}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \left(1 - \frac{2x_1}{A} \right) + 2 \left(1 - \frac{2x_1}{A} \right) \sqrt{\frac{x_1}{A} \left(1 - \frac{x_1}{A} \right)} \right),$ $q'(x_0, A) = -\frac{4x_1}{\pi A} \left(1 - \frac{x_1}{A} \right) \text{ при } A \geq x_1 + x_0 $

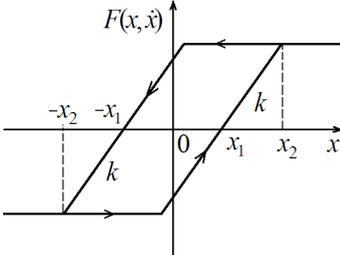
График нелинейности	Коэффициенты гармонической линеаризации $F(x_0, A)$, $q(x_0, A)$, $q'(x_0, A)$
	$F(x_0, A) = \frac{k}{2\pi} \left\{ (x_1 + x_0) \left(\arcsin \alpha_2 + \arcsin \frac{x_2 - 2x_1 - x_0}{A} \right) - (x_1 - x_0) \left(\arcsin \beta_2 + \arcsin \frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{A} \right) \right\} - \frac{k(x_2 - x_1)}{2\pi} \times$ $\times \left(\arcsin \frac{x_2 - 2x_1 - x_0}{A} - \arcsin \alpha_2 + \arcsin \beta_2 - \arcsin \frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{A} \right) -$ $- \frac{kA}{2\pi} \left(\sqrt{1 - \beta_2^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{x_2 - 2x_1 - x_0}{A} \right)^2} - \frac{kA}{2\pi} \left(\sqrt{1 - \alpha_2^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{A} \right)^2} \right) \right);$ $q(x_0, A) =$ $= \frac{k}{2\pi} \left(\arcsin \beta_2 + \arcsin \frac{x_2 - 2x_1 - x_0}{A} + \arcsin \alpha_2 - \arcsin \frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{A} \right) +$ $- \frac{k}{2\pi A} \left((x_2 - x_0) \sqrt{1 - \beta_2^2} + (x_2 + x_0) \sqrt{1 - \alpha_2^2} \right)$

График нелинейности	Коэффициенты гармонической линеаризации $F(x_0, A)$, $q(x_0, A)$, $q'(x_0, A)$
	$+(x_2 - 2x_1 + x_0) \sqrt{1 - \left(\frac{x_2 - 2x_1 + x_0}{A}\right)^2} +$ $+(x_2 - 2x_1 - x_0) \sqrt{1 - \left(\frac{x_2 - 2x_1 - x_0}{A}\right)^2},$ $q'(x_0, A) = -\frac{4x_1(x_2 - x_1)}{\pi A^2}$ <p>при $A \geq x_2 + x_0$</p>

Как видно из табл. 2.5 – 2.6, коэффициенты большинства нелинейностей в случае несимметричных колебаний описываются весьма сложными и громоздкими выражениями, что, как правило, не позволяет решить уравнения гармонического баланса аналитически. Тем не менее, наличие точных выражений для коэффициентов позволяет определить количество решений уравнений гармонического баланса и их локализацию. Более точно параметры колебаний могут быть определены численно и уточнены численным решением дифференциальных уравнений – моделированием. Начальные условия при этом могут быть выбраны исходя из оценок параметров колебаний, полученных МГЛ.

Пример 2.12. Найдем параметры автоколебаний в системе стандартной структуры. Линейная подсистема задана передаточной функцией $W = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$, нелинейность – реле с параметром

c . Входной сигнал $u(t) = u_0 + u_1 t$. Запишем уравнение замкнутой системы относительно переменной x :

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p x + k_1 F(x) = (T_1 p + 1)(T_2 p + 1) p u(t).$$

С учетом конкретного входного сигнала правая часть будет равна $k_1 u_1$. Линеаризуем реле с учетом несимметричных колебаний

$$F(x) \approx F_0(x_0, A) + q(x_0, A)x = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{A} + \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}} x$$

и выделим уравнение для постоянных составляющих

$$k \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{A} = u_1,$$

откуда $x_0 = A \sin \frac{\pi u_1}{2ck}$. Уравнение для переменной составляющей после подстановки $i\omega$ имеет вид

$$(T_1 + T_2)\omega^2 + i(T_1 T_2 \omega^2 - 1)\omega + k \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{x_0^2}{A^2}} = 0,$$

а с учетом полученного ранее выражения для x_0

$$(T_1 + T_2)\omega^2 + i(T_1 T_2 \omega^2 - 1)\omega + k \frac{4c}{\pi A} \cos^2 \frac{\pi u_1}{2ck} = 0.$$

Отсюда $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$, $A = k \frac{4c T_1 T_2}{\pi(T_1 + T_2)} \cos^2 \frac{\pi u_1}{2ck}$ и $x_0 = A \sin \frac{\pi u_1}{2ck}$.

Сравним полученные параметры с параметрами симметричных автоколебаний в данной системе. Симметричные автоколебания будут иметь место не только при $u(t) = 0$, но и при $u(t) = \text{const}$ вследствие астатизма системы, вызванного нулевым полюсом линейной части. Как было показано ранее в общем виде, для однозначных нелинейностей выполняется $q_C(A_C) = q(x_0, A)$, A_C – амплитуда симметричных автоколебаний. Выразим амплитуду несимметричных колебаний через амплитуду симметричных, приравняв коэффициенты гармонической линеаризации с учетом выражения для x_0 :

$$\frac{4c}{\pi A} \cos^2 \frac{\pi u_1}{2ck} = \frac{4c}{\pi A_C},$$

откуда $A = A_C \cos^2 \frac{\pi u_1}{2ck}$. Частота автоколебаний остается прежней.

Пример 2.13. Изменим точку приложения внешнего воздействия в системе из примера 2.12, разделив линейную подсистему на

две (рис. 2.13): $W_1 = \frac{k_1}{T_1 s + 1}$, $W_2 = \frac{k_2}{s(T_2 s + 1)}$. Внешнее воздействие
 прежнее – $u(t) = u_0 + u_1 t$. Запишем уравнение относительно пере-
 меной x :

$$(T_1 p + 1)(T_1 p + 1) p x + k_1 k_2 F(x) = k_2 (T_1 p + 1) u(t).$$

Отличие от примера 2.12 состоит в том, что правая часть уравнения
 равна $u^* = k_2(u_0 + T_2 u_1) + k_2 u_1 t$, т.е. является изменяющейся со
 временем. Предполагая, что изменения u^* за период автоколеба-
 ний незначительны, можем воспользоваться результатами примера
 2.12, заменив $u_1 = u^*$, $k = k_1 k_2$. Зависимость постоянной состав-
 ляющей от времени, таким образом, описывается выражением

$$x_0(t) = A \sin \frac{\pi(k_2(u_0 + T_2 u_1) + k_2 u_1 t)}{2c k_1 k_2}.$$

Результат, полученный в примере 2.13, иллюстрирует интерес-
 ную особенность автоколебательных процессов. В системе со вре-
 менем изменяется постоянная составляющая на входе нелинейно-
 сти. Постоянную составляющую сигнала на выходе можем запи-
 сать как $F_0(x_0(t))$, например, для реле, рассмотренного в приме-
 рах, $F_0 = \frac{2c}{\pi} \arcsin \frac{x_0}{A}$. Будем рассматривать выражение для посто-
 янной составляющей как функцию переменной x_0 . В отличие от
 реле, исходной функции, $F_0(x_0)$ непрерывна. Если основным явля-
 ется изменение x_0 , то можно считать, что периодические колеба-
 ния сглаживают разрывную нелинейность. Этот эффект получил
 название вибрационного сглаживания. Для использования вибра-
 ционного сглаживания система может быть изначально спроекти-

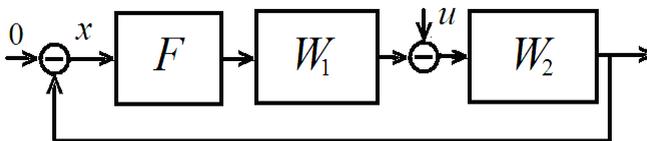


Рис. 2.13. Структурная схема САУ к примеру 2.13

рована как автоколебательная, или на систему может подаваться внешнее периодическое воздействие, вызывающее вынужденные колебания, методика расчета которых описывается далее. С помощью вибрационного сглаживания можно добиться компенсации не только разрывов функций, но и зон нечувствительности [11]. Следует, однако, понимать, что частота сглаживающих колебаний должна быть достаточно высокой, такой, чтобы их период можно было считать малым по сравнению с изменением полезных сигналов в системе, что потребует высокочастотных переключений исполнительных устройств, что не только предъявляет к ним жесткие требования, но может быть просто нежелательным.

2.6. Методика уточнения первой гармоники

При описании решения одной синусоидой в МГЛ старшие гармоники отбрасывались и при поиске решения никак не использовались. Такой подход позволил сократить число параметров, описывающих автоколебания, до двух (трех в случае несимметричных автоколебаний) и существенно упростить поиск решения. Очевидно, учет более чем одной гармоники повысит точность определения параметров автоколебаний.

Описание решения суммой нескольких гармоник приводит к необходимости разложения в ряд Фурье реакции нелинейности на сумму синусоид, что существенно затрудняет, если не делает невозможным, получение универсальных аналитических коэффициентов гармонической линеаризации и существенно усложняет поиск решения, описываемого в данном случае существенно большим набором параметров. Этот подход используется в обобщенном МГЛ, который подробно описан в гл. 4. В качестве компромисса, позволяющего сохранить простоту и наглядность метода, рассмотрим, как использовать старшие гармоники для уточнения параметров первой. Вначале опишем применение методики в случае симметричных колебаний.

Вернемся к уравнению (2.25), из которого определяются параметры первой гармоники. Прежде, при получении (2.34), слагаемое порядка ε

$$\varepsilon \left(G_1 + \frac{G'_1}{\omega} p \right) \sin \omega t \quad (2.74)$$

отбрасывалось. Выражение (2.74) описывает влияние на первую гармонику ошибки, вызываемой приближением одной синусоидой входа нелинейности (см. (2.24)). Запишем выражения для G_1 и G'_1 :

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_B + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_B \right) \sin \psi d\psi ; \\ G'_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_B + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_B \right) \cos \psi d\psi , \end{aligned} \quad (2.75)$$

где x_B – высшие гармоники, $x_B = \sum_{k=2}^{\infty} x_k$, где $x_k = A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$.

Формулы (2.75) не могут быть непосредственно использованы при вычислениях, так как x_B содержит бесконечное число слагаемых.

Ограничим количество учитываемых гармоник, номер старшей обозначим через n . По аналогии с (2.31), (2.32) преобразуем (2.75) к форме коэффициентов гармонической линейризации:

$$\Delta q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) p \sum_{k=2}^n x_k \right) \sin \psi d\psi ; \quad (2.76)$$

$$\Delta q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) \sum_{k=2}^n x_k + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) p \sum_{k=2}^n x_k \right) \cos \psi d\psi .$$

Коэффициенты (2.76) можно рассматривать как уточняющие поправки к коэффициентам гармонической линейризации по основной гармонике $q(A)$ и $q'(A)$. С учетом (2.76) линейризованное уравнение для определения первой гармоники, аналог (2.34), примет вид

$$Q(p)x_1 + R(p) \left(q(A) + \Delta q(A) + \frac{(q'(A) + \Delta q'(A))p}{\omega} \right) x_1 = 0 . \quad (2.77)$$

Подставляя в характеристическое уравнение для (2.77) $\lambda = i\omega$, получаем уравнение гармонического баланса, откуда можно найти уточненные параметры первой гармоники

$$Q(i\omega) + R(i\omega)(q(A) + \Delta q(A) + i(q'(A) + \Delta q'(A))) = 0. \quad (2.78)$$

При формировании (2.78) необходимо знать параметры старших гармоник A_k и φ_k , $k = 2, \dots, n$, которые используются при вычислении (2.76). Амплитуды A_k выразим через амплитуду первой гармоники $A_k = \delta_k A$, где δ_k – относительная амплитуда – играет роль малого параметра ε . Так как в дальнейшем не предполагается в ряде формул отбрасывать члены с A_k , явно записывать малый параметр δ_k не будем, при этом предполагая, что малый A_k имеет порядок ε . Учитывая, что принято [5, 8, 10] амплитуды старших гармоник и уравнения для них записывать через δ_k , такая запись также приводится.

Вернемся к уравнениям для старших гармоник (2.27), которые используем для определения их параметров. Слагаемое $R(p)\varepsilon G_k \sin(k\omega t + g_k)$ имеет больший порядок малости, чем

$$R(p)F_k \sin(k\omega t + f_k). \quad (2.79)$$

С другой стороны, при выполнении свойства фильтра (2.79) полагается малым по отношению к аналогичному слагаемому

$$R(p)\left(F_1 + \frac{F_1'}{\omega} p\right) \sin \omega t \text{ в (2.25). Поэтому уравнения для определения}$$

старших гармоник ($k = 2, \dots, n$):

$$Q(p)A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + R(p)F_k \sin(k\omega t + f_k) = 0, \quad (2.80)$$

где, напомним, коэффициенты F_k вычисляются как разложение в ряд Фурье сигнала на выходе нелинейности при учете только одной гармоники во входном сигнале и зависят от ее амплитуды A :

$$F_k = \sqrt{a_k^2(A) + b_k^2(A)}; \quad (2.81)$$

$$f_k = \text{arctg} \frac{b_k(A)}{a_k(A)}, \quad (2.82)$$

где

$$a_k(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin k\psi d\psi; \quad (2.83)$$

$$b_k(A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos k\psi d\psi. \quad (2.84)$$

Решение уравнения (2.80) ищется в форме $A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$ с ненулевой фазой, что не позволяет легко выразить коэффициенты гармонической линеаризации для k -й гармоники так, как это делалось для первой. Приведем уравнение (2.80) к форме (2.34), для чего вычислим коэффициенты ряда Фурье с учетом фазы φ_k k -й гармоники:

$$Q(p)x_k + R(p) \left(\tilde{a}_k(A, \varphi_k) + \frac{\tilde{b}_k(A, \varphi_k)}{k\omega} p \right) \frac{1}{A_k} x_k = 0, \quad (2.85)$$

где

$$\tilde{a}_k(A, \varphi_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin(k\psi + \varphi_k) d\psi; \quad (2.86)$$

$$\tilde{b}_k(A, \varphi_k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos(k\psi + \varphi_k) d\psi. \quad (2.87)$$

Фаза k -х гармоник отличается от фазы первой гармоники, принятой нулевой, что учтено в (2.86), (2.87) слагаемым φ_k .

Неизвестными в уравнении (2.85) являются амплитуды A_k и фазы φ_k старших гармоник, а амплитуда A и частота ω известны из уравнения для первой гармоники. Для определения A_k и φ_k используем подход, примененный при решении уравнения гармонического баланса (2.34). В характеристическое уравнение для (2.85)

$$Q(\lambda)x_k + R(\lambda) \frac{1}{A_k} \left(\tilde{a}_k(A, \varphi_k) + \frac{\tilde{b}_k(A, \varphi_k)}{k\omega} \lambda \right) = 0$$

подставим $\lambda = ik\omega$, что учитывает частоту k -й гармоники. Получим уравнение гармонического баланса для k -й гармоники

$$Q(ik\omega)A_k + R(ik\omega) \left(\tilde{a}_k(A, \varphi_k) + i\tilde{b}_k(A, \varphi_k) \right) = 0. \quad (2.88)$$

Несмотря на сходство с (2.37), решение (2.88) имеет некоторое отличие, связанное с особой структурой (2.86), (2.87). Вычислить (2.83), (2.84) существенно проще чем (2.86), (2.87). Используя соотношения

$$\begin{aligned}\sin(k\psi + \varphi_k) &= \cos \varphi_k \sin k\psi + \sin \varphi_k \cos k\psi; \\ \cos(k\psi + \varphi_k) &= \cos \varphi_k \cos k\psi - \sin \varphi_k \sin k\psi,\end{aligned}\quad (2.89)$$

выразим (2.86), (2.87) через (2.83), (2.84):

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(A, \varphi_k) &= a_k \cos \varphi_k + b_k \sin \varphi_k, \\ \tilde{b}_k(A, \varphi_k) &= b_k \cos \varphi_k - a_k \sin \varphi_k,\end{aligned}$$

откуда (для упрощения записи опустим аргументы \tilde{a}_k и \tilde{b}_k)

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(A, \varphi_k) + i\tilde{b}_k(A, \varphi_k) &= (a_k + ib_k)(\cos \varphi_k - i \sin \varphi_k) = \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}} e^{-i\varphi_k}.\end{aligned}$$

Представляя линейную часть в виде $W(i\omega) = R(i\omega)/Q(i\omega)$, запишем (2.88) с использованием амплитуд и фаз:

$$-|W(i\omega)| e^{i \arg W(i\omega)} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k}} e^{-i\varphi_k} = A_k,$$

откуда получаем искомые формулы для вычисления амплитуды A_k и фазы φ_k

$$A_k = |W(i\omega)| \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad (2.90)$$

$$\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} + \arg W(i\omega) + \pi. \quad (2.91)$$

Итак, по известным амплитуде первой гармонике A и частоте автоколебаний ω получены амплитуды и фазы $n-1$ старших гармоник. Зная их, можно вычислить поправочные коэффициенты гармонической линеаризации по первой гармонике (2.76) и сформировать уравнение (2.77).

Заметим, что формулы (2.90), (2.91) можно также получить из следующих соображений. Требуется определить параметры старших гармоник сигнала x на входе нелинейности (см. рис. 2.1), но коэффициенты в разложении y получены при учете во входном сигнале лишь одной гармоники (см. (2.83), (2.84)). Таким образом, уравнения (2.85) описывают результат преобразования линейным элементом и элементом сравнения старших гармоник нелинейности, порожденных первой. Таким образом, после нелинейности (сигнал y) амплитуда и фаза k -й гармоники равны соответственно

F_k, f_k (см. (2.81), (2.82)), а после прохождения линейной части (сигнал z) $|W(ik\omega)|F_k, f_k + \arg W(ik\omega)$ (выражения справедливы при $t \rightarrow \infty$, т.е. в установившемся режиме). Окончательно, после элемента сравнения, изменяющего лишь знак при нулевом входном сигнале, приходим к (2.90), (2.91).

Приведем альтернативную запись с учетом представления $\delta_k = A_k / A$. Вводят обозначения $q_k = \tilde{a}_k / A$ и $q'_k = \tilde{b}_k / A$. Эти величины называют коэффициентами гармонической линейаризации по k -й гармонике. Следует обратить внимание, что как и при вычислении коэффициентов линейаризации по первой гармонике, в знаменателе стоит амплитуда первой (а не k -й) гармоники входного сигнала. Уравнение (2.82) в этих обозначениях примет вид

$$Q(p)x_k + R(p) \left(q_k(A, \varphi_k) + \frac{q'_k(A, \varphi_k)}{k\omega} p \right) \frac{1}{\delta_k} x_k = 0,$$

откуда $\delta_k = |W(ik\omega)| \sqrt{r_k^2 + s_k^2}$, $\varphi_k = \arctg \frac{s_k}{r_k} + \arg W(ik\omega) + \pi$, где

$$r_k = a_k / A, \quad s_k = b_k / A.$$

При вычислении интегралов (2.76) можно вновь воспользоваться соотношениями (2.89). Прежде всего, представим (2.76) $n-1$ слагаемыми, каждое из которых описывает вклад одной гармоники, и подставим вместо x_1 и x_k их выражения:

$$\begin{aligned} \Delta q(A) &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \sin(k\psi + \varphi_k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial px} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k\omega A_k \cos(k\psi + \varphi_k) \right) \sin \psi d\psi; \\ \Delta q'(A) &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \sin(k\psi + \varphi_k) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial px} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k\omega A_k \cos(k\psi + \varphi_k) \right) \cos \psi d\psi; \end{aligned}$$

Вновь используя (2.89), запишем (2.76) в виде

$$\begin{aligned}\Delta q(A) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A_k}{A} (I_{1k} \cos \varphi_k + I_{2k} \sin \varphi_k); \\ \Delta q'(A) &= \sum_{k=2}^n \frac{A_k}{A} (I_{3k} \cos \varphi_k + I_{4k} \sin \varphi_k),\end{aligned}\tag{2.92}$$

где

$$\begin{aligned}I_{1k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \sin k\psi + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial px} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k \omega A_k \cos k\psi \right) \sin \psi d\psi;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{2k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \cos k\psi - \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial px} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k \omega A_k \sin k\psi \right) \sin \psi d\psi;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{3k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \sin k\psi + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial px} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k \omega A_k \cos k\psi \right) \cos \psi d\psi;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{4k} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \cos k\psi - \right. \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial px} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k \omega A_k \sin k\psi \right) \cos \psi d\psi.\end{aligned}$$

Подынтегральные выражения I_{1k} и I_{3k} , I_{2k} и I_{4k} попарно совпадают, что можно использовать для сокращения объема вычислений.

Итак, процедура уточнения решения МГЛ состоит в следующем. Сначала следует решить уравнение гармонического баланса (2.37) и определить амплитуду первой гармоники и частоту автоколебаний. Затем по (2.90), (2.91) вычислить параметры старших гар-

моник, используя которые получить поправочные коэффициенты по (2.92). Подставляя их в (2.78), получим уточненное уравнение гармонического баланса, из которого найдем уточненные A и ω . Зная уточненные параметры первой гармоники, при необходимости можно вычислить старшие и представить как решение задачи сигнал на входе нелинейности с учетом старших гармоник

$$x(t) = A \sin \omega t + \sum_{k=0}^n A_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Описанная выше процедура может служить основой итерационного метода, хотя обычно ограничиваются одним шагом уточнения параметров первой гармоники, вычисление же старших гармоник носит, скорее, вспомогательный характер. Запишем линеаризованный сигнал на выходе нелинейности, полученный согласно принятым допущениям

$$\begin{aligned} y_l(t) &= \left(q(A) + \Delta q(A) + \frac{(q'(A) + \Delta q'(A))p}{\omega} \right) A \sin \omega t + \\ &+ \sum_{k=2}^n \left(\tilde{a}_k(A, \varphi_k) + \frac{\tilde{b}_k(A, \varphi_k)}{k\omega} p \right) \sin(\omega t + \varphi_k) = \\ &= \left(q(A) + \Delta q(A) + \frac{(q'(A) + \Delta q'(A))p}{\omega} \right) x_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^n \left(\tilde{a}_k(A, \varphi_k) + \frac{\tilde{b}_k(A, \varphi_k)}{k\omega} p \right) \frac{1}{A_k} x_k = \\ &= \left(q(A) + \Delta q(A) + \frac{(q'(A) + \Delta q'(A))p}{\omega} \right) x_1 + \\ &+ \sum_{k=2}^n \left(q_k(A, \varphi_k) + \frac{q_k(A, \varphi_k)}{k\omega} p \right) \frac{1}{\delta_k} x_k. \end{aligned}$$

Поправочные коэффициенты, с помощью которых учитывается влияние старших гармоник, присутствуют только в первом слагаемом. Таким образом, согласно данной методике параметры первой гармоники вычисляются с учетом воздействия на нелинейность старших гармоник (хотя и описанных приближенно), сами же старшие гармоники вычисляются исходя из реакции нелинейности

на одну лишь первую, но вычисленную с учетом конечного числа высших.

С учетом поправочных коэффициентов эквивалентная амплитудно-фазовая характеристика однозначной нелинейности равна $J(A) = q(A) + \Delta q(A) + i\Delta q'(A)$, ее эквивалентная амплитудная характеристика $\bar{J}(A) = \sqrt{(q(A) + \Delta q(A))^2 + (\Delta q'(A))^2}$, эквивалентная фазовая $\mu(A) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta q'(A)}{q(A) + \Delta q(A)} \neq 0$. Наличие ненулевой фазовой

(или мнимой) составляющей усложняет решение уравнений гармонического баланса и не позволяет записать уравнения для частоты колебаний без членов, определяемых нелинейностью. Таким образом, вывод о том, что в системах с однозначной нечетной нелинейностью частота автоколебаний полностью определяется исключительно линейной подсистемой, справедлив только при учете первой гармоники. С учетом старших гармоник частота автоколебаний будет зависеть от типа и параметров нелинейности как при двузначных, так и при однозначных нелинейностях.

Описанную выше методику можно применить и для уточнения параметров несимметричных колебаний. Вновь обратимся к уравнению (2.67), но теперь вклад (2.24) уже не будем считать пренебрежимо малым, как и при уточнении параметров симметричных колебаний. Отличие (2.67), которое следует учесть, – наличие дополнительного параметра x_0 в описании сигнала на входе нелинейности. Теперь приближение решения уравнения (2.67) при учете n гармоник

$$x = x_0 + A \sin \omega t + \sum_{k=2}^n A_k \sin(k\omega t + \varphi_k). \quad (2.93)$$

С учетом поправки уравнение для постоянной составляющей (2.68) примет вид:

$$Q(0)x_0 + R(0)F_0(x_0, A) + R(0)G_0(x_0, A) = S(0)f(t),$$

где $G_0(x_0, A)$ определяется следующим образом:

$$G_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0 + x_1, px_1) x_B + \frac{\partial}{\partial px} F(x_0 + x_1, px_1) px_B \right) d\psi.$$

Смещение, определяемое нелинейностью, вычисляется, как и прежде,

$$F_0(x_0, A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + A \sin \psi) d\psi .$$

Переходя к приближенному представлению высших гармоник, получим выражение для определения коэффициента G_0 :

$$G_0(x_0, A) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^n \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0 + A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \sin(k\psi + \varphi_k) + \frac{\partial}{\partial px} F(x_0 + A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k\omega A_k \cos(k\psi + \varphi_k) \right) d\psi . \quad (2.94)$$

Уравнение для первой гармоники получается из (2.67) аналогично (2.77) и имеет такую же структуру

$$Q(p)x_1 + R(p) \left(q(x_0, A) + \Delta q(x_0, A) + \frac{(q'(x_0, A) + \Delta q'(x_0, A))p}{\omega} \right) x_1 = 0 ,$$

но коэффициенты гармонической линейризации, основные и поправочные, следует вычислять с учетом постоянной составляющей. Основные вычисляются по (2.60) – (2.65), а поправки к ним по формулам

$$\Delta q(x_0, A) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0 + A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \sin(k\psi + \varphi_k) + \frac{\partial}{\partial px} F(x_0 + A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k\omega A_k \cos(k\psi + \varphi_k) \right) \sin \psi d\psi ; \quad (2.95)$$

$$\Delta q'(x_0, A) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_0 + A \sin \psi, \omega A \cos \psi) A_k \sin(k\psi + \varphi_k) + \frac{\partial}{\partial px} F(x_0 + A \sin \psi, \omega A \cos \psi) k\omega A_k \cos(k\psi + \varphi_k) \right) \cos \psi d\psi . \quad (2.96)$$

Коэффициенты G_0 , Δq , $\Delta q'$ указаны зависящими только от постоянной составляющей x_0 и амплитуды первой гармоники A , хотя, как следует из (2.94) – (2.96), параметры старших гармоник A_k , φ_k также используются при их вычислении. Так сделано, чтобы подчеркнуть, что коэффициенты G_0 , Δq , $\Delta q'$ используются в уравнениях для определения именно указанных параметров:

$$\begin{cases} Q(0)x_0 + R(0)F_0(x_0, A) + R(0)G_0(x_0, A) = S(0)f(t); \\ Q(i\omega) + R(i\omega)(q(x_0, A) + \Delta q(x_0, A) + i(q'(x_0, A) + \Delta q'(x_0, A))) = 0. \end{cases} \quad (2.97)$$

Уравнения для старших гармоник формируются так же, как и в случае симметричных колебаний. Вычисление их параметров производится по (2.90), (2.91), но с применением (2.60) – (2.62), в которых учтена постоянная составляющая:

$$A_k = |W(ik\omega)| \sqrt{a_k^2(x_0, A) + b_k^2(x_0, A)}; \quad (2.98)$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{b_k(x_0, A)}{a_k(x_0, A)} + \arg W(ik\omega) + \pi, \quad (2.99)$$

где

$$a_k(x_0, A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + A \sin \psi) \sin k\psi d\psi;$$

$$b_k(x_0, A) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + A \sin \psi) \cos k\psi d\psi.$$

Таким образом, при расчете несимметричных колебаний с применением описанной методики учета старших гармоник наряду с первой гармоникой дополнительно уточняется постоянная составляющая. Старшие гармоники, вычисленные по (2.98), (2.99) уже на основе уточненного решения (2.97), могут быть включены в ответ в виде (2.93).

Рассмотрим, для простоты изложения применительно к симметричным колебаниям, как изменится процедура вычисления старших гармоник, если в уравнении (2.80) учесть слагаемое $R(p) \varepsilon G_k \sin(k\omega t + g_k)$. Уравнение (2.82) приобретает вид ($k = 2, \dots, n$):

$$Q(p)x_k + R(p)\left(\tilde{a}_k + \Delta\tilde{a}_k + \frac{\tilde{b}_k + \Delta\tilde{b}_k}{k\omega}p\right)\frac{1}{A_k}x_k = 0, \quad (2.100)$$

где

$$\Delta a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_j + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_j \right) \sin k\psi d\psi;$$

$$\Delta b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=2}^n \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x_1, px_1) x_j + \frac{\partial}{\partial px} F(x_1, px_1) px_j \right) \cos k\psi d\psi;$$

$$\varepsilon G_k = \sqrt{\Delta a_k^2 + \Delta b_k^2};$$

$$g_k = \operatorname{arctg} \frac{\Delta b_k}{\Delta a_k};$$

$$\Delta\tilde{a}_k = \Delta a_k \cos \varphi_k + \Delta b_k \sin \varphi_k;$$

$$\Delta\tilde{b}_k = \Delta b_k \cos \varphi_k - \Delta a_k \sin \varphi_k,$$

коэффициенты \tilde{a}_k , \tilde{b}_k вычисляются по (2.86), (2.87). Как и при вычислении амплитуд старших гармоник, роль малого параметра ε выполняют поправочные коэффициенты.

Если из уравнения (2.80) параметры старших гармоник можно было получить весьма просто, так как они зависели только от первой, то, как следует из (2.100), теперь потребуется решить систему из $2(n-1)$ уравнений, так как все старшие гармоники входят в уравнение для каждой из них. Как уже было показано, для нечетно-симметричных нелинейностей гармоники с четными номерами равны нулю. Если учитывать только одну старшую, а именно третью, система (2.100) сводится к одному комплексному уравнению при $k=3$. Как правило, учета третьей гармоники достаточно для существенного повышения точности определения параметров автоколебаний.

В случае, если нелинейность $F(x, \dot{x})$ описывается кусочно-линейной функцией, на участках линейности вторая производная ее будет равна нулю, поэтому представление (2.22) до первого порядка малости на этих участках будет точным. Следовательно, уравнение (2.100) позволяет практически точно вычислить параметры старших гармоник [11].

Если нелинейность однозначная нечетно-симметричная, расчетные формулы существенно упрощаются. Уравнение для первой гармоники примет вид

$$Q(i\omega) + R(i\omega)(q(A) + \Delta q(A) + i\Delta q'(A)) = 0.$$

Уточнение будем производить с учетом 3-й гармоники. Тогда с учетом нечетной симметрии нелинейности (см. (2.92) при $k = 3$)

$$\Delta q(A) = I_{13}\delta_3 \cos \varphi_3,$$

$$\Delta q'(A) = I_{43}\delta_3 \sin \varphi_3,$$

$$I_{13} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi d\psi,$$

$$I_{43} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \cos 3\psi \cos \psi d\psi. \quad (2.101)$$

Проинтегрируем (2.101) по частям:

$$\begin{aligned} I_{43} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \cos 3\psi \cos \psi d\psi = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} \frac{dF(A \sin \psi)}{d\psi} \cos 3\psi d\psi = \\ &= \frac{1}{\pi A} F(A \sin \psi) \cos 3\psi \Big|_0^{2\pi} + 3 \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin 3\psi d\psi = \\ &= 3 \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin 3\psi d\psi = 3 \frac{a_3}{A} = 3r_3. \end{aligned}$$

Окончательно, с учетом нечетности интегрируемых функций

$$\Delta q(A) = h_3 \delta_3 \cos \varphi_3,$$

$$\Delta q'(A) = 3r_3 \delta_3 \sin \varphi_3,$$

$$h_3 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dx} F(A \sin \psi) \sin 3\psi \sin \psi d\psi, \quad (2.102)$$

$$r_3 = \frac{4}{\pi A} \int_0^{\pi/2} F(A \sin \psi) \sin 3\psi d\psi. \quad (2.103)$$

Заметим, что для рассматриваемых нелинейностей $b_k = s_k A = 0$. Из (2.103) следует, что поправочный коэффициент по первой гармонике определяется коэффициентом третьей гармоники, поэтому для

уточнения с учетом 3-й гармоники достаточно вычислить интегралы (2.102) и (2.103).

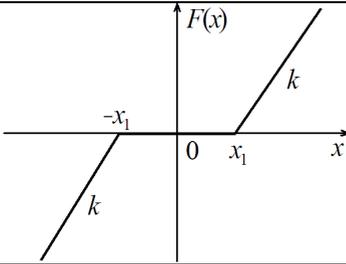
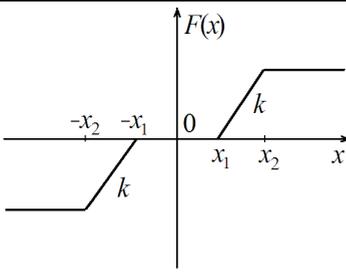
Коэффициенты h_3 и r_3 для некоторых однозначных нечетно-симметричных нелинейностей приведены в табл. 2.7.

Вспомогательные коэффициенты для двузначных нелинейностей не приводятся вследствие их большого количества и громоздкости. Они могут быть найдены, например, в [5].

Таблица 2.7

Вспомогательные коэффициенты гармонической линейзации типовых однозначных нелинейностей

График нелинейности	h_3, r_3
	$h_3 = 0,$ $r_3 = \frac{4\rho}{3\pi A}$
	$h_3 = \frac{4\rho x_1^2 (3A^2 - 4x_1^2)}{\pi A^4 \sqrt{A^2 - x_1^2}},$ $r_3 = \frac{4\rho (A^2 - 4x_1^2)}{3\pi A^4} \sqrt{A^2 - x_1^2}$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>
	$h_3 = -\frac{4kx_1^3}{\pi A^4} \sqrt{A^2 - x_1^2}$ $r_3 = \frac{4kx_1 (A^2 - x_1^2)}{3\pi A^4} \sqrt{A^2 - x_1^2}$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>

График нелинейности	$h_3, \quad r_3$
	$h_3 = -\frac{4kx_1^3}{\pi A^4} \sqrt{A^2 - x_1^2}$ $r_3 = -\frac{4kx_1^3}{\pi A^4} \sqrt{A^2 - x_1^2}$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_1$</p>
	$h_3 = \frac{4k}{\pi A^4} \left(x_2^3 \sqrt{A^2 - x_2^2} - x_1^3 \sqrt{A^2 - x_1^2} \right),$ $r_3 = \frac{4k}{3\pi A^4} \left((x_2 A^2 - x_1 A^2 - x_2^3 + 4x_1 x_2^2) \times \right.$ $\left. \times \sqrt{A^2 - x_2^2} - 3x_1^3 \sqrt{A^2 - x_1^2} \right)$ <p style="text-align: center;">при $A \geq x_2$</p>

При учете большего числа гармоник количество вспомогательных коэффициентов, которые требуется вычислить, существенно возрастает. В этом случае для единообразия удобно использовать обозначения Δa_{ij} и Δb_{ij} – коэффициенты, учитываемые при вычислении i -й гармоники, описывающие влияние на нее j -й гармоники, полученные при разложении по синусам и косинусам соответственно. Например, в этих обозначениях $h_3 = \Delta a_{13}$.

Пример 2.14. Исследуем зависимость частоты автоколебаний от параметров однозначной нелинейности. Возьмем систему стандартной структуры (см. рис. 2.1), линейная часть которой задана

передаточной функцией $W(s) = \frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$, нелинейность –

ограничение, автоколебания симметричные. Будем изменять коэффициент усиления k в линейной зоне, оставляя величину ограничения постоянной, равной 1. Таким образом, параметр $x_1 = 1/k$ (см. рис. 1.3). Автоколебания в данной системе будут иметь место при

$k > \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$ (см. пример 2.5). Сначала решим задачу с учетом только первой гармоники. Частота автоколебаний в этом случае определяется только линейной частью и равна $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$, а амплитуда

находится из условия

$$q(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{Ak} + \frac{1}{Ak} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2 k^2}} \right) = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Для уточнения параметров первой гармоники учтем влияние третьей. Запишем уравнения гармонического баланса с учетом поправок, используя следующие обозначения: A , ω – параметры автоколебаний, найденные с учетом только первой гармоники; A_1 , ω_1 – уточненные значения. Получим:

$$\begin{cases} q(A_1) + \Delta q(A, \omega) = (T_1 + T_2)\omega_1^2; \\ \Delta q'(A, \omega) = (T_1 T_2 \omega_1^2 - 1)\omega_1, \end{cases} \quad (2.104)$$

где

$$\Delta q(A, \omega) = -\frac{16(A^2 - 1/k^2)^2}{3\pi^2 A^8 k^2} |W(i3\omega)| \cos \arg(-W(i3\omega)), \quad (2.105)$$

$$\Delta q'(A, \omega) = \frac{16(A^2 - 1/k^2)^3}{3\pi^2 A^8} |W(i3\omega)| \sin \arg(-W(i3\omega)). \quad (2.106)$$

Чтобы показать зависимость от частоты, определенной по первой гармонике, выражения (2.105), (2.106) записаны через параметр ω , величина которого, как уже было найдено, составляет $\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$. Ре-

шая систему (2.104) относительно A_1 и ω_1 , находим уточненные параметры первой гармоники автоколебаний.

Сравним найденные уточненные значения с параметрами первой гармоники автоколебаний в системе (обозначим их как \bar{A} и $\bar{\omega}$), полученными путем численного решения дифференциальных уравнений системы при $T_1 = 0,2$ с, $T_2 = 0,5$ с. Результаты расчетов приведены в табл. 2.8. Для указанных параметров линейной под-

системы при учете только первой гармоники получаются $A = 0,181314$, $\omega = 3,16227$ рад/с.

Таблица 2.8

Параметры автоколебаний при учете старших гармоник

k	A	ω	\bar{A}	$\bar{\omega}$
7	0,1440	3,159	0,1432	3,162
8	0,1625	3,153	0,1622	3,157
9	0,1690	3,147	0,1698	3,148
10	0,1732	3,140	0,1742	3,140
11	0,1760	3,135	0,1773	3,132
12	0,1783	3,130	0,1794	3,126
13	0,1799	3,126	0,1812	3,122
14	0,1812	3,123	0,1825	3,117
15	0,1823	3,119	0,1836	3,114
20	0,1855	3,110	0,1868	3,102
25	0,1870	3,105	0,1883	3,095
30	0,1878	3,103	0,1892	3,092
35	0,1883	3,101	0,1897	3,089
40	0,1887	3,099	0,1900	3,087

Как следует из табл. 2.8, учет третьей гармоники позволяет выявить зависимость параметров автоколебаний от характеристик однозначной нелинейности, что было невозможно при учете только одной гармоники. Относительная амплитуда третьей гармоники $\delta_3 = A_3 / A$ составила около 0,014, фаза φ_3 около -50 град. При этом относительная величина поправочных коэффициентов была достаточно мала: так, при $k = 10$ $q = 6,648$, $\Delta q = -0,0157$, $\Delta q' = 0,0432$. Заметим, что в первой строке таблицы приведены данные для $k = 7$, что, строго говоря, соответствует линейной системе на границе устойчивости.

Частоты колебаний, полученные моделированием и решением уравнений гармонического баланса при учете одной гармоники совпадают. Это легко объяснить: корни характеристического уравнения линейной системы в этом случае $\lambda = \pm i\omega$, именно это значе-

ние используется для формирования уравнений гармонического баланса. Амплитуда линейных колебаний зависит от начальных условий. При моделировании они были подобраны таким образом, чтобы получить амплитуду, равную ширине зоны линейности, хотя при других начальных условиях она может быть меньшей.

2.7. Применение метода гармонической линеаризации к расчету параметров вынужденных колебаний

Ранее в данной главе при расчете автоколебаний при внешнем воздействии предполагалось, что внешнее воздействие можно считать постоянным (медленно меняющимся за период) по отношению к сигналу на входе нелинейности. Пусть теперь на вход подается периодический сигнал, не удовлетворяющий указанным выше условиям. При этом, очевидно, в системе будут наблюдаться периодические колебания и в том случае, если без внешнего воздействия автоколебаний в системе не было. Такие колебания называют вынужденными. Частота таких колебаний равна частоте внешнего воздействия. Такое явление называют захватом частоты.

Рассмотрим расчет вынужденных колебаний с использованием метода гармонической линеаризации. Представим модель входного воздействия следующим образом:

$$f(t) = A_B \sin \omega_B t, \quad (2.107)$$

где A_B – амплитуда внешнего воздействия; ω_B – его частота. Подставим (2.107) в (2.66):

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = S(p)A_B \sin \omega_B t. \quad (2.108)$$

Для упрощения изложения предположим, что нелинейность не порождает постоянной составляющей при симметричном аргументе, тогда решение (2.108) следует искать в виде

$$x(t) = A \sin(\omega_B t + \varphi). \quad (2.109)$$

Решение (2.108) отличается от принятого ранее в МГЛ, так как частота колебаний считается известной, неизвестными параметрами являются амплитуда колебаний A и фаза φ . Несмотря на сходство по искомым параметрам с задачей поиска параметров старших гармоник, уравнение (2.108) существенно отличается от (2.80) или его аналога для расчета несимметричных колебаний, так как, в отличие от них, является неоднородным.

Проведем линеаризацию нелинейности. Коэффициенты гармонической линеаризации вычислить проще, если фазы входного сигнала и тригонометрических функций, по которым производится разложение, равны. Для этого разложим выход нелинейности по системе функций с фазой φ . Тогда

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\omega t + \varphi), \omega A \cos(\omega t + \varphi)) \sin(\omega t + \varphi) d(\omega t + \varphi);$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin(\omega t + \varphi), \omega A \cos(\omega t + \varphi)) \cos(\omega t + \varphi) d(\omega t + \varphi)$$

или, обозначая $\psi = \omega t + \varphi$, приходим к формулам

$$q(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \sin \psi d\psi; \quad (2.110)$$

$$q'(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi, \omega A \cos \psi) \cos \psi d\psi. \quad (2.111)$$

Выражения (2.110), (2.111) совпадают с полученными ранее при расчете симметричных автоколебаний, что позволяет использовать полученные ранее выражения для q и q' .

Частоты (2.107) и (2.109) одинаковы, что позволяет выразить (2.107) через (2.109)

$$\begin{aligned} f(t) &= A_B \sin(\omega_B t + \varphi - \varphi) = \\ &= A_B \cos \varphi \sin(\omega_B t + \varphi) - A_B \sin \varphi \cos(\omega_B t + \varphi) = \\ &= \left(\cos \varphi - \frac{p}{\omega_B} \sin \varphi \right) \frac{A_B}{A} x. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Гармонически линеаризуя (2.108) и заменяя (2.107) через (2.112), приходим к уравнению

$$Q(p)x + R(p) \left(q(A) + \frac{q'(A)p}{\omega_B} \right) x = S(p) \left(\cos \varphi - \frac{p}{\omega_B} \sin \varphi \right) \frac{A_B}{A} x,$$

которое является однородным и может быть записано в форме (2.34)

$$\left(Q(p) + S(p) \left(\frac{P}{\omega_B} \sin \varphi - \cos \varphi \right) \frac{A_B}{A} \right) x + R(p) \left(q(A) + \frac{q'(A)p}{\omega_B} \right) x = 0. \quad (2.113)$$

Чтобы решить (2.113), подставим в его характеристическое уравнение $i\omega_B$. Следует обратить внимание, что производится подстановка не искомой переменной, как делалось ранее, а известной частоты внешнего воздействия. Получим следующее уравнение:

$$(Q(i\omega_B)A - S(i\omega_B)A_B (\cos \varphi - i \sin \varphi)) + R(i\omega_B)A(q(A) + iq'(A)) = 0,$$

или

$$(Q(i\omega_B)A - S(i\omega_B)A_B e^{-i\varphi}) + R(i\omega_B)A(q(A) + iq'(A)) = 0, \quad (2.114)$$

из которого и находим искомые параметры A и φ .

Как было показано ранее, для того, чтобы решение (2.113) могло быть описано в первом приближении одной гармоникой, необходимо, чтобы линейная часть системы обладала свойством фильтра (2.29). Применительно к (2.113) это означает выполнение

$$\left| \frac{R(i\omega_B)}{Q(i\omega_B)A - S(i\omega_B)A_B e^{-i\varphi}} \right| \gg \left| \frac{R(i\omega_B)}{Q(i\omega_B)A - S(i\omega_B)A_B e^{-i\varphi}} \right|. \quad (2.115)$$

Несмотря на то, что частота известна до решения, проверить выполнение (2.115) заранее нельзя, так как, в отличие от (2.29), в (2.115) фигурируют оба неизвестных параметра – амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Заметим, что остается требование отрицательности вещественных частей корней уравнения

$$Q(p)A + S(p) \left(\frac{P}{\omega_B} \sin \varphi - \cos \varphi \right) A_B = 0,$$

удовлетворение которого также проверяется лишь при наличии решения (2.114).

На основе (2.114) легко установить связь параметров вынужденных колебаний

$$e^{-i\varphi} = A \frac{Q(i\omega_B) + R(i\omega_B)(q(A) + iq'(A))}{S(i\omega_B)A_B}. \quad (2.116)$$

Если уравнение (2.114) не имеет положительного действительного корня A при выполнении условий (2.115), то это означает, что колебаний на частоте ω_B в системе нет. В таком случае говорят,

что захват частоты внешнего воздействия не произошел. С использованием (2.116) можно получить условия захвата внешних колебаний

$$\frac{A}{A_B} \left| \frac{Q(i\omega_B) + R(i\omega_B)(q(A) + iq'(A))}{S(i\omega_B)} \right| = 1.$$

Методику расчета несимметричных вынужденных колебаний легко получить на основе только что описанной методики расчета колебаний без постоянной составляющей и способов расчета несимметричных автоколебаний, изложенных ранее.

Пример 2.15. На систему стандартной структуры (см. рис. 2.1), имеющей линейную часть $W(p) = \frac{1}{p(Tp + 1)}$ и нелинейную – реле

$F(x) = \text{sgn } x$, подается входной сигнал $u(t) = \sin \Omega t$. В системе без входного сигнала автоколебания отсутствуют. Частота вынуждающих колебаний $\omega_B = \Omega$. Дифференциальное уравнение относительно x :

$$p(Tp + 1)x + \text{sgn } x = (Tp + 1)p \left(\cos \varphi - \frac{p}{\pi} \sin \varphi \right) \frac{1}{A}.$$

Уравнение для поиска параметров вынужденных колебаний (2.114) принимает вид

$$i\Omega(Ti\Omega + 1)(A - e^{-i\varphi}) + 4/\pi = 0.$$

Решив его, получим параметры вынужденных колебаний. Решение при $\Omega = 2$ рад/с, $T = 0,5$ с таково: $A = 1,266$, $\varphi = 0,323$ рад. В результате моделирования получены следующие величины: $A = 1,263$, $\varphi = 0,329$ рад/с.

2.8. Расчет систем с несколькими нелинейностями

Применение метода гармонической линеаризации не ограничено системами, структура которых может быть представлена рис. 2.1. В основе МГЛ лежит предположение, что сигнал на входе нелинейности с достаточной для практических задач точностью может быть описан одной гармоникой. Если в системе имеется несколько нелинейностей, причем периодический сигнал на входе каждой из них близок к синусоидальному, можно выполнить гармоническую

линеаризацию нелинейности по формулам (2.31) – (2.33) и сформировать уравнение типа приведенного выше уравнения гармонического баланса (2.37). Очевидно, возможны два варианта – нелинейности соединены последовательно или разделены линейной подсистемой.

При последовательном соединении нелинейностей их следует рассматривать как единый нелинейный элемент и проводить линеаризацию совместно, рассматривая выход последней из группы нелинейностей относительно входа первой. С учетом того, что нелинейности предполагаются статическими, такая линеаризация не отличается от линеаризации нелинейной функции – сложной функции, образованной функциями, описывающими нелинейности в последовательном соединении. Такой подход, говоря в терминах МГЛ, позволяет не отбрасывать высшие гармоники на выходе нелинейностей, являющейся входом другой.

Если нелинейности разделены линейной подсистемой, которую обозначим $\tilde{W}(s)$, то для применения (2.31) – (2.33) необходимо потребовать выполнение свойства фильтра $|\tilde{W}(i\omega)| \gg |\tilde{W}(ik\omega)|$, что означает существенное уменьшение старших гармоник относительно первой.

В случае, когда линейная подсистема, разделяющая нелинейности, свойством фильтра не обладает, нелинейности и разделяющую их линейный элемент можно рассматривать как динамическую нелинейность, а линеаризацию проводить на основе анализа реакции сформированной таким образом динамической нелинейности на синусоидальный входной сигнал.

Проиллюстрируем линеаризацию динамической нелинейности на примере.

Пример 2.16. Динамическая нелинейность образована двумя однозначными статическими нелинейностями – реле и реле с зоной нечувствительности, или трехпозиционным реле, – разделенными линейным динамическим элементом – интегратором [10] (рис. 2.14). Требуется вычислить коэффициенты гармонической линеаризации по первой гармонике для расчета симметричных автоколебаний.

Нелинейность может быть описана дифференциальным уравнением

$$\dot{y} = c \operatorname{sgn} x - \frac{1}{2} c (\operatorname{sgn}(y + d) + \operatorname{sgn}(y - d)), \quad (2.117)$$

где x – сигнал на входе нелинейности, а y – на ее выходе. Начальные условия выберем, исходя из существования в системе периодического процесса.

Решение (2.117) можно получить методом припасовывания (последовательного решения линейных на сегментах систем). Процессы в динамической нелинейности в зависимости от того, на какие сегменты статических нелинейностей попадает их аргумент, приведены в табл. 2.9.

Таблица 2.9

Описание процессов в динамической нелинейности

Условие	$x > 0$	$x < 0$
$y > d$	$\dot{y} = 0$; $y = y_{01}$	$\dot{y} = -2c$; $y = -2ct + y_{04}$
$-d < y < d$	$\dot{y} = c$; $y = ct + y_{02}$	$\dot{y} = -c$; $y = ct + y_{05}$
$y < -d$	$\dot{y} = -2c$; $y = -2ct + y_{03}$	$\dot{y} = 0$; $y = ct + y_{06}$

Пусть на вход динамической нелинейности подается синусоидальный сигнал с периодом ω : $x(t) = A \sin \omega t$. Предположим, что

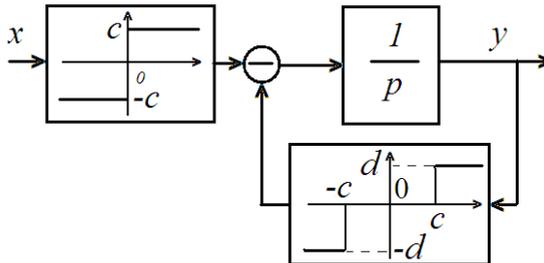


Рис. 2.14. Структурная схема динамической нелинейности

на элемент сравнения по обратной связи поступает 0. Тогда y , сигнал на выходе интегратора, в течение первого полупериода будет линейно расти. Его рост прекратится, когда y превысит d и тем самым переключит сегмент трехпозиционного реле, и на вход интегратора будет поступать 0. При смене знака x сигнал y будет убывать до достижения $-d$. При синусоидальном входном сигнале состояние нелинейности при $y = \pm d$, а также состояния $x > 0, y < -d$, $x < 0, y > d$, образуют множество меры нуль и не влияют на величину коэффициентов гармонической линейаризации. Время перехода от одного крайнего положения к другому составляет $\tilde{t} = 2d/c$, причем знак x не должен измениться за время перехода. Следовательно, результаты будут справедливы при

$$\omega < \frac{\pi c}{2d}. \quad (2.118)$$

При большей частоте y не будет достигать максимума d и будет находиться в зоне нечувствительности второй нелинейности. Следовательно, в этом случае ее можно будет исключить из рассмотрения и ограничиться линейаризацией реле, коэффициенты гармонической линейаризации которого известны. Длительность участка, на котором $y = \text{const}$, определим как разность полупериода и времени перехода между крайними положениями $\bar{t} = \frac{\pi}{\omega} - \tilde{t} = \frac{\pi c - 2d\omega}{\omega c}$. Таким образом, выход динамической нелинейности – ограниченные треугольные колебания при $y(0) = -d$.

На рис. 2.15 изображены входной x и выходной y сигналы нелинейности при $c = 2$, $d = 1,5$. Раскладывая полученный процесс как функцию времени в ряд Фурье на отрезке $[0, 2\pi/\omega]$ и разделив коэффициенты a_1, b_1 на амплитуду входного сигнала, получим

$$q(A, \omega) = \frac{2c \sin(\omega 2d/c)}{\pi A \omega}; \quad (2.119)$$

$$q'(A, \omega) = -\frac{4c \sin^2(\omega d/c)}{\pi A \omega}. \quad (2.120)$$

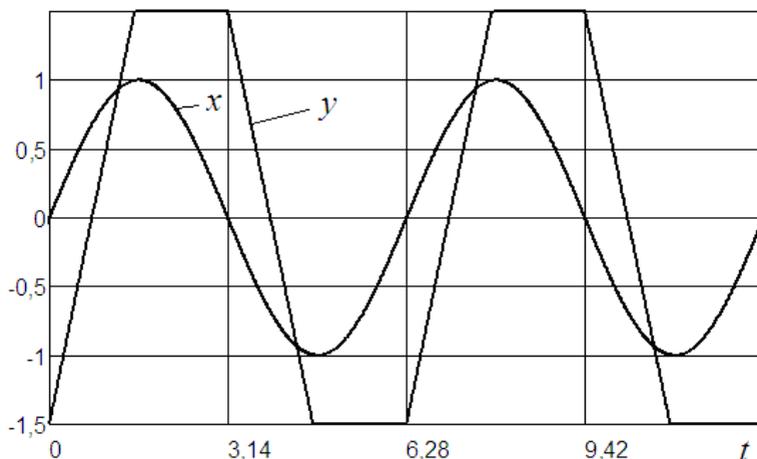


Рис. 2.15. Процессы в динамической нелинейности

Заметим, что (2.119), (2.120) зависят от частоты колебаний ω , чего не наблюдалось у статических нелинейностей, поэтому уравнения гармонического баланса

$$Q(i\omega) + R(i\omega)(q(A, \omega) + iq'(A, \omega)) = 0 \quad (2.121)$$

решить несколько сложнее. Напомним, что решив (2.121), следует проверить не только выполнение условия фильтра и устойчивости колебаний, но и (2.118). В противном случае коэффициенты (2.119), (2.120) следует заменить на коэффициент гармонической линеаризации реле $\frac{4c}{\pi A}$ и решить (2.121) повторно.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Что такое автоколебания? Могут ли автоколебания существовать в линейной системе?
2. Чем отличаются автоколебания от линейных колебаний?
3. Почему для описания автоколебаний удобно использовать ряд Фурье?

4. Какова стандартная структурная схема нелинейной автоматической системы?
5. Какими свойствами должна обладать система для приведения ее к стандартной форме?
6. Как осуществляется гармоническая линейаризация при симметричном входном сигнале?
7. Чем отличается результат гармонической линейаризации для однозначных и двузначных нелинейностей?
8. Что такое эквивалентная передаточная функция?
9. Как используется эквивалентная амплитудно-фазовая характеристика нелинейности?
10. Каким условиям должна удовлетворять система для применения метода гармонической линейаризации?
11. Какой физический смысл имеет условие фильтра?
12. Каким образом получить уравнения гармонического баланса?
13. Каковы особенности решения уравнений гармонического баланса в системах с однозначной нечетной нелинейностью?
14. Как определить устойчивость найденного решения?
15. В чем состоит метод шаблонов?
16. Чем отличаются шаблоны однозначных и двузначных нечетно-симметричных нелинейностей?
17. Сколько решений могут иметь уравнения гармонического баланса?
18. Для чего и как строят области устойчивости?
19. Как осуществляется гармоническая линейаризация нелинейности при несимметричных автоколебаниях?
20. Сколькими параметрами описываются несимметричные колебания? Каковы уравнения гармонического баланса для этого случая?

21. В каких случаях возникают несимметричные автоколебания?
22. Как можно уточнить решение уравнений гармонического баланса?
23. Каков алгоритм учета старших гармоник при решении задачи поиска параметров автоколебаний?
24. Какие эффекты в системах можно обнаружить, учитывая старшие гармоники?
25. Что такое вибрационное сглаживание?
26. Какие колебания называют вынужденными?
27. Что такое захват частоты?
28. Как рассчитать параметры вынужденных колебаний? Какие это параметры?
29. Как найти параметры автоколебаний в системе с несколькими нелинейностями? Каким условиям должна удовлетворять система?
30. В чем состоит особенность гармонической линеаризации динамических нелинейностей?
31. Для системы стандартной структуры с линейной частью $W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$ и нелинейностью типа «реле с зоной нечувствительности» рассчитайте параметры колебаний при входном сигнале $u = u_0$.
32. Как следует изменить условие задачи 31, чтобы в системе имели место несимметричные колебания при нулевом входном сигнале?
33. В задаче 31 измените входной сигнал на синусоидальный. Как следует рассчитывать колебания в системе? Колебания какого типа будут иметь место?
34. Укажите, при каких частотах в системе с линейной частью $W(p) = \frac{k(T_4 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}$ возможны автоколебания при нали-

чи однозначной нечетной нелинейности? Изменяются ли эти условия, если нелинейность заменить на двузначную?

35. Возможно ли для системы из задачи 34 подобрать параметры так, чтобы для нелинейности типа «ограничение» автоколебания не существовали?

36. Исследуйте зависимость частоты автоколебаний от величины ограничения с постоянным коэффициентом.

37. Выберите однозначную нелинейность и найдите параметры автоколебаний в системе с линейной частью $W(p) = \frac{k(T_3 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$.

Затем сместите нелинейность: $\tilde{F}(x) = F(x) + \alpha$. Вновь определите параметры автоколебаний. Как изменились параметры?

38. Даны системы стандартной структуры с линейными частями $W_1 = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$, $W_2 = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)}$, $W_3 = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)}$. В каких из этих систем возможны автоколебания? Какие из них можно рассчитать с учетом только первой гармоники? Какими свойствами должна обладать нелинейность для существования в них автоколебаний? Проверьте свои выводы расчетами.

Глава 3. МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

3.1. Статистическая линеаризация нелинейных функций

Для расчета основных характеристик стационарных случайных процессов в нелинейных системах управления разработан приближенный метод, названный методом статистической линеаризации (МСЛ) [12].

Основная идея метода заключается в замене нелинейного элемента $F(x)$ со случайным входным сигналом $x(t)$ параллельным соединением линейных звеньев, представленных постоянными коэффициентами k_0 ; k_1 , как это показано на рис.3.1.

Существует два варианта МСЛ. Согласно первому варианту, эти коэффициенты должны иметь такие значения, чтобы математическое ожидание и дисперсия выходного сигнала \hat{y} линеаризованной системы совпадали с теми же характеристиками выходного сигнала y исходной нелинейной системы. В этом случае справедливы следующие выражения для коэффициентов статистической линеаризации

$$k_0 = \frac{m_y}{m_x}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}. \quad (3.1)$$

Второй вариант МСЛ основан на минимизации среднеквадратической ошибки

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (y - F_0 - k_1 x^0)^2 p(x) dx \quad (3.2)$$

где $F_0 + k_1 x^0$ – приближенное представление выходного сигнала y ; $p(x)$ – функция плотности вероятности входного сигнала x , которая, согласно одному из основных допущений для обоих вариантов МСЛ, сохраняется в формулах для расчета моментов выход-

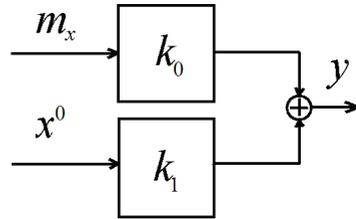


Рис. 3.1. Схема замены нелинейности коэффициентами статистической линеаризации

ного сигнала y . В общем случае это допущение можно считать эвристическим, но для нормального закона распределения показана [13] его корректность. Вообще говоря, этот подход во многом подобен подходу МГЛ, где выходной сигнал нелинейности разлагается в ряд по системе ортонормированных функций, выбранной для входного сигнала. Это можно считать общим принципом, позволяющим проводить линеаризацию.

Согласно вышесказанному, ошибка J является математическим ожиданием квадрата невязки между точным сигналом y и его приближенным представлением. Поэтому, обозначив оператор правой части (3.2) традиционным для математического ожидания символом M , после возведения в квадрат функции невязки можем записать преобразованное выражение для среднеквадратической ошибки

$$J = M[y^2] + F_0^2 + k_1^2 D_x - 2F_0 m_y - 2k_1 M[yx^0]. \quad (3.3)$$

Находя минимум J как функции двух переменных F_0 и k_1 , получим

$$F_0 = m_y; \quad (3.4)$$

$$k_1 = M[yx^0] / D_x. \quad (3.5)$$

Выражения для k_0 в обоих вариантах МСЛ совпадают, а для k_1 существенно различаются.

В этом разделе предлагается модификация первого варианта МСЛ, как более простого для вычислений, с использованием описания нелинейных элементов с помощью КЛФ, наиболее распространенных при практических расчетах.

Предположим, что характеристика нелинейного элемента состоит из n линейных участков, а на его вход подается стационарный случайный нормальный процесс $x(t)$ с математическим ожиданием m_x и дисперсией $D_x = \sigma_x^2$.

Воспользуемся общей формулой для описания непрерывных однозначных кусочно-линейных функций в каноническом базисе

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{j=1}^n b_j |x - x_j|. \quad (3.6)$$

Вычислим математическое ожидание выходного процесса $y(t)$. Обозначим интеграл вероятности входного процесса x как

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt, \quad \text{а его производную} \quad -$$

$$\Phi^{(1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad \text{Вычислим математическое ожидание вы-$$

ходного процесса y , исходя из основного допущения метода статистической линейризации, что его плотность распределения та же, что и у входного сигнала:

$$\begin{aligned} m_y &= \frac{1}{\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi^{(1)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) dx = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{\sigma_x} \left\{ a_0 \int_a^b \Phi^{(1)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) dx + a_1 \int_a^b \Phi^{(1)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) dx + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n b_j \int_a^b |x-x_j| \Phi^{(1)}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right) dx \right\} = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \frac{1}{\sigma_x} \left\{ a_0 I_1 + a_1 I_2 + \sum_{j=1}^n b_j I_3 \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Проводим замену переменных $\xi = \frac{x-m_x}{\sigma_x}$; $x = \sigma_x \xi + m_x$, тогда

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} I_1 = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \sigma_x \int_{\frac{a-m_x}{\sigma_x}}^{\frac{b-m_x}{\sigma_x}} \Phi^{(1)}(\xi) d\xi = \sigma_x;$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} I_2 = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \sigma_x \int_{\frac{a-m_x}{\sigma_x}}^{\frac{b-m_x}{\sigma_x}} (m_x + \sigma_x \xi) \Phi^{(1)}(\xi) d\xi = m_x \sigma_x;$$

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} I_3 = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \sigma_x \int_{\frac{a-m_x}{\sigma_x}}^{\frac{b-m_x}{\sigma_x}} |m_x + \sigma_x \xi - x_j| \Phi^{(1)}(\xi) d\xi =$$

$$= \sigma_x \left\{ (m_x - x_j) \left[1 - 2\Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right] + 2\sigma_x \Phi^{(1)}\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right\}. \quad (3.8)$$

Итак, в результате получим

$$m_y = a_0 + a_1 m_x + \sum_{j=1}^n b_j \left\{ (m_x - x_j) \left[1 - 2\Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right] + 2\sigma_x \Phi^{(1)}\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right\}.$$

Вычислим среднеквадратическое значение выходного сигнала:

$$\begin{aligned} \bar{y}^2 &= \frac{1}{\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Phi^{(1)}\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) dx = a_0 + 2a_0 a_1 m_x + a_1^2 (m_x^2 + \sigma_x^2) + \\ &+ 2a_0 \sum_{j=1}^n b_j \left\{ (m_x - x_j) \left[1 - 2\Phi\left(\frac{x - m_x}{\sigma_x}\right) \right] + 2\sigma_x \Phi^{(1)}\left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x}\right) \right\} + \\ &+ 2a_1 \sum_{j=1}^n b_j \left\{ \left[m_x (m_x - x_j) + \sigma_x^2 \right] \left[1 - 2\Phi\left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x}\right) \right] + \right. \\ &\times \left[1 + 2 \left(\Phi\left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x}\right) \right) \right] + 2\sigma_x \left[(m_x - x_i) \Phi^{(1)}\left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x}\right) - \right. \\ &\left. \left. - (m_x - x_i) \Phi^{(1)}\left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x}\right) \right] \right\} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \left[\sigma_x^2 + (m_x - x_k)^2 \right]. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Тогда

$$D_y = \bar{y}^2 - m_y^2; k_0 = \frac{m_y}{m_x}, k_1 = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}.$$

Обобщим полученный результат на случай кусочно-линейных функций с конечным числом точек разрыва первого рода. Формула для вычисления математического ожидания выходного сигнала в

этом случае после выкладок, аналогичных предыдущим, будет иметь вид

$$m_y = a_0 + a_1 m_x + \sum_{j=1}^n \left\{ b_j \left[(m_x - x_j) \left[1 - 2\Phi \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \right] + 2\sigma_x \Phi^{(1)} \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \right] + c_j \left[1 - 2\Phi \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \right] \right\}. \quad (3.10)$$

Обобщенная формула среднего квадрата стационарного случайного процесса с учетом точек разрыва нелинейности имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{y}^2 = & a_0 + 2a_0 a_1 m_x + a_1^2 (m_x^2 + \sigma_x^2) + 2a_0 \sum_{j=1}^n \left\{ [c_j + b_j (m_x - x_j)] \times \right. \\ & \times \left[1 - 2\Phi \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \right] + 2\sigma_x \Phi^{(1)} \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \left. \right\} + \\ & + 2a_1 \sum_{j=1}^n \left\{ [b_j \{m_x (m_x - x_j) + \sigma_x^2\} + c_j m_x] \left[1 - 2\Phi \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \right] + \right. \\ & + 2c_j \sigma_x m_x \Phi^{(1)} \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) + 2b_j \sigma_x m_x \Phi^{(1)} \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \left. \right\} + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ [b_i b_j [(m_x - x_i)(m_x - x_j) + \sigma_x^2] + \right. \\ & + c_j [b_j (m_x - x_i) + c_i]] \left[1 - 2 \left(\Phi \left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x} \right) - \Phi \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) \right) \right] - \\ & - 2b_i b_j \sigma_x \left[(m_x - x_i - b_i c_j) \Phi^{(1)} \left(\frac{x_j - m_x}{\sigma_x} \right) + \right. \\ & + (m_x - x_i + b_i c_j) \Phi^{(1)} \left(\frac{x_i - m_x}{\sigma_x} \right) \left. \right] \left. \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ b_k^2 [\sigma_x^2 + (m_x - x_k)^2] + b_k c_k (m_k - x_k) + c_k^2 \right\}. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Полученный результат удобен тем, что все операции интегрирования, кроме вычисления интеграла вероятностей, проведены аналитически в общем виде, что повышает точность вычисления коэффициентов статистической линейаризации численными методами.

Пример 3.1. Пусть на нелинейный элемент типа «ограничение»

$$f(x) = 0.5 \left[|x+1| - |x-1| \right],$$

где $b_1 = 0,5$; $b_2 = -0,5$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$, $a_0 = a_1 = 0$, подается нормальный случайный процесс $x(t)$ с $m_x = 1/2$ и $\sigma_x = 1$. Используя выражения (1.15), (1.16), получим $m_y = 0,33$, $\overline{y^2} = 0,57$. Учитывая, что дисперсия $D_y = \overline{y^2} - m_y^2 = 0,47$, для коэффициентов статистической линейаризации получим $k_0 = 0,66$; $k_1 = 0,69$.

3.2. Статистические характеристики линейных динамических звеньев

Выведем формулы для спектральной плотности и дисперсии выходного сигнала линейной стационарной асимптотически устойчивой динамической системы, используя известную спектральную плотность входного сигнала. Эти формулы важны для анализа не только линейных, но, как будет показано в следующих разделах, и нелинейных систем. Напомним смысл понятия «спектральная плотность случайного процесса».

Пусть непрерывный по времени процесс $x(t)$ – эргодический (в частности, стационарный), ограниченный, энергия которого на отрезке времени $[0, T]$ равна

$$Q = \int_0^T x^2(t) dt. \quad (3.12)$$

Тогда средняя мощность (при четном продолжении подынтегральной функции в область $t < 0$)

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (3.13)$$

С другой стороны, корреляционная функция процесса $x(t)$

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x][x(t + \tau) - \mu_x] dt, \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

где

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau - \quad (3.15)$$

некоторая регулярная функция.

Тогда при $\tau = 0$

$$\begin{aligned}
 e^{i\omega\tau} \Big|_{\tau=0} &= 1; \quad z(t + \tau) \Big|_{\tau=0} = z(t); \\
 R(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T z^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z^2(t) dt. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Из (3.16) с учетом (3.14) получим, что средняя мощность равна

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (3.17)$$

Тогда $S_x(\omega)$ – плотность средней мощности с точностью до коэффициента $\frac{1}{2\pi}$. Функция $S_x(\omega)$ показывает распределение средней мощности по частотам (или по спектру) и называется спектральной плотностью мощности процесса $x(t)$ (слово «средней» перед словом «мощности» опускается для краткости). Еще короче, $S_x(\omega)$ называют спектральной плотностью.

Предполагается, что $x(t)$ является непериодической и ограниченной функцией, причем такой, что интеграл (3.15) сходится хотя бы в смысле главного значения. Спектральная плотность периодической функции может быть получена на основе теории обобщенных функций [14].

Получим выражение для спектральной плотности выходного сигнала $y(t)$ линейной стационарной асимптотически устойчивой системы с передаточной функцией $W(i\omega)$ при известной спектральной плотности входного сигнала $x(t)$.

Учитывая, что $\tau = t_2 - t_1$, формулу (3.14) можно записать в виде

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_2} S_x(\omega) e^{-i\omega t_1} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_2} S_x(\omega) \overline{e^{i\omega t_1}} d\omega, \quad (3.18)$$

где черта сверху означает комплексную сопряженность.

Формула (3.18) есть интегральное спектральное преобразование с ядром $K(t, \omega) = e^{i\omega t}$, т.е. обратное преобразование Фурье [15]. В общем случае обратное интегральное спектральное преобразование от некоторой функции $S(\omega)$ имеет вид

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t_2, \omega) S(\omega) \overline{K(t_1, \omega)} d\omega. \quad (3.19)$$

Рассмотрим входной сигнал $x(t)$ как обратное преобразование Фурье его изображения $X(i\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.20)$$

для которого и было получено выражение (3.14). Изображение выходного сигнала имеет вид

$$Y(i\omega) = W(i\omega) X(i\omega). \quad (3.21)$$

Тогда оригинал есть обратное преобразование Фурье функции $Y(i\omega)$, которое с учетом (3.21) примет вид

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(i\omega) W(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.22)$$

С другой стороны, выражение (3.22) является обратным спектральным преобразованием функции $X(i\omega)$ с ядром

$$K(t, \omega) = e^{i\omega t} W(i\omega). \quad (3.23)$$

Существование преобразования с таким ядром (т.е. сходимость несобственного интеграла) обеспечивается свойствами $W(i\omega)$ как передаточной функции асимптотически устойчивой системы. Тогда

в соответствии с (3.20) корреляционной функции выходного сигнала $y(t)$ получим

$$\begin{aligned}
 R_y(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau_2} W(i\omega) S_x(\omega) \overline{(e^{i\omega\tau_1} W(i\omega))} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau_2} W(i\omega) S_x(\omega) e^{-i\omega\tau_1} \overline{W(i\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} |W(i\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega.
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

Сравнивая (3.24) с (3.14), получим

$$S_y(\omega) = |W(i\omega)|^2 S_x(\omega). \tag{3.25}$$

Тогда дисперсия выходного сигнала будет иметь вид

$$D_y = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(i\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \tag{3.26}$$

3.3. Расчет статистических характеристик процессов в замкнутой нелинейной системе

Статистическая линеаризация применяется, так же как и гармоническая линеаризация, для расчета установившихся режимов в динамических нелинейных системах. Установившимся режимом в общем случае [16] называется процесс в динамической системе при $t \rightarrow \infty$, обладающий некоторыми стационарными свойствами и областью притяжения в фазовом пространстве. Областью притяжения называется множество начальных условий, при которых процессы в системе асимптотически стремятся к данному процессу (пример – предельный цикл). Стационарными свойствами могут быть, например, постоянные амплитуда и частота нелинейных колебаний. Линейные колебания не могут быть установившимся режимом из-за отсутствия области притяжения.

При случайных воздействиях некоторыми стационарными свойствами установившегося режима можно, в частности, считать достижение постоянных значений математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

Рассмотрим нелинейную стационарную систему с выходом $y(t)$ и входом $u(t)$ вида

$$u(t) = f(t) + n(t), \quad (3.27)$$

где $f(t)$ – детерминированный полезный сигнал; $n(t)$ – стационарная случайная помеха с нулевым математическим ожиданием.

Для определенности будем считать, что система имеет структурную схему, изображенную на рис. 3.2., где W_1, W_2, W_3 – линейные динамические звенья с передаточными функциями $\frac{R_1}{Q_1}, \frac{R_2}{Q_2}, \frac{R_3}{Q_3}$ соответственно, а $F(x)$ – однозначная нечетная нелинейность.

Будем считать, без ограничения общности, что задача решается при нулевых начальных условиях, тогда, заменив переменную Лапласа s на оператор дифференцирования по времени $p = \frac{d}{dt}$, после статистической линеаризации нелинейности $F(x)$ запишем в операторном виде уравнения линеаризованной системы, сначала приравнявая слагаемые левой и правой частей, содержащие математические ожидания

$$Q_1(p)m_y = R_1(p)k_0m_x; \quad (3.28)$$

$$Q_2(p)m_x = R_2(p)(f - m_{y_1}); \quad (3.29)$$

$$Q_3(p)m_{y_1} = R_3(p)m_y, \quad (3.30)$$

а затем – слагаемые, содержащие центрированные случайные составляющие

$$Q_1(p)y^0 = R_1(p)k_1x^0; \quad (3.31)$$

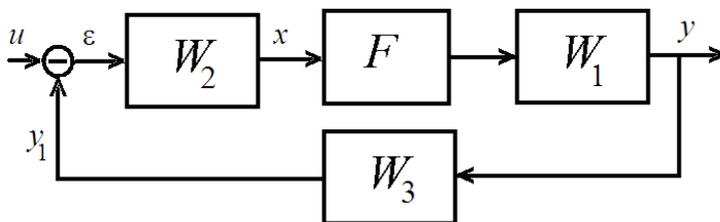


Рис.3.2. Структурная схема системы со случайным входом

$$Q_2(p)x^0 = -R_2(p)y_1^0; \quad (3.32)$$

$$Q_3(p)y_1^0 = R_3(p)y^0, \quad (3.33)$$

где k_0, k_1 – нелинейные функции двух переменных m_x, D_x .

Запишем выражения для m_y и m_x данной системы [17]

$$m_y = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} W_{0y}^{(r)}(0) f^{(r)}(t) + W_{0y}(0) m_n; \quad (3.34)$$

$$m_x = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} W_{0x}^{(r)}(0) f^{(r)}(t) + W_{0x}(0) m_n, \quad (3.35)$$

где

$$W_{0y}(s) = \frac{k_0 R_1(s) R_2(s) Q_3(s)}{Q_1(s) Q_2(s) Q_3(s) + k_0 R_1(s) R_2(s) R_3(s)}; \quad (3.36)$$

$$W_{0x}(s) = \frac{k_0 Q_1(s) Q_3(s) R_2(s)}{Q_1(s) Q_2(s) Q_3(s) + k_0 R_1(s) R_2(s) R_3(s)}. \quad (3.37)$$

Здесь $W_{0y}(s), W_{0x}(s)$ – передаточные функции от входа $u(t)$ к выходам $y(t)$ и $x(t)$ соответственно, полученные из (3.29) – (3.31).

Для дисперсий сигналов $x(t), y(t)$ справедливы следующие выражения

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} |W_{1x}(i\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega; \quad (3.38)$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} |W_{1y}(i\omega)|^2 S_n(\omega) d\omega, \quad (3.39)$$

где W_{1x}, W_{1y} – передаточные функции от входа $u(t)$ к выходам $y(t)$ и $x(t)$ соответственно, полученные из (3.31) – (3.33), выражения для которых полностью совпадают с (3.36), (3.37) при замене k_0 на k_1 .

Решая систему уравнений (3.35), (3.38) относительно m_x, D_x при известных m_n, S_n из (3.34), (3.38) найдем m_y, D_y . Разумеется, решение нелинейных уравнений (3.35), (3.38) является отдельной

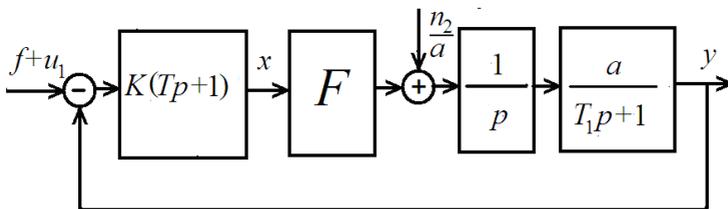


Рис. 3.3. Структурная схема системы, исследуемой с помощью МСЛ

сложной задачей, не имеющей решения в общем виде и требующей выбора численных методов в каждом конкретном случае.

Пример 3.2. Рассмотрим динамическую систему, изображенную на рис. 3.3 [18]. Вторым случайным сигналом, входящим в систему показывает, как могут быть получены некоторые обобщения рассматриваемого в данном разделе класса задач. Дифференциальные уравнения этой системы имеют вид

$$\begin{aligned} (T_1 p + 1) p y &= a F(x) + n_2; \\ x &= k(T p + 1)(f + n_1 - y), \end{aligned}$$

где $f = b_0 + b t$, $m_{n_1} = m_{n_2} = 0$; $S_{n_1}(\omega) = \frac{S_1}{(T_1 \omega^2 + 1)(T \omega^2 + 1)}$;

$S_{n_2}(\omega) = \frac{S_2}{T \omega^2 + 1}$, $S_1 = \text{const}$, $S_2 = \text{const}$, F – нелинейность типа «ограничение» с параметрами B и C .

Проведя статистическую линеаризацию нелинейности F , получим из (3.29) – (3.34) с учетом (3.37) – (3.40) для установившегося режима

$$m_x = \frac{b}{a k_0}; \tag{3.40}$$

$$m_y = f - \frac{b}{a k k_c}, \tag{3.41}$$

где

$$k_0 = \frac{B}{m_x} \left\{ \left(1 + \frac{m_x}{C} \right) \Phi \left(\frac{C + m_x}{\sqrt{D_x}} \right) - \left(1 - \frac{m_x}{C} \right) \Phi \left(\frac{C - m_x}{\sqrt{D_x}} \right) \right\} +$$

$$+ \sqrt{\frac{D_x}{2\pi}} \frac{1}{C} \left[e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{C+m_x}{\sqrt{D_x}} \right)^2} - e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{C-m_x}{\sqrt{D_x}} \right)^2} \right]; \quad (3.42)$$

$$k_1 = \frac{B}{C} \left[\Phi \left(\frac{C+m_x}{\sqrt{D_x}} \right) + \Phi \left(\frac{C-m_x}{\sqrt{D_x}} \right) \right]. \quad (3.43)$$

Для дисперсий запишем

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left[|W_{1x}(i\omega)|^2 S_{n_1}(\omega) + |W_{2x}(i\omega)|^2 S_{n_2}(\omega) \right] d\omega; \quad (3.44)$$

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} \left[|W_{1y}(i\omega)|^2 S_{n_1}(\omega) + |W_{2y}(i\omega)|^2 S_{n_2}(\omega) \right] d\omega, \quad (3.45)$$

где

$$W_{1x}(i\omega) = \frac{[T_1(i\omega)^2 + i\omega][Ti\omega + 1]k}{T_1(i\omega)^2 + (aTkk_1 + 1)i\omega + akk_1};$$

$$W_{2x}(i\omega) = \frac{k(Ti\omega + 1)}{T_1(i\omega)^2 + (aTkk_1 + 1)i\omega + akk_1};$$

$$W_{1y}(i\omega) = \frac{akk_1(Ti\omega + 1)}{T_1(i\omega)^2 + (aTkk_1 + 1)i\omega + akk_1};$$

$$W_{2y}(i\omega) = \frac{1}{T_1(i\omega)^2 + (aTkk_1 + 1)i\omega + akk_1}.$$

Вычисляя интегралы (3.45), (3.46), получим

$$D_x = \frac{(S_1 + S_2)\pi k k_1}{a(1 + akk_1 T)}; \quad (3.46)$$

$$D_y = \frac{\pi S_2 (T + T_1 + akk_1 T^2)}{akk_1 (T + T_1 + 2T^2 akk_1)(1 + akk_1 T)} + \frac{\pi S_1 akk_1 (2T + mkk_1 T T_1)}{(2T + akk_1 T T_1)[1 + akk_1 (T + T_1)] - akk_1 T^2}. \quad (3.47)$$

Рассчитаем значения m_x , D_x , D_y при следующих параметрах:

$$a = 1; B = C = 0,1; T = 0,8 \text{ с}; T_1 = 0,2 \text{ с}; k = 2; b = 0,05;$$

$$S_1 = 4 \cdot 10^{-3}; S_2 = 0,01.$$

Из (3.41), (3.47) получим

$$m_x k_0(m_x, D_x) = 0,05;$$

$$D_x = \frac{0,088 k_1(m_x, D_x)}{1 + 1,6 k_1(m_x, D_x)}.$$

Решая данную систему уравнений одним из численных методов (в данном случае – методом последовательных приближений), получим

$$m_x = 0,103, D_x = 0,02, D_y = 0,012.$$

Значение m_y вычисляется с помощью (3.41).

3.4. Расчет колебаний в нелинейных системах при случайных воздействиях

Важное значение имеет вопрос о влиянии случайных возмущений на параметры автоколебаний. На практике было замечено, что при определенной интенсивности случайного воздействия существовавшие в системе автоколебания прекращаются, это явление стали называть срывом автоколебаний.

Для определения параметров автоколебаний и условий их срыва при воздействии случайных возмущений применяется метод совместной статистической и гармонической линейаризации.

Будем считать, что на вход однозначной нелинейности F поступает входной сигнал вида

$$x(t) = m_x + A_1 \sin \omega_1 t + \overset{\circ}{x}(t), \quad (3.48)$$

где $\overset{\circ}{x}(t)$ – центрированный случайный процесс.

Сначала проведем статистическую линейаризацию нелинейности в соответствии с разд. 3.1, в результате получим

$$y(t) = F_0(m_x + A_1 \sin \omega_1 t, D_x) + k_1(m_x + A_1 \sin \omega_1 t, D_x) \overset{\circ}{x}(t). \quad (3.49)$$

Теперь перейдем к гармонической линейаризации слагаемых в (3.50). Разложим F_0 и k_1 в ряд Фурье, оставив члены ряда, обеспечивающие линейность приближенного сигнала $y(t)$ по $A_1 \sin \omega_1 t$ и

х. Поскольку функция F_0 обеспечивает передачу медленноменяющейся детерминированной составляющей входного сигнала, к которой относится и синусоида, то для нее следует учитывать члены ряда Фурье с нулевым и единичным индексами (2.8), (2.10), которые обозначим F_0^* и a_1^* соответственно.

В силу того, что k_1 есть коэффициент передачи по быстроменяющейся случайной составляющей входного сигнала $\overset{\circ}{x}$, то для него следует учитывать только член ряда Фурье с нулевым индексом, обозначаемый k_1^* . В результате получим приближенное выражение для $y(t)$:

$$y(t) = F_0^*(m_x, D_x, A_1) + q^*(m_x, D_x, A_1) A_1 \sin \omega_1 t + k_1^*(m_x, D_x, A_1) \overset{\circ}{x}, \quad (3.50)$$

где q^* – коэффициент гармонической линейаризации (2.11).

Рассмотрим систему, изображенную на рис. 3.4. Ее уравнение имеет вид

$$Q(p)x + R(p)F(x) = Q(p)u, \quad (3.51)$$

где $u(t) = m_u + \overset{\circ}{u}$ – случайное стационарное воздействие.

Подставляя (3.48), (3.50) в (3.51) и приравнивая отдельно математические ожидания, колебательные составляющие и центрированные случайные составляющие, получим уравнения

$$Q(0)m_x + R(0)F_0^* = Q(0)m_u; \quad (3.52)$$

$$Q(p)A_1 \sin \omega_1 t + R(p)q^* A_1 \sin \omega_1 t = 0; \quad (3.53)$$

$$Q(p)\overset{\circ}{x} + R(p)k_1^* \overset{\circ}{x} = Q(p)\overset{\circ}{u}. \quad (3.54)$$

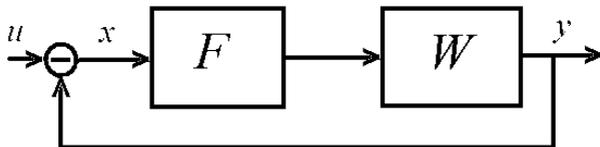


Рис. 3.4. Структурная схема системы со случайным входом и автоколебаниями

Уравнение (3.53) будет иметь нетривиальное решение только в случае выполнения условий

$$\operatorname{Re}\left[Q(i\omega_1) + R(i\omega_1)q^*\right] = 0 ; \quad (3.55)$$

$$\operatorname{Im}\left[Q(i\omega_1) + R(i\omega_1)q^*\right] = 0 . \quad (3.56)$$

Из (3.54) получим

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{Q(i\omega)}{Q(i\omega) + R(i\omega)k_1^*} \right|^2 S_u(\omega) d\omega , \quad (3.57)$$

где $S_u(\omega)$ – спектральная плотность случайного процесса $u(t)$.

Решая систему уравнений (3.52), (3.55)-(3.57) относительно неизвестных A_1 , ω_1 , m_x , D_x , получим параметры возможных автоколебаний и случайного процесса $x(t)$ и, используя результаты разд. 3.3, получим также m_y , D_y . Решение данной системы возможно в общем случае только численными методами, хорошие результаты показывает метод последовательных приближений.

Срыв автоколебаний в системе возможен при некоторых критических значениях переменными m_x , D_x . Для их достижения нужны определенные значения m_u , D_u , поэтому данная задача принципиально отличается от задачи о поиске параметров колебаний. В указанной системе уравнений необходимо положить $A_1 = 0$, что соответствует отсутствию колебаний. Тогда эта система будет решаться относительно неизвестных m_x , D_x , D_u , причем можно положить

$m_u \stackrel{def}{=} 0$, поскольку автоколебания срываются из-за воздействия случайной составляющей входного сигнала. Одновременно определяется предельное значение ω_1 , при котором происходит срыв колебаний. При найденных таким образом параметрах входного сигнала в систему существовавшие автоколебания будут сорваны. Основным среди найденных параметров будет минимальное значение D_u , при котором происходит срыв автоколебаний.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Для какого класса случайных процессов разработан метод статистической линеаризации?
2. В чем различие между первым и вторым вариантом метода статистической линеаризации?
3. Рассчитайте коэффициенты по первому варианту метода статистической линеаризации для двухпозиционного реле с гистерезисом.
4. Почему функция $S_x(\omega)$ называется спектральной плотностью мощности процесса $x(t)$?
5. Какими двумя способами может быть вычислена корреляционная функция эргодического случайного процесса?
6. Для какого класса систем справедливо выражение, связывающее спектральную плотность входного и выходного сигналов?
7. Найдите спектральную плотность выхода системы с передаточной функцией $W(s) = \frac{1}{Ts + 1}$ и белым шумом с нулевым математическим ожиданием и интенсивностью S_0 .
8. Какой режим в динамической системе называется установившимся?
9. Являются ли линейные колебания установившимся режимом?
10. При каких условиях возможен расчет динамической системы с двумя случайными входными сигналами методом статистической линеаризации?
11. Какова последовательность применения методов статистической и гармонической линеаризации при их совместном использовании?
12. Что называется срывом автоколебаний?
13. Какой параметр входного сигнала определяет возможность срыва автоколебаний?

Глава 4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

4.1. Построение областей устойчивости нелинейных систем в пространстве их параметров

Рассмотрим нелинейную систему автоматического управления, достаточно полная модель которой может быть представлена системой n нелинейных нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) следующего вида:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(t, \vec{x}), \quad (4.1)$$

с начальными условиями $\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in \widehat{X}_0$. Правая часть (4.1) в общем случае должна удовлетворять условиям Филиппова [19] существования и единственности решения. Во многих случаях достаточно выполнения условия Липшица.

Система ОДУ (4.1) включает в себя как уравнения неизменяемой части САУ, так и изменяемой ее части, одним из главных компонентов которой является управление $\vec{u}^*(t, \vec{x})$, обеспечивающее наилучшие показатели качества переходных процессов. Условия, которым должно удовлетворять качество, сформулированы в виде некоторого критерия \hat{K} . В зависимости от конкретной системы множество значений \hat{U}^* функции управления \vec{u}^* может быть как замкнутым, так и открытым. Если множество \hat{U}^* замкнуто, то это свойство можно задать двумя способами. Первый: записывается система неравенств вида

$$\|\vec{u}^*\| \leq B(t, \vec{x}) \Rightarrow B_i^-(t, \vec{x}) \leq \hat{u}_i^* \leq B_i^+(t, \vec{x}), \quad i = 1, \dots, r_1, \quad (4.2)$$

где B , B_i^- , B_i^+ – заданные непрерывные по совокупности аргументов функции. Второй: управление \hat{u}^* задается в виде сложной функции

$$\vec{u}^*(t, \vec{x}) = \vec{F}_0[\vec{u}^*(t, \vec{x})], \quad (4.3)$$

где $F_{0i}[\vec{u}^*]$ – функции типа «ограничение». Причём \hat{U}^* – множество значений управления $\vec{u}^*(t, \vec{x})$ – уже не является замкнутым и,

вообще говоря, не ограничено. В тех случаях, когда все или часть компонентов вектора \tilde{u}^* являются кусочно-непрерывными функциями своих аргументов, их значения и величины левых и правых пределов в точках разрыва должны по модулю быть не меньше $|B_i^-|$ и $|B_i^+|$.

Второй способ задания границы множества \hat{U}^* является более естественным для прикладных задач, так как функции F_{0i} включаются как нелинейности в правую часть (4.1). Функция $F_{0i}[\tilde{u}^*]$ в пространстве переменных $F_{0i}, \tilde{u}_1^*, \dots, \tilde{u}_r^*$ определяет гиперповерхность, сечение которой плоскостью, проходящей через ось $0F_{0i}$, имеет описание

$$F_{0i}(\tilde{u}_i^*) = \frac{1}{2} (|B_i^+| - |B_i^-| + |\tilde{u}_i^* - B_i^-| - |\tilde{u}_i^* - B_i^+|), \quad (4.4)$$

Поэтому далее условия замкнутости и ограниченности множества управлений специально оговариваться не будут, так как можно считать, что все ограничения учтены в выражении для правой части (4.1).

Явная зависимость правой части (4.1) от t учитывает не только нестационарность физического состояния САУ, но и присутствие ограниченных дифференцируемых в любой точке $t \in (0, \infty)$ входных сигналов $g_1(t), \dots, g_{r_2}(t)$, $r_2 \leq n$. Если $r_2 \leq n$, то доопределим вектор управляющих сигналов до размерности n с помощью нулевых компонентов и обозначим его \bar{g} . Для большинства САУ можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством компонентов вектора \bar{g} и множеством компонентов вектора \bar{x} . Если каждая функция $g_i(t)$ ($i = 1, \dots, n$) определяет желаемый вид функции $\hat{x}_i(t)$, то вопрос о взаимно однозначном соответствии решен. Если же вместо переменных состояния имеется только r_3 -мерный вектор выхода $\bar{F}[\bar{x}(t)]$, а $\bar{g}^*(t)$ – заданный l_3 -мерный желаемый вектор выхода, то n -мерный вектор, компонентами которого являются неизвестные функции $g_1(t), \dots, g_n(t)$, определяющие

желаемый вид функций $\hat{x}_1(t), \dots, \hat{x}_n(t)$, может быть найден из следующей системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\vec{g}^*(t) - \vec{F}[\vec{g}(t)] = \vec{0}. \quad (4.5)$$

Как правило, компоненты функции выхода \vec{F} являются линейными формами и поэтому найти $\vec{g}(t)$ нетрудно. Система (4.5) может иметь единственное или бесконечно много решений, что не влияет на физический смысл задачи, так как из имеющихся решений можно выбрать одно и для него установить соответствие с компонентами вектора \vec{x} .

Таким образом, значения функции $\vec{g}(t)$ определяют в фазовом пространстве $\hat{X} \supset \vec{x}$ геометрическое место точек G (гладкое многообразие), на которое должна быть с помощью управления $\vec{u}^*(t, \vec{x})$ переведена изображающая точка из начальной точки \vec{x}_0 . В дальнейшем будем рассматривать два основных варианта САУ. Первый вариант: управление $\vec{U}^*(t, \vec{x})$ существует и его удалось синтезировать известными методами, например основанным на принципе максимума или частотными методами (только для линейных систем). Тогда правую часть (4.1) можно представить в виде

$$\vec{f}(t, \vec{x}) = \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{g}, \vec{u}^*). \quad (4.6)$$

Для управляемых систем, удовлетворяющих условиям Филиппова (к ним относятся практически все реальные СУ), управление \vec{u}^* существует. Поскольку оно считается найденным как функция фазовых координат, то оно обеспечивает и стабилизацию системы, т.е. принадлежность изображающей точки множеству G на интервале (t_y, ∞) , где t_y – время выполнения задачи управления. Но даже в этом случае для многих релейных нелинейных САУ задача регулирования не может считаться решенной в силу невозможности мгновенного переключения релейных элементов управления \vec{u}^* , которое, как правило, в нелинейных системах с ограничениями является кусочно-непрерывным.

Это приводит либо к появлению «неидеальностей переключения» (гистерезиса, чистого запаздывания и др.), либо к замене ку-

сочно-непрерывного управления \tilde{u}^* непрерывным управлением \tilde{U}_ε^* , $\tilde{U}_\varepsilon^*(t, 0) = 0$, удовлетворяющим условию

$$\left\| \tilde{U}^*(t, x) - \tilde{U}_\varepsilon^*(t, x) \right\| < \varepsilon, \quad (4.7)$$

где заданная окрестность ε может быть сколь угодно малой. Если «двухпозиционное» реле по физическим причинам не может быть заменено непрерывным элементом, то с помощью последовательного соединения в систему вводится достаточно малая зона нечувствительности (в пределах допустимой статической ошибки), обеспечивая существование третьего, нулевого с точностью ε , значения реле, что требует построения дополнительных управлений, обеспечивающих удерживание изображающей точки в ε -окрестности множества G . Замена управления \tilde{u}^* на \tilde{u}_ε^* приводит к автоколебаниям. Если окрестность ε достаточно мала, то автоколебания имеют высокую частоту и малую амплитуду, что позволяет отнести их к классу вибраций. В данной работе будут исследоваться только системы, в которых вибрации недопустимы по соображениям безопасности, надежности и физической невозможности длительного функционирования исполнительных устройств САУ в таком режиме стабилизации.

Если для обеспечения физической реализуемости управления \tilde{u}_ε^* радиус ε -окрестности увеличивать, то это приводит к снижению частоты и возрастанию амплитуды автоколебаний, что делает недостижимым как приемлемое качество переходных процессов, так и асимптотическую устойчивость системы.

В этом случае на параметры автоколебаний влияют не только «неидеальности» релейных переключателей, названные выше, но и все неустранимые существенные нелинейности, присутствующие в неизменяемой части системы.

Второй вариант: управление $\tilde{u}^*(t, \hat{x})$ существует, но его не удается синтезировать ни одним из разработанных к настоящему времени методов. Это прежде всего касается систем (4.1) с невыпуклой правой частью, так как для них, как правило, управление $\tilde{u}^*(t, \hat{x}(t)) = \vartheta(t)$ есть только измеримая функция времени $\vartheta(t)$, по-

строенная с помощью тех или иных доопределений [20]. В этом случае найти управление \vec{u}^* как функцию фазовых координат можно только аналитически, так как численные методы в этом случае недостаточно эффективны. В настоящее время не разработано достаточно общих и конструктивных методов определения таких управлений для сложных существенно нелинейных САУ, в которые управление входит нелинейно. Однако даже решение этой задачи только приведёт от второго варианта САУ к первому варианту, что потребует решения проблемы автоколебаний.

Таким образом, для обоих вариантов САУ фундаментальной является проблема автоколебаний. Будем считать, что система ОДУ (4.1) в зависимости от конкретного случая может быть описанием САУ, относящихся к первому или второму варианту.

В идеальном случае задача стабилизации будет выполнена, если каждый компонент вектора \vec{x} при $t \geq t_y$ удовлетворяет условию

$$g_i(t) - \hat{x}_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Однако в силу перечисленных выше причин условие (4.8) в реальных системах точно никогда не выполняется, поэтому заменим его на следующее условие

$$|g_i(t) - \hat{x}_i(t)| < \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.9)$$

введем новые переменные

$$x_i(t) = g_i(t) - \hat{x}_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.10)$$

и, подставив $\hat{x}_i(t) = g_i(t) - x_i(t)$ в (4.1), получим новую задачу Коши

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \vec{f}(t, \vec{x}); \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

в которой сигналы управления $\vec{g}(t)$ не играют самостоятельной роли, а считаются одним из нестационарных параметров правой части

$$\vec{f}(t, \vec{x}) = \dot{\vec{g}}(t+0) - \vec{f}[t, \vec{g}(t) - \vec{x}(t)], \quad \vec{x}_0 = \vec{g}(+0) - \vec{x}_0; \vec{f}(t, \vec{0}) = \vec{0}.$$

Данное преобразование переменных показывает, что любое явление, имеющее описание в виде системы ОДУ, может быть пред-

ставлено как система с обратными связями по всем переменным, присутствующим в правой части.

Обобщенная (полная) задача управления, или коротко – задача регулирования, будет состоять из двух частей: задачи управления, которая состоит в переводе за конечное (необязательно заданное) время t_y , изображающей точки в фазовом пространстве $X \supset \bar{x}$ из начального положения \bar{x}_0 в любую точку границы Γ n -мерного открытого параллелепипеда G (окрестность начала координат)

$$|x_i| < \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.12)$$

так, чтобы обеспечивался минимум критерия K , полученного из \hat{K} с учетом (4.10) (пространство X – нормированное с $\|\bar{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$),

и из задачи стабилизации, состоящей в том, что для любого \bar{x}_0 должно выполняться условие существования предела

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_i(t) \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.13)$$

и, кроме того, для любой окрестности $\tilde{\varepsilon}_i \geq \varepsilon_i$ должна существовать такая окрестность δ_i , чтобы для любого \bar{x}_0 , $x_{0i} < \delta_i$, выполнялось условие $|x_i(t)| < \tilde{\varepsilon}_i$, где $t \in [t_0, \infty)$, $i = 1, \dots, n$. Значения $\tilde{\varepsilon}_i < \varepsilon_i$ рассматривать не имеет смысла, так как это условие превышает требуемую точность решения задачи. Назовём это свойство ε -устойчивостью тривиального решения в смысле Ляпунова. Таким образом, задача стабилизации здесь сформулирована как задача обеспечения устойчивости «в большом» ε -тривиального решения задачи, где ε -тривиальным будем считать любой постоянный вектор \bar{x}_0 , удовлетворяющий условию

$$|x_i^0| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.14)$$

Если полная задача решена, то в общем случае время регулирования t_p удовлетворяет неравенству $t_p \geq t_y$, поскольку t_y – это момент первого пересечения интегральной кривой границы Γ , а t_p – момент последнего пересечения, после которого изображающая точка принадлежит окрестности G при любом $t \in (t_p, \infty)$. Одна из целей управления – достижение равенства

$$t_p = t_y. \quad (4.15)$$

Учитывая, что условие (4.8) заменено на (4.9) или (4.12) и принимая во внимание (2.7), условие достижения минимума критерия K , $K_{\min} = \min_{u \in U} K$, где $u(t, \bar{x}) = \tilde{u}(t, \bar{g}_i, \bar{x}_i)$, следует заменить на следующее

$$K_{\min} - \varepsilon \leq K \leq K_{\min} + \varepsilon, \quad (4.16)$$

где ε – заданная точность. Тогда любое управление, при котором выполняется неравенство (4.16), можно назвать ε -оптимальным, а исследуемую систему ε -управляемой. Объединим все изменяемые параметры САУ в вектор \vec{d} размерности l , а связанное множество физически допустимых значений вектора \vec{d} обозначим D . В вектор \vec{d} входят как параметры, изменяемые проектировщиком (постоянные времени динамических звеньев, коэффициенты усиления, зоны нечувствительности управления и т. д.), так и параметры, значения которых зависят от режима функционирования системы – характеристики объекта управления, например изменение геометрии крыла самолета или вес летательного аппарата, некоторых исполнительных устройств, например зоны нечувствительности гидроприводов меняются в зависимости от вязкости жидкости в гидроцилиндрах. Следует подчеркнуть, что в процессе выполнения каждой отдельно взятой задачи управления вектор \vec{d} считается постоянным и не имеющим отношения к нестационарности правой части (4.11).

Теорема. Пусть система управления имеет описание

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}_d(t, \vec{x}, \vec{d}), \quad (4.17)$$

где $\vec{d} = (d_1, \dots, d_r)$ – вектор параметров системы, $\vec{d} \in D$; X_0 – множество начальных условий. Функция \vec{f}_d непрерывна по совокупности компонентов \vec{d} . Тогда, если при $\vec{x}_0 \in X_{01} \subset X_0$, $\vec{d} \in D_1 \subset D$ существуют только решения системы, имеющие нулевой предел при $t \rightarrow \infty$, а при $\vec{x}_0 \in X_{02} \subset X_0$, $\vec{d} \in D_2 \subset D$ существуют только неограниченные решения, то существует непустое множество $D_3 = D \setminus (D_1 \cup D_2)$, такое, что при $\vec{x}_0 \in X_{03}$;

$$X_0 = X_{01} \cup X_{02} \cup X_{03}, \quad \vec{d} \in D_3$$

решения ограничены и либо не имеют предела при $t \rightarrow \infty$, либо этот предел конечен и не равен нулю. При этом попарные пересечения множеств D_i ($i = 1, 2, 3$) пусты (рис. 4.1).

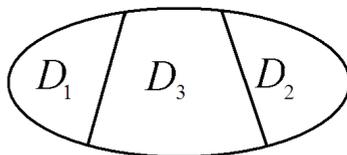


Рис. 4.1. Множество значений параметров системы

Докажем теорему “от противного”. Действительно, если допустить, что множество D_3 пусто, то в силу связности D существует некоторое множество $\Gamma_D \subset D$, такое, что для любого вектора $\vec{d}_0 \in \Gamma_D$ выполняется: $\vec{d}_0 \in D_1$, либо $\vec{d}_0 \in D_2$, либо \vec{d}_0 принадлежит и D_1 и D_2 , причем любая выколотая окрестность точки \vec{d}_0 содержит как элемент из D_1 , так и из D_2 , т.е. Γ_D – граница множеств D_1 и D_2 . Тогда для любой кривой $\Gamma_0 \cap \Gamma_D = \vec{d}_0$ и принадлежащей $D_1 \cup D_2$ $\lim_{\substack{d \rightarrow d_0 \\ d \in \Gamma_0}} \bar{x}_d(t, \vec{d})$ не существует, так как для той части

кривой Γ_0 , которая принадлежит D_1 : $\lim_{\substack{d \rightarrow d_0 \\ t \rightarrow \infty}} \bar{x}_d(t, \vec{d}) = 0$, а для части

кривой Γ_0 , принадлежащей D_2 : $\lim_{\substack{d \rightarrow d_0 \\ t \rightarrow \infty}} \bar{x}_d(t, \vec{d}) = \infty$, либо не существует.

Тогда функция $\bar{x}(t, \vec{d}_0)$ должна при $t \rightarrow \infty$ стремиться, например, к 0 и ∞ одновременно, что невозможно. Откуда следует, что множество D_3 непусто. Кроме того, из проведенных рассуждений следует, что D_3 – открытое связное множество, т.е. область. **Теорема доказана.** Только в вырожденном случае $D_1 = \emptyset$ или $D_2 = \emptyset$ возможно, чтобы $D_3 = \emptyset$.

Разделим на множестве $t \in [t^*, \infty)$, где t^* – достаточно велико, все функции $\bar{x}(t, \vec{d})$ на три класса: а) периодические; б) почти-периодические; в) постоянные, но ненулевые. Разумеется, их можно считать принадлежащими к этим классам только с определенной точностью δ (при $t^* \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$).

Функции классов а), б), в) обладают первыми свойствами установившегося режима – некоторыми стационарными свойствами (период, ε -почти-период, значение const, ограниченность), однако необязательно обладают вторым свойством – областью притяжения в фазовом пространстве X . Например, собственные колебания линейной системы являются стационарным режимом, но не являются установившимся режимом.

Таким образом, обоснован следующий вывод: перевод системы из устойчивого состояния в неустойчивое путем изменения ее параметров возможен только через область параметров, в которой стационарный режим может быть с любой точностью представлен вектор-функцией с компонентами следующего вида:

$$x_{ci}(t) = A_{i0} + \sum_{k=1}^{n_i} A_{ik} \sin(k\omega t + \varphi_{ik}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.18)$$

Так как класс б) соответствует функциям, которые представлены суммой не менее двух гармоник с отношением частот, равным некоторому иррациональному числу, то ее с точностью ε можно представить функциями вида (4.18), приняв ε -почти-период T_ε за период функции, принимающей на произвольно выбранном отрезке $t \in [t_0, t_0 + T_\varepsilon]$, $t_0 \geq t^*$ значения $x_i(t)$, и отбросив гармоники с номерами, большими n_0 .

Считая $\vec{x}(t)$ непрерывной функцией времени, получим, что если она принадлежит классу а), то она представима рядом Фурье и он сходится к ней в каждой точке.

Если область D_3 известна, то можно определить и множества D_1, D_2 . Так как $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, то множество $D \setminus D_3$ и будет состоять из этих непересекающихся множеств. Чтобы определить какое из них D_1 , а какое – D_2 , достаточно взять из одного из них хотя бы один произвольный элемент \vec{d}^* и проверить, удовлетворяет ли решение $\vec{x}(t, \vec{d}^*)$ условию (4.13): если да – то это множество D_1 , если нет – то это множество D_2 .

Если условие ε -устойчивости выполняется не для всех $d \in D_1$, то это означает, что множество $D_1 = D'_1 \cup D''_1$, причём D'_1 соответ-

ствуется асимптотической устойчивости системы, а для D''_1 выполняется только условие (4.13). Причиной неустойчивости на множестве D''_1 может быть только какой-либо нестационарный коэффициент в правой части (4.1) $v(t)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_0$, такой, что при некоторых t линеаризованная система с замороженными коэффициентами оказывается неустойчивой.

Поскольку все компоненты вектора $\bar{x}(t)$ непрерывны, то при выполнении условия (4.13) обеспечивается ограниченность $x_i(t)$, а это означает, что выполняется определение устойчивости системы, принятое в теории автоматического регулирования. Поэтому в данном смысле для всех $d \in D_1$ исследуемая САУ устойчива. Исходя из этого, назовём D_1 множеством устойчивости, D_2 – множеством неустойчивости, D_3 – областью колебаний (если это автоколебания, то областью автоколебаний).

Как можно видеть, определение области колебаний является одним из основных путей исследования устойчивости систем.

4.2. Расчет автоколебательных режимов с учетом высших гармоник

Для определения области колебаний в пространстве параметров САУ наиболее эффективен метод гармонической линеаризации (МГЛ), поскольку в обобщенном виде именно этот метод позволяет определить не только область колебаний D_3 , но и параметры колебаний, присутствующие в формуле (4.18), т. е. амплитуды, частоты и фазы систем.

Поскольку задача определения линейных колебаний полностью решается методом теории линейных систем, то в данной работе этот элементарный случай не рассматривается. Поэтому будем считать, что область линейных колебаний известна и осталось определить область нелинейных колебаний.

В данном разделе разрабатывается методика применения МГЛ к системам широкого класса, удовлетворяющим весьма слабым ограничениям по сравнению с другими методиками [21, 22].

Помимо перечисленных ранее условий, которым должна удовлетворять САУ, описываемая уравнениями (4.11), должны выполняться еще два условия. Первое: все переменные x_1, \dots, x_n в пределах допустимой погрешности могут быть в стационарном режиме представлены в виде (4.18), где число гармоник n_i сколь угодно велико, но конечно. Второе: все функции времени в правой части (4.11) должны быть интегрируемы в смысле Римана. Выше указывалось, что сигналы $g_i(t)$ должны быть, кроме того, непрерывно дифференцируемы, но это весьма слабое условие с физической точки зрения.

Если из функций $g_i(t)$ хотя бы одна принадлежит к классам а), б), то колебания, если они есть, могут быть как вынужденными, если выполняется условие захвата частот высших колебаний, так и собственными. Если все функции $g_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, относятся к классу в), то колебания могут быть только собственными. С математической точки зрения обобщенный МГЛ для всех случаев одинаков.

Рассмотрим сначала случай, когда система ОДУ (4.11) является описанием односвязной САУ.

Исходную САУ можно представить как оператор, отображающий множество $X_0 \times G$, где $\bar{g} \in G$, на множество X . Будем считать, что данный оператор можно представить как сумму и произведение операторов F_i , W_i , которые являются с точки зрения автоматического регулирования последовательными включениями обобщенных локальных нелинейной F_i и линейной W_i частей САУ (рис.4.2).

После замены переменных (4.10) получаем соответствующую системе (4.11) эквивалентную САУ. Здесь новым входным сигналом

$$\tilde{g}_1(t) = \tilde{a}(t)g_1(t) + \hat{a}\dot{g}_1(t), \quad (4.19)$$

где $\tilde{a}(t)$ – известная вещественная функция, являющаяся комбинацией из сумм и произведений коэффициентов W_i ; \hat{a} – либо 0, либо -1 . Излагаемая методика не требует полной разделимости

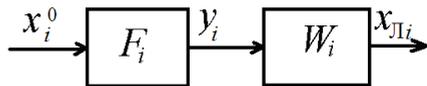


Рис. 4.2 Обобщенная локальная пара

путем эквивалентных структурных преобразований нелинейной и линейной части системы. Необходима лишь локальная разделимость нелинейной статической части $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t)$ и линейной динамической части $W_i(t, p)$, где $p = \frac{d}{dt}$, $i = 1, 2, \dots, \tilde{K}$, $x_{\text{ли}}$, x_i^0 – определяются как дифференцируемые функции:

$$x_{\text{ли}} = \eta_i(\bar{x}, g_1) = \eta^i(\bar{x}, t), \quad (4.20)$$

$$x_i^0 = \tilde{\xi}_i(\bar{x}, g_1) = \xi_i(\bar{x}, g_1) = \xi^i(\bar{x}, t). \quad (4.21)$$

Локальная нелинейная статическая часть $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t)$ является произвольной функцией трех переменных, такой, что при любых непрерывных функциях $x_i^0(t)$, $\dot{x}_i^0(t)$ функция $y_i(t) = F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, за исключением конечных значений в точках разрыва. Таким образом, в данной методике будем считать достаточной сходимость «в среднем» ряда Фурье функции $y_i(t)$ к этой функции на отрезке $[t, t+T]$. Под статичностью F_i будем понимать отсутствие в ее описании динамических звеньев, представляемых дифференциальными уравнениями. Нелинейные статические звенья F_i являются в некотором смысле обобщенными нелинейностями, так как при последовательном соединении двух неразделённых динамическими звеньями нелинейностей $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t) = y_i$, $F''_i(y_i, \dot{y}_i, t)$ функция $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t) = F''_i(F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t))$, а при параллельном соединении нелинейностей $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t)$ и $F''_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t)$ без динамических частей функция $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t) = F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t) + F''_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t)$. Здесь явная зависимость от t характеризующая исключительно нелинейность (например, изменение зоны нечувствительности по известному закону). Рассмотрим прохождение n_i^0 -гармонического сигнала, соответствующего установившемуся режиму для x_i^0 вида

$$x_{ci}^0 = A_{i0}^0 + \sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \sin(k\omega t + \varphi_{ik}^0), \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{K}, \quad (4.22)$$

через нелинейное звено $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t)$. В общем случае, когда не каждая пара F_i, W_i охвачена локальной обратной связью и не каждая линейная часть обладает свойствами фильтра низких частот ($|W(ik\omega)| \ll |W(i\omega)|$), n_i^0 – количество гармоник, учитываемых на выходе нелинейной части F_i . Как правило, количество гармоник сигнала на выходе нелинейности больше, чем на входе. Выход должен иметь следующий вид

$$y_i(t) = F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0, t) = \tilde{A}_{i0} + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} \tilde{A}_{ik} \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}_{ik}), \quad (4.23)$$

где, согласно экстремальному свойству сумм Фурье, можно записать

$$\tilde{A}_{i0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_i \left(\tilde{A}_{i0} + \sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \sin(k\omega t + \varphi_{ik}^0), \right. \\ \left. \omega \left[\sum_{k=1}^{n_i^0} k A_{ik}^0 \cos(k\omega t + \varphi_{ik}^0) \right], \frac{\omega t}{\omega} \right) d\omega t, \quad (4.24)$$

$$\tilde{A}_{ik} = \sqrt{\tilde{a}_{ik}^2 + \tilde{b}_{ik}^2}; \quad \tilde{\varphi}_{ik} = \arctg \frac{\tilde{b}_{ik}}{\tilde{a}_{ik}}, \quad (4.25)$$

$$\tilde{a}_{ik} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_i \left(A_{i0}^0 + \sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \sin(k\omega t + \varphi_{ik}^0), \right. \\ \left. \omega \left[\sum_{k=1}^{n_i^0} k A_{ik}^0 \cos(k\omega t + \varphi_{ik}^0) \right], \frac{\omega t}{\omega} \right) \sin(k\omega t) d\omega t, \quad (4.26)$$

$$\tilde{b}_{ik} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_i \left(A_{i0}^0 + \sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \sin(k\omega t + \varphi_{ik}^0), \right. \\ \left. \omega \left[\sum_{k=1}^{n_i^0} k A_{ik}^0 \cos(k\omega t + \varphi_{ik}^0) \right], \frac{\omega t}{\omega} \right) \cos(k\omega t) d\omega t. \quad (4.27)$$

Коэффициенты \tilde{a}_{ik} , \tilde{b}_{ik} при $n_i^0 \neq \tilde{n}_i$ не являются коэффициентами гармонической линейризации и не предназначены, для формирования ЭПФ нелинейного элемента, так как остается $|\tilde{n}_i - n_i^0|$ синусоид на входе или на выходе, для которых нет синусоид с той же частотой на выходе или на входе соответственно.

В частном случае при $n_i^0 = \tilde{n}_i$ из \tilde{a}_{ik} , \tilde{b}_{ik} можно получить коэффициенты гармонической линейризации \hat{a}_{ik} , \hat{b}_{ik} следующим образом

$$\hat{a}_{ik} = \tilde{a}_{ik} / A_{ik}^0; \quad \hat{b}_{ik} = \tilde{b}_{ik} / A_{ik}^0. \quad (4.28)$$

Тогда амплитудно-фазовая характеристика нелинейности F_i по k -й гармонике имеет вид

$$q_{ik} = \sqrt{\hat{a}_{ik}^2 + \hat{b}_{ik}^2} \left[\cos \left(\arctg \left(\frac{\hat{b}_{ik}}{\hat{a}_{ik}} \right) - \varphi_{ik}^0 \right) + i \sin \left(\arctg \left(\frac{\hat{b}_{ik}}{\hat{a}_{ik}} \right) - \varphi_{ik}^0 \right) \right]. \quad (4.29)$$

Это выражение обычно рассматривается лишь как элементарный случай при $n_i = \tilde{n}_i$, для которого коэффициенты гармонической линейризации вычисляются не по формулам (4.26), (4.27), а по формулам вида

$$a_{ik} = \frac{1}{\pi A_{ik}^0} \int_0^{2\pi} F_i \left\{ A_{ik}^0 + \sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \sin(k\omega t + \varphi_{ik}^0) \right\} \omega \left[\sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \cos(k\omega t + \varphi_{ik}^0) \right] \frac{\omega t}{\omega} \times \\ \times \sin(k\omega t + \varphi_{ik}^0) d\omega t, \quad (4.30)$$

$$b_{ik} = \frac{1}{\pi A_{ik}^0} \int_0^{2\pi} F_i \left\{ A_{ik}^0 + \sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \sin(k\omega t + \varphi_{ik}^0) \right\} \omega \left[\sum_{k=1}^{n_i^0} A_{ik}^0 \cos(k\omega t + \varphi_{ik}^0) \right] \frac{\omega t}{\omega} \times \\ \times \cos(k\omega t + \varphi_{ik}^0) d\omega t. \quad (4.31)$$

Амплитудно-фазовая характеристика по каждой новой гармонике имеет вид

$$q_{ik} = a_{ik} + ib_{ik}. \quad (4.32)$$

Несмотря на то, что формула (4.32) выглядит проще, чем (4.29), в дальнейшем будем, как правило, использовать формулы (4.26) –

(4.29), так как формулы (4.26), (4.27) справедливы и при $n_i < \tilde{n}_i$, когда (4.30), (4.31) применить невозможно.

Рассмотрим смысл термина «двузначная нелинейность» по отношению к функции $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0)$, так как от этого зависит единственность решения задачи Коши (4.11) и как следствие – единственность стационарного режима при фиксированных начальных условиях и значениях параметров \vec{d} . Геометрическое место точек с координатами $(\vec{F}_i, x_i^0, \dot{x}_i^0)$ в трехмерном пространстве есть замкнутая кривая (например, гистерезис) или поверхность (люфт), являющаяся однозначной функцией двух переменных x_i^0, \dot{x}_i^0 .

График F_i на рисунке двузначен только потому, что является результатом проецирования трехмерного объекта на плоскость. Поэтому в пространстве трех переменных F_i, x_i^0, \dot{x}_i^0 функция $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0)$ двузначной не является.

Допустим, что в выражении (4.21) функция ξ^i зависит только от части переменных x_1, \dots, x_n , а именно $x_{i_j}, j=1, 2, \dots, j_n < n$, правые части $f_{i_j}(t, x)$ из (4.11) не содержат F_i . Тогда подставляя вместо x_{i_j} функцию f_{i_j} в выражение для x_i^0 , получим

$$\dot{x}_i^0 = \sum_{j=1}^{j_n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_{i_j}} f_{i_j}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \xi^i}{\partial t}. \quad (4.33)$$

Тогда с учетом (4.31) запишем

$$F_i = F_i \left[\xi^i(\vec{x}, t), \sum_{j=1}^{j_n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_{i_j}} f_{i_j}(t, \vec{x}) + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right], \quad (4.34)$$

откуда следует, что F_i есть однозначная функция n переменных $F^i(\vec{x})$. Если существуют правые части $f_{i_j}, j=1, 2, \dots, j_n \leq n$ содержащие F_i ,

$$f_{i_j}(t, \vec{x}) = f^{i_j} \left[t, \vec{x}, F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0) \right], \quad (4.35)$$

то в (4.11) возникают уравнения, неразрешимые относительно производных

$$\dot{x}_{i^*} = f^{i^*} \left[t, \bar{x}, F_i \left(\xi^i(\bar{x}, t), \sum_{j=1}^{j_n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_{i_j}} \dot{x}_{i_j} + \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right) \right]. \quad (4.36)$$

Истинная двузначность может возникнуть, если существует более одного решения уравнения (4.36) при $j = j^*$ относительно \dot{x}_{i^*} .

Покажем, что для двузначных нелинейностей, присутствующих в САУ, установившееся решение существует и единственно.

Все рассматриваемые нелинейности удовлетворяют условию

$$F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0) = \begin{cases} F_{i1}(x_i^0), & \dot{x}_i^0 \geq 0; \\ F_{i2}(x_i^0), & \dot{x}_i^0 < 0; \end{cases} \quad (4.37)$$

$$F_{i1}(x_i^0) = F_{i2}(x_i^0) \text{ при } \dot{x}_i^0 = 0.$$

Тогда получим

$$\dot{x}_{i^*} = f^{i^*} \left[t, \bar{x}, F_{i1}(\xi^i(\bar{x}, t)) \right] \frac{\partial \xi^i}{\partial x_{i_{j^*}}} \dot{x}_{i_{j^*}} \geq - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j^*}}^{j_n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_{i_j}} f_{i_j} - \frac{\partial \xi^i}{\partial t}, \quad (4.38)$$

$$\dot{x}_{i^*} = f^{i^*} \left[t, \bar{x}, F_{i2}(\xi^i(\bar{x}, t)) \right] \frac{\partial \xi^i}{\partial x_{i_{j^*}}} \dot{x}_{i_{j^*}} < - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j^*}}^{j_n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_{i_j}} f_{i_j} - \frac{\partial \xi^i}{\partial t}, \quad (4.39)$$

причем $F_{i1}(x_i^0) = F_{i2}(x_i^0)$ при $\dot{x}_i^0 \geq C$, где C – заданное вещественное число. Если начальные условия x_{i0} задачи Коши таковы, что $\dot{x}_i^0 \geq C$, то, вычислив \dot{x}_i^* при $t = t_0$ и подставив это значение в неравенства с теми же номерами, проверим их выполнение. Неравенство, которое истинно, будет определять, с какой из функций (F_{i1} или F_{i2}) начинается переходной процесс в системе. Если же $\dot{x}_i^0 < C$, то учитывая, что автоколебания в системе могут возникнуть только при $x_i^0(t) \geq C$, первый из этих моментов t^* можно принять за новый начальный момент и, положив $x_i^0(t^*) = x_{i0}^*$ новыми начальными условиями, повторить приведенные выше рассуждения и получить тот же установившийся режим. Таким образом, термин «двузначная нелинейность» является в решаемой задаче условным.

Рассмотрим произведение выходных сигналов в форме (4.29) двух нелинейностей $F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0)$ и $F_j(x_j^0, \dot{x}_j^0)$ (параллельное соединение через блок умножения). Оно имеет вид

$$y_i y_j = \sum_{k_i=0}^{\tilde{n}_i} \sum_{j_j=0}^{\tilde{n}_j} \tilde{A}_{ik_i} \tilde{A}_{jk_j} \sin(k_i \omega t + \tilde{\varphi}_{ik_i}) \sin(k_j \omega t + \tilde{\varphi}_{jk_j}), \quad (4.40)$$

где $\tilde{\varphi}_{i0} = \tilde{\varphi}_{j0} = \frac{\pi}{2}$. Каждое слагаемое суммы (4.40) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \tilde{A}_{ik_i} \tilde{A}_{jk_j} \sin(k_i \omega t + \tilde{\varphi}_{ik_i}) \sin(k_j \omega t + \tilde{\varphi}_{jk_j}) = \\ & = \frac{\tilde{A}_{ik_i} \tilde{A}_{jk_j}}{2} \cos[(k_i - k_j) \omega t + \tilde{\varphi}_{ik_i} - \tilde{\varphi}_{jk_j}] - \\ & - \frac{\tilde{A}_{ik_i} \tilde{A}_{jk_j}}{2} \cos[(k_i + k_j) \omega t + \tilde{\varphi}_{ik_i} + \tilde{\varphi}_{jk_j}] = \\ & = \frac{\tilde{A}_{ik_i} \tilde{A}_{jk_j}}{2} \sin \left[(k_i - k_j) \omega t + \tilde{\varphi}_{ik_i} - \tilde{\varphi}_{jk_j} + \frac{\pi}{2} \right] - \\ & - \frac{\tilde{A}_{ik_i} \tilde{A}_{jk_j}}{2} \sin \left[(k_i + k_j) \omega t + \tilde{\varphi}_{ik_i} + \tilde{\varphi}_{jk_j} - \frac{\pi}{2} \right], \quad (4.41) \end{aligned}$$

откуда следует, что сигнал на выходе блока умножения является суммой Фурье с прежней частотой первой гармоники, но с новыми амплитудами и фазами. В частном случае, когда амплитуды низкочастотных гармоник сигналов y_i , y_j равны нулю, выход может содержать составляющие, которые являются по отношению к y_i , y_j не только высшими гармониками, но и субгармониками. Произведение нелинейностей можно считать особой нелинейностью с двумя входами.

Иследуем прохождение гармонического сигнала (4.23) через локальную линейную часть $W_i(t, p)$, где

$$W_i(t, p) = \frac{k_i(t) (b_{0i}(t) p^{m_i} + \dots + b_{m_i-1,i}(t) p + b_{m_i,i}(t))}{p^{n_i} + a_{1i}(t) p^{n_i-1} + \dots + a_{n_i-1,i}(t) p + a_{n_i,i}(t)}, \quad m \leq n. \quad (4.42)$$

Выражение (4.42) определяет следующее дифференциальное уравнение

$$x_{li}^{(n_i)} + a_{li}(t)x_{lj}^{(n_i-1)} + \dots + a_{n_i}(t)x_{lj} = k_i(t)b_{0i}(t)\tilde{y}_i^{(m_i)} + \dots + k_i(t)b_{m_i}(t),$$

$$\sum_{i=1}^{\tilde{k}} n_i = n, \quad (4.43)$$

где $\tilde{y}_i = v_{i1}y_i + v_{i2}\tilde{g}_1$; v_{i1}, v_{i2} – известные вещественные числа, определяемые при проведении преобразования координат (4.10). В общем случае y_i может быть линейной или полилинейной формой $y_i, g_1, x_{lj}, \dots, x_{l\tilde{k}}$. Поскольку ряд Фурье для $\tilde{g}_1(t)$ известен и имеет ту же основную частоту, что ряд Фурье для $y_i(t)$, то сумма Фурье для \tilde{y}_i с необходимым числом гармоник определяется как сумма соответствующих сумм Фурье для y_i, \tilde{g}_1 , с весами v_{i1}, v_{i2} . Тогда $\tilde{y}_i(t)$ можно записать в виде

$$\tilde{y}_i = \tilde{A}_{i0} + \sum_{k=1}^{n_i} \tilde{A}_{ik} \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}); \quad i=1, \dots, \tilde{k}; \quad \tilde{n}_i = \max_i \tilde{n}_i. \quad (4.44)$$

Будем искать выход линейной части x_{li} в установившемся режиме в следующей форме:

$$x_{li} = \sum_{k=0}^{n_i} A_{ik} \sin(k\omega t + \varphi_{ik}), \varphi_{i0} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.45)$$

Частоты первых гармоник входного y_i и выходного x_{li} сигналов одинаковы. Это связано с тем, что ω – неизвестная величина и в результате решения уравнения гармонического баланса должно быть найдено такое ее значение, которое было бы общим для обоих сигналов. Допустим, что частота первой гармоники x_{li}^0 с ненулевой амплитудой равна $\tilde{\omega}$, а частота первой гармоники x_{li}^0 с ненулевой амплитудой равна $\hat{\omega}$. Пусть $\tilde{\omega} \neq \hat{\omega}$ и $\tilde{\omega}/\hat{\omega} = z$ – рациональное число, $z = \frac{n}{k}$ (n – целое, k – натуральное). Тогда минимальное число ω , удовлетворяющее условиям

$$\tilde{\omega}/\omega = n; \quad \hat{\omega}/\omega = k, \quad (4.46)$$

и будет частотой истинной гармоник для x_i^0 и x_{ci_j} , но в данном частном случае амплитуда будет равна нулю. Из (2.46) найдем частоту ω :

$$\omega = \frac{\tilde{\omega} - \hat{\omega}}{n - k}. \quad (4.47)$$

Если $\tilde{\omega}/\hat{\omega}$ есть иррациональное число, то всегда можно найти сколь угодно близкое к нему рациональное число и по формуле (4.47) найти ω с любой заданной точностью.

Приведенное рассуждение обосновывает существование единой основной частоты для колебаний всех фазовых переменных в исследуемой системе, что является основным положением гармонического анализа.

Задача исследования прохождения сигналов через любое звено состоит в том, чтобы найти зависимость параметров выходного сигнала от параметров входного сигнала. Найдем зависимость амплитуд и фаз гармоник сигнала x_{ji} от амплитуд, фаз и частот сигнала y_i . Для этого подставим в левую и правую части уравнения (4.43) выражения (4.23), (4.45) и произведем все операции дифференцирования. Очевидно, что в силу обоснованного выше вывода о единой основной частоте все полученные функции времени могут быть представлены как периодические с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Разложим эти функции в соответствующие ряды Фурье и отбросим члены с номерами больше n_i . В результате получим уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n_i} \hat{A}_{ik}(\bar{A}_i, \bar{\varphi}_i, \omega) \sin[k\omega t + \hat{\varphi}_{ik}(\bar{A}_i, \bar{\varphi}_i, \omega)] = \\ & = \sum_{k=0}^{n_i} A_{ik}^* \left(\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{\tilde{\varphi}}_i, \omega \right) \sin \left[k\omega t + \varphi_{ik}^* \left(\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{\tilde{\varphi}}_i, \omega \right) \right], \quad (4.48) \end{aligned}$$

где $\bar{A}_{ij} = (A_{i0}, A_{i1}, \dots, A_{in_i})$, $\bar{\varphi}_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in_i})$ – неизвестные. Приравняв амплитуды и фазы гармоник с одинаковыми частотами, получим систему $2n_i + 1$ уравнений вида

$$\hat{A}_{ik}(\bar{A}_i, \bar{\varphi}_i, \omega) = A_{ik}^* \left(\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{\tilde{\varphi}}_i, \omega \right); \quad (4.49)$$

$$\varphi_i(\bar{A}_i, \bar{\varphi}_i, \omega) = \varphi_{ik}^* \left(\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{\tilde{\varphi}}_i, \omega \right); \quad k = 0, 1, \dots, n_i; \quad (4.50)$$

с $2n_i + 1$ неизвестными. Решая эти алгебраические уравнения аналитически относительно $\bar{A}_i, \bar{\varphi}_i$, получим решения

$$A_{ik} = A_{ik} \left(\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{\tilde{\varphi}}_i, \omega \right); \quad \varphi_i = \varphi_{ik} \left(\tilde{\tilde{A}}_i, \tilde{\tilde{\varphi}}_i, \omega \right). \quad (4.51)$$

В случае стационарной линейной части $W_i(p)$ выражения (4.51) после замены p на $i\omega$ приводятся к известным формулам

$$A_{ik} = |W_i(i\omega)| \tilde{\tilde{A}}_{ik}, \quad \varphi_{ik} = \arg W_i(i\omega) + \tilde{\tilde{\varphi}}_{ik}, \quad k = 0, 1, \dots, n_i. \quad (4.52)$$

Представим с помощью выражений (4.24) – (4.27), (4.44) $\bar{A}_i, \bar{\varphi}_i$ как функции аргументов $\bar{A}_i^0, \bar{\varphi}_i^0, \omega$ и подставим их в выражение (4.51) (или в (4.52)). Окончательно запишем:

$$A_{ik} = A_{ik}(\bar{A}_i^0, \bar{\varphi}_i^0, \omega), \quad \varphi_i = \varphi_{ik}(\bar{A}_i^0, \bar{\varphi}_i^0, \omega), \quad (4.53)$$

$$k = 0, 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Для большинства САУ функция $\tilde{\xi}_i(\bar{x}_{\mathcal{L}i}, \bar{g})$ из (4.21) является линейной формой переменных $x_{\cdot 1}, \dots, x_{\mathcal{L}\tilde{k}}, g_1$ вида

$$x_i^0 = \tilde{\xi}_i(\bar{x}_{\mathcal{L}i}) = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{L}i}} \gamma_{ij} x_{\mathcal{L}j} + \nu_i g_1; \quad i = 1, \dots, \tilde{k}, \quad (4.54)$$

где γ_i, ν_i – заданные вещественные числа. Тогда в установившемся режиме x_i^0 имеет вид

$$x_{ci}^0 = \sum_{j=1}^{n_{\mathcal{L}i}} \sum_{k=0}^{n_j} \gamma_{ij} A_{ij} \sin(k\omega t + \varphi_{jk}) + \nu_i g_{c1}, \quad (4.55)$$

где $g_{c1}(t)$ есть установившийся режим сигнала $g(t)$, представленный своей суммой Фурье

$$g_{ci}(t) = \sum_{k=0}^{n_i^g} G_{1k}(\omega) \sin(k\omega t + \varphi_{1k}^g(\omega)). \quad (4.56)$$

Из всех чисел n_j , n_1^g выберем максимальное, которое и будет числом гармоник в x_{ci}^0 , n_j^0 и векторы \bar{A}_j , \bar{G}_1 , $\bar{\varphi}_j$, $\bar{\varphi}_1^g$ доопределим для остальных сигналов x_{lj} , g_1 до размерности n_i^0 с помощью нулевых компонентов. Тогда x_{ci}^0 можно представить как следующую сумму

$$x_{ci}^0 = \sum_{k=0}^{n_i^0} \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij} A_{ik} \cos(\varphi_{ik}) + v_i G_{1k} \cos \varphi_{1k}^g \right) \sin k\omega t + \left(\sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij} A_{ik} \sin(\varphi_{ik}) + v_i G_{1k} \sin \varphi_{1k}^g \right) \cos k\omega t \right\}, \quad (4.57)$$

откуда получим

$$A_{ik}^0(\bar{A}, \bar{\varphi}, \omega) = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n_{ni}} \gamma_{ij} A_{ik} \cos(\varphi_{ik}) + v_i G_{1k} \cos \varphi_{1k}^g \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij} A_{ik} \sin(\varphi_{ik}) + v_i G_{1k} \sin \varphi_{1k}^g \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (4.58)$$

$$\varphi_{ik}(\bar{A}, \bar{\varphi}, \omega) = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij} A_{ik} \sin(\varphi_{ik}) + v_i G_{1k} \sin \varphi_{1k}^g}{\sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij} A_{ik} \cos(\varphi_{ik}) + v_i G_{1k} \cos \varphi_{1k}^g}, \quad (4.59)$$

где $k = 0, 1, \dots, n_i$ (подобным же образом формируется \tilde{A}_{ik} , $\tilde{\varphi}_{ik}$). Подставляя выражения (4.58), (4.59) в (4.53), получим обобщенные уравнения гармонического баланса

$$\left\{ A_{ik} = \tilde{A}_{ik}(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n, \omega) \right\} \quad k = 0, 1, \dots, n_i; \quad (4.60)$$

$$\left\{ \varphi_{ik} = \tilde{\varphi}_{ik}(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n, \omega) \right\} \quad k = 1, \dots, n_i; \quad i = 1, \dots, \tilde{k}, \quad (4.61)$$

где (4.60) можно условно назвать уравнением баланса амплитуд, а (4.61) – уравнением баланса фаз. Если в системе кроме сумматоров есть блоки умножения, то вместо (4.54) возникнет сумма линейной и полилинейной форм, которую с помощью выражений (4.40), (4.41) можно привести к сумме гармоник и вновь воспользоваться формулами (4.57) – (4.59) уже с новыми амплитудами и фазами, являющимися произведениями и суммами старых, и получить уравнения гармонического баланса.

При определении параметров колебаний \bar{A}_i , $\bar{\varphi}_i$, ω удобно выделить два основных случая. Первый: при наличии сигналов $g_1(t)$, принадлежащих классам а), б) следует определить возможные колебания на частотах сигнала управления. Для этого выделим его минимальный период T^* (или ε - почти-период [22]) и максимальную основную частоту $\omega^* = 2\pi/T^*$. Положим $\omega = \omega^*$. Тогда в системе (4.60), (4.61) из $2 \sum_{i=1}^{\tilde{k}} n_i + \tilde{k}$ уравнений неизвестными будут:

$A_{i0}, \dots, A_{in_i}; \varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in_i} \quad (i=1, \dots, \tilde{k})$, т.е. их число тоже равно $2 \sum_{i=1}^{\tilde{k}} n_i + \tilde{k}$, ($\varphi_{i0} \stackrel{def}{=} \pi/2$). В этом случае значение φ_{i1} указывает

сдвиг фаз между первыми гармониками сигналов x_i и первой гармоникой сигнала управления (все они имеют одинаковую частоту ω^*). Второй: определение всех основных колебаний на частотах $\omega \neq \omega^*$. Тогда в системе уравнений (4.60), (4.61) неизвестными будут $A_{i0}, \dots, A_{in_i}; \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in_i}, \varphi_{i1}, \dots, \varphi_{in_i}; \omega \quad (i=2, \dots, \tilde{k})$, т.е. число неизвестных осталось прежним: $2 \sum_{i=1}^{\tilde{k}} n_i + \tilde{k}; (\varphi_{i0} \stackrel{def}{=} \pi/2)$. Очевидно,

что во втором случае можно произвольно положить $\varphi_{11} \stackrel{def}{=} \text{const}$ (например, $\varphi_{11} = 0$), поскольку постоянного сдвига фаз между первой гармоникой сигнала управления и первой гармоникой колебаний (даже в случае их вынужденности) не будет. Фаза первой гармоники сигнала x_i выбрана для фиксации без ограничения общно-

сти изложения (можно положить нулевой фазу первой гармоники любого сигнала x_{li}). В этом случае значения $\varphi_{21}, \dots, \varphi_{\tilde{k}1}$ будут равны сдвигу фаз между первой гармоникой сигнала x_{li} и первыми гармониками остальных сигналов $x_{l2}, \dots, x_{l\tilde{k}}$.

Последним этапом анализа нелинейных колебаний является определение, какие из найденных колебаний являются собственными колебаниями системы (автоколебания), а какие - вынужденными, поскольку возможно возникновение субгармоник, несовпадения основной частоты колебаний системы с частотой сигнала управления. Поэтому необходимо, положив в принятой модели САУ все сигналы управления равными нулю, повторно провести анализ колебаний по данной методике. Если множество основных частот колебаний $\omega \in \Omega_1$ при этом изменится (обозначим новое множество Ω_2), то Ω_2 и будет состоять из основных частот автоколебаний. Тогда множество основных частот вынужденных колебаний $\Omega_3 = \Omega_1 \setminus \Omega_2$. Если множество $\Omega_4 = \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, то это означает, что основные частоты колебаний $\omega \in \Omega_4$ соответствуют резонансу. Согласно теореме Дюлака, число решений системы (4.60), (4.61) может быть только конечным.

После решения уравнений гармонического баланса все параметры в установившихся режимах $x_{cLi}(t)$ известны (автоматически определяются и параметры всех сигналов $y_{cLi}(t)$). Для того чтобы определить параметры установившихся режимов фазовых переменных $x_{cLi}(t)$, имеющих вид (4.20), необходимо определить сначала класс функций $\eta_i(\bar{x}, g_1)$ из (4.21). Далее, в зависимости от схемы, по которой уравнение (4.43) переводится в систему ОДУ, запишем ее для локальной линейной части $W_i(p, t)$ в виде

$$\vec{\dot{x}}^i = A^i(t)\vec{x}^i + \vec{b}^i(t)\tilde{y}_i; \quad i=1, \dots, \tilde{k}, \quad (4.62)$$

где $\vec{x}^i = (x_{n^{i-1}+1}, \dots, x_{n^{i-1}+n^i})$, $n^0 \stackrel{def}{=} 0$, A^i - матрица $n^i \times n^i$; \vec{b}^i - вектор $n^i \times 1$. Выход звена $W_i(p, t)$ принято представлять как линейную форму вида

$$x_{Li} = C_{x1}^i x_{n^{i-1}+1} + \dots + C_{xn}^i x_{n^{i-1}+n^i} + C_y^i \tilde{y}_i, \quad (4.63)$$

где $C_{x1}^i, \dots, C_{xn^i}^i, C_y^i$ – заданные вещественные числа. Подставив выражение (4.20) в (4.62), получим n^i алгебраических выражений вида

$$\sum_{k=0}^{n_j^*} k A'_{j^*k} \omega \sin(k\omega t + \varphi'_{j^*k}) = \sum_{j=n^{i-1}+1}^{n^{i-1}+n^i} \sum_{k=0}^{n_j} A'_{jk} a_{j^*j}^i(t) \sin(k\omega t + \varphi'_{jk}) + \sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} b_{j^*}^i(t) \tilde{A}_{ik} \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}_{ik}), \quad (4.64)$$

где $j^* = n^{i-1} + 1, \dots, n^{i-1} + n^i$, ω – известная величина. Разложим все функции $a_{cj^*j}^i(t) \sin(k\omega t + \varphi'_{jk})$ и $b_{cj^*}^i(t) \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}_{jk})$ в ряды Фурье с основной частотой ω и оставим суммы Фурье с n_j^* гармониками. Проведем группировку гармоник по одинаковым частотам и применим формулы типа (4.58), (4.59). Приравнявая амплитуды и фазы гармоник с одинаковыми частотами в каждом из n^i уравнений

(4.64), получим $\sum_{j=n^{i-1}+1}^{n^{i-1}+n^i} 2n_j + 1$ алгебраических уравнений относительно

но того же числа неизвестных $A'_{j0}, \dots, A'_{jn_j}, \varphi'_{j1}, \dots, \varphi'_{jn_j}; j = n^{i-1} + 1, \dots, n^{i-1} + n^i$. Решая эти уравнения, определим все параметры установившихся режимов всех фазовых координат.

В многосвязной системе, состоящей из M каналов, каждый из них подобен рассмотренной выше односвязной системе с добавлением перекрестных связей. Все связи в такой системе считаются заданными и фиксированными, вопрос об устойчивости к «связыванию» в данном пособии не рассматривается. Перекрестные связи осуществляются с помощью сумматоров или блоков умножения в любых точках структурной схемы САУ. Применяя к каждому каналу методику гармонической линеаризации, предложенную в данном разделе, и учитывая, что основная частота колебаний ω является общей для всех переменных во всех связанных каналах, получим уравнения гармонического баланса, подобные (4.60), (4.61). Появление вместо одного M сигналов управления $g_1(t), \dots, g_n(t)$ не вносит никаких изменений в методику.

4.3. Оценка точности метода гармонической линеаризации

При математическом моделировании нелинейных динамических систем необходимо иметь априорную информацию об основных свойствах возможных решений, например о параметрах установившихся режимов. Метод гармонической линеаризации является одним из лучших инструментов для решения такой задачи. Достоверность полученных результатов определяется учетом количества гармоник установившегося сигнала, достаточного для выполнения расчетов с заданной точностью [23, 24]. Получение соотношений, связывающих допустимую погрешность с достаточным числом гармоник, и является целью данного раздела.

Положим, что модель исследуемой системы имеет описание в виде системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши с не более чем кусочно-непрерывной правой частью. Будем считать, что все кусочно-непрерывные функции могут быть со сколь угодно малой погрешностью заменены непрерывными функциями.

Рассматриваемая система с точки зрения описания «вход-выход» может содержать сколь угодно большое конечное множество последовательных соединений статической нелинейной части F_i и динамической линейной части W_i , $i=1, \dots, \tilde{k}$. Задача состоит в определении количества гармоник n_i в выходном сигнале x_{in} линейной части W_i , достаточного для того, чтобы относительная погрешность решения по данному сигналу не превышала заданной величины $\bar{\varepsilon}$.

Рассмотрим сначала вопрос о количестве гармоник \bar{n}_i выходного сигнала y_i нелинейности F_i , достаточном для того, чтобы погрешность представления этого сигнала частичной суммой ряда Фурье вида

$$y_i(t) = \tilde{A}_{i0} + \sum_{k=1}^{\bar{n}_i} \tilde{A}_{ik} \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}_{ik}) \quad (4.65)$$

не превышала $\bar{\varepsilon}$. Абсолютную погрешность Δ_y зададим в следующем виде:

$$\Delta_y = \left(\int_{-\pi}^{\pi} (y_{iT} - y_i)^2 d\omega t \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.66)$$

где y_{iT} – точное представление сигнала y_i в установившемся режиме, имеющее вид

$$y_{iT}(t) = A_{i0}^y + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ik}^y \sin(k\bar{\omega}t + \varphi_{ik}^y), \quad (4.67)$$

где $\bar{\omega}$ – точное значение основной частоты, причем $y_i \rightarrow y_{iT}$, $n_i \rightarrow \infty$ равномерно. Относительная погрешность в этом случае записывается следующим образом:

$$\varepsilon_{y_i} = \Delta_{y_i} / \left(\int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}^2 d\bar{\omega}t \right)^{\frac{1}{2}} \leq \bar{\varepsilon}. \quad (4.68)$$

Очевидно, что абсолютная погрешность Δ_{y_i} есть норма сигнала $\Delta y_i = (y_{iT} - y_i)$, удовлетворяющая неравенству треугольника:

$$\begin{aligned} \|y_{iT} - y_i\| \leq & \left\| \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} A_{ik}^y \sin(k\bar{\omega}t + \varphi_{ik}^y) - \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} \tilde{A}_{ik} \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}_{ik}) \right\| + \\ & + \left\| \sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} A_{ik}^y \sin(k\bar{\omega}t + \varphi_{ik}^y) \right\|. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Потребуем, чтобы вместо неравенства (4.68) выполнялось более сильное неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y_i} \leq & \left\{ \left\| \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} A_{ik}^y \sin(k\bar{\omega}t + \varphi_{ik}^y) - \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} \tilde{A}_{ik} \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}_{ik}) \right\| + \right. \\ & \left. + \left\| \sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} A_{ik}^y \sin(k\bar{\omega}t + \varphi_{ik}^y) \right\| \right\} / \|y_{iT}\| \leq \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Из (4.66) получим

$$\Delta_{y_i}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}^2(\bar{\omega}t) d\omega t + \int_{-\pi}^{\pi} y_i^2(\omega t) d\omega t - 2 \int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}(\bar{\omega}t) y_i(\omega t) d\omega t. \quad (4.71)$$

Поскольку отношение частот $\omega / \bar{\omega}$ есть некоторое вещественное число $\chi > 0$, то с учетом равенства Парсеваля для первого интеграла из выражения (4.71) запишем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}^2(\bar{\omega}t) d\bar{\omega}t = \chi \int_{-\pi}^{\pi} y_i^2(\bar{\omega}t) d\bar{\omega}t = \chi \sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2. \quad (4.72)$$

Тогда для второго интеграла справедлива запись

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}^2(\omega t) d\omega t = \sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} \tilde{A}_{ik}^2. \quad (4.73)$$

Для третьего интеграла запишем следующее соотношение:

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}(\bar{\omega}t) y_i(\omega t) d\omega t = \int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}(\bar{\omega}t) y_i(\bar{\omega}t) d\bar{\omega}t + \Delta_i^*. \quad (4.74)$$

Здесь в выражении для y_i вместо ω подставлена частота $\bar{\omega}$, а Δ_i^* – разность двух интегралов с ω и $\bar{\omega}$. Очевидно, что для Δ_i^* справедливо выражение

$$\lim_{\tilde{n}_i \rightarrow \infty} \Delta_i^* = 0. \quad (4.75)$$

Из ортогональности системы тригонометрических функций и равенства Парсеваля следует соотношение

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_{iT}(\bar{\omega}t) y_i(\omega t) d\omega t = \sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} A_{ik}^y \tilde{A}_{ik}. \quad (4.76)$$

Учитывая, что $\omega = \bar{\omega} + \Delta\omega$, запишем

$$\chi = 1 + \frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}}, \quad (4.77)$$

тогда выражение (4.68) преобразуется следующим образом

$$\varepsilon^2_{y_i} = \left[\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2 + \sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} \tilde{A}_{ik}^2 - 2 \sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} A_{ik}^y \tilde{A}_{ik} - 2\Delta_i^* \right] / \sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2 \quad (4.78)$$

Откуда следует

$$\varepsilon^2_{y_i} = \left\{ \left[\sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} (A_{ik}^y - \tilde{A}_{ik})^2 + \sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} (A_{ik}^y)^2 \right] / \sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2 \right\} -$$

$$-2\Delta_i^* / \sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2 + \frac{\Delta\omega}{\omega} \geq 0. \quad (4.79)$$

Модуль второго слагаемого в выражении (4.79) является удвоенной относительной погрешностью вычисления интеграла (4.74), нормированной относительно знаменателя выражения (4.68), а модуль третьего слагаемого есть относительная погрешность вычисления частоты. В связи с этим должно выполняться следующее неравенство:

$$\varepsilon^2_{y_i} \leq \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} (A_{ik}^y - \tilde{A}_{ik})^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} + \frac{\sum_{k=n_i+1}^{\infty} (A_{ik}^y)^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} + 2 \frac{|\Delta_i^*|}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} + \frac{\Delta\omega}{\omega} \leq \bar{\varepsilon}^2. \quad (4.80)$$

Если допустить, что все функции F_i в принятой модели не только непрерывны, но и абсолютно непрерывны, то все рассматриваемые ряды Фурье сходятся к своим суммам равномерно. Кроме того, выражение в середине неравенства (4.80) является точным значением относительной ошибки при $\Delta_i^* \leq 0$, $\Delta\omega \geq 0$, максимальным из всех возможных значений ε_{y_i} (это следует из правой части соотношения (4.79) и неотрицательности выражения в фигурных скобках). Из выполнения неравенства

$$\frac{\sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} (A_{ik}^y - \tilde{A}_{ik})^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} + \frac{\sum_{k=n_i+1}^{\infty} (A_{ik}^y)^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} \geq 2 \frac{|\Delta_i^*|}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} + \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (4.81)$$

при $\Delta_i^* \geq 0$, $\Delta\omega \leq 0$ и из равномерной сходимости всех рассматриваемых рядов следует усиление неравенства (4.80), имеющее вид

$$\varepsilon^2_{y_i} \leq 2 \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{\tilde{n}_i} (A_{ik}^y - \tilde{A}_{ik})^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} + \frac{\sum_{k=n_i+1}^{\infty} (A_{ik}^y)^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} \right\} \leq \bar{\varepsilon}^2, \quad (4.82)$$

причем сохранение правой части неравенства означает повышение точности и, соответственно, увеличение \tilde{n}_i .

Учитывая, что среднее значение погрешности определения частичной суммы ряда (первое слагаемое в выражении (4.82)) не может превышать веса отброшенного остатка точного ряда (4.67) (второе слагаемое в (4.82)), и, проводя дальнейшее усиление неравенств (4.80), (4.82), запишем

$$\varepsilon_{y_i}^2 \leq 4 \frac{\sum_{k=n_i+1}^{\infty} (A_{ik}^y)^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} \leq \bar{\varepsilon}^2. \quad (4.83)$$

Отсюда следует, что для выполнения неравенства $\varepsilon_{y_i} \leq \bar{\varepsilon}$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\sum_{k=n_i+1}^{\infty} (A_{ik}^y)^2}{\sum_{k=0}^{\infty} (A_{ik}^y)^2} \leq \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4}. \quad (4.84)$$

В силу того, что все функции $y_i(t)$ непрерывны, а некоторые из них возможно имеют конечное или бесконечное число производных в любой точке t , то можно сказать, что $y_i(t)$ относятся к классу функций, имеющих m производных, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Тогда, согласно теореме о скорости сходимости рядов Фурье, существует такое число $M_i > 0$, что амплитуды A_{ik} подчиняются следующим неравенствам

$$A_{i0} \leq M_i, \quad A_{ik}^y \leq \frac{M_i}{k^{m+1}}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, \tilde{n}. \quad (4.85)$$

Тогда для любого k существует такое число $0 < M_{ik} < M_i$, что выполняется равенство

$$A_{ik}^y = \frac{M_{ik}}{k^{m+1}}. \quad (4.86)$$

Подставляя (4.86) в (4.84), получим

$$4 \frac{\sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} (M_{ik} / k^{m+1})^2}{A_{i0}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (M_{ik} / k^{m+1})^2} \leq \bar{\varepsilon}^2. \quad (4.87)$$

Поскольку последовательность $\{M_{ik}^2\}$ ограничена, а показатель степени последовательности $\{k^{2m+2}\}$ не менее двух для любого m , то ряды в числителе и знаменателе (4.87) сходятся и существуют такие числа \hat{M} и \tilde{M} , что можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} \frac{M_{ik}^2}{k^{2m+2}} &= \hat{M} \sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}}; \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_{ik}^2}{k^{2m+2}} &= \tilde{M} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Очевидно, что если S_1 – сумма первого ряда, S_2 – сумма второго ряда из выражений (4.88), а S_3, S_4 – суммы рядов $1 + \sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}}$ и $1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m+2}}$ соответственно, тогда получим

$$\hat{M} = S_1 / S_3; \quad \tilde{M} = S_2 / S_4, \quad (4.89)$$

после чего вместо (4.87) можем записать

$$\varepsilon_{y_i}^2 \leq 4 \frac{\hat{M}}{\tilde{M}} \frac{\sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} k^{-(2m+2)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2m+2)}} \leq \bar{\varepsilon}^2. \quad (4.90)$$

Если $\hat{M} \geq \tilde{M}$, то полагая $\hat{M} = \tilde{M} + \Delta M$ ($\Delta M \geq 0$), получим

$$\frac{\hat{M}}{\tilde{M}} = 1 + \frac{\Delta M}{\tilde{M}}; \quad \frac{\Delta M}{\tilde{M}} \cong \bar{\varepsilon}; \quad \frac{\Delta M}{\tilde{M}} \leq \bar{\varepsilon}; \quad \frac{\hat{M}}{\tilde{M}} \leq 1 + \bar{\varepsilon}, \quad (4.91)$$

если $\hat{M} \leq \tilde{M}$, то полагая $\tilde{M} = \hat{M} + \Delta M$ получим

$$\frac{\hat{M}}{\tilde{M}} = \frac{1}{1 + \Delta M / \hat{M}} \geq \frac{1}{1 + \bar{\varepsilon}}. \quad (4.92)$$

Тогда с учетом (4.91) запишем вместо (4.92) усиленное неравенство

$$\varepsilon_{y_i} \leq 4(1 + \bar{\varepsilon}) \left[\frac{\sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} k^{-(2m+2)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2m+2)}} \right] \leq \bar{\varepsilon}. \quad (4.93)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках в неравенстве (4.93):

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=\tilde{n}_i+1}^{\infty} k^{-(2m+2)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2m+2)}} &= \frac{\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2m+2)}\right) - \left(1 + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} k^{-(2m+2)}\right)}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2m+2)}} = \\ &= 1 - \frac{1 + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} k^{-(2m+2)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2m+2)}}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Известно, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-(2m+2)} \leq 2^{2m+1} / (2^{2m+1} - 1). \quad (4.95)$$

Тогда с учетом (4.94), (4.95) вместо (4.93) запишем новое усиленное неравенство

$$\varepsilon^2_{y_i} \leq 4(1 + \bar{\varepsilon}) \left\{ 1 - \frac{1 + \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} k^{-(2m+2)}}{1 + 2^{2m+1} / (2^{2m+1} - 1)} \right\} \leq \bar{\varepsilon}^2, \quad (4.96)$$

откуда окончательно получим, что для обеспечения погрешности, меньшей $\bar{\varepsilon}$, число учитываемых гармоник n_i должно быть таким, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\left[2^{2m+1} - (2^{2m+1} - 1) \sum_{k=1}^{\tilde{n}_i} k^{-(2m+2)} \right] / (2^{2m+1} - 1) \leq \frac{\bar{\varepsilon}^2}{4(\bar{\varepsilon}^2 + 1)}. \quad (4.97)$$

При симметричных колебаниях из числителя и знаменателя отношения в левой части (4.96) необходимо убрать единицы, являющиеся первыми слагаемыми.

Данная оценка точности является достаточно конструктивной, так как проводя последовательное суммирование по k для $\tilde{n}_i = 1, 2, \dots$ и проверяя выполнение неравенства (4.97), получим искомое значение \tilde{n}_i .

Рассмотрим прохождение сигнала $y_i(t)$ через линейную часть W_i . В общем случае, когда линейная часть нестационарна, следует, приняв число гармоник n_i в сигнале x_{in} меньшим либо равным $\tilde{n}_i(\tilde{n}_i, \tilde{g}_1)$, \tilde{n}_i найдено из (4.97), подставить оба сигнала x_{in} , y_i в уравнение гармонического баланса. Если среди коэффициентов дифференциального уравнения i -й линейной части есть такие, у которых число непрерывных производных меньше, чем у функции $F_i(x_i^0(t))$, то, применяя формулу (4.97) к левой и правой частям уравнения гармонического баланса как функциям времени, получим, соответственно, два числа n_i^1 , n_i^2 . Тогда, выбирая $n_i = \max(\tilde{n}_i, n_i^1, n_i^2)$ и решая уравнения баланса амплитуд и фаз, получим выражения для параметров колебаний x_{in} . В противном случае $n_i < \tilde{n}_i$ (соответственно в сигнале y_i число гармоник уменьшается на $\tilde{n}_i - n_i$).

В случае стационарной линейной части W_i , амплитудная характеристика которой мажорируется хотя бы амплитудной характеристикой апериодического звена, можно отменить условие непрерывности функций F_i и считать их кусочно-непрерывными, поскольку даже для неубывающей последовательности $\{\tilde{A}_i\}$ (соответственно, $\{\tilde{A}_i\}$) последовательность $\{A_{ik}\}$ будет не только убывающей, но и имеющей мажоранту вида (4.85), что гарантирует

корректность оценки (4.97), примененной сразу к $x_{in}(t)$, даже при неравномерной сходимости ряда Фурье функции $y_i(t)$.

Сигналы x_i^0 , x_{in} являются для большинства САУ линейными формами, поэтому для их относительных ошибок справедливы неравенства

$$\|\Delta x_i^0\|/\|x_i^0\| \leq \bar{\varepsilon}; \quad \|\Delta x_{in}^0\|/\|x_{in}^0\| \leq \bar{\varepsilon}. \quad (4.98)$$

Поэтому, если решение уравнений гармонического баланса с n_i гармониками существует, то оно определено с относительной погрешностью, не превышающей $\bar{\varepsilon}$. Это означает, что для достижения точности $\bar{\varepsilon}$ нелинейности F_i и линейные части W_i должны удовлетворять определенным условиям. Если точные значения сигналов y_{iT} , x_{iT}^0 , x_{inT} выражаются следующим образом:

$$y_{iT} = y_i + \Delta y_i; \quad x_{iT}^0 = x_i^0 + \Delta x_i^0; \quad x_{inT} = x_{in} + \Delta x_{in}, \quad (4.99)$$

то раскладывая F_i в обобщенный ряд Тейлора в окрестности точки x_i^0 , получим

$$F_i(x_{iT}^0, \dot{x}_{iT}^0) = F_i(x_i^0, \dot{x}_i^0) + \left. \frac{\partial F_i(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{x=x_i^0} \Delta x_i^0 + \left. \frac{\partial F_i(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\dot{x}=\dot{x}_i^0} \Delta \dot{x}_i^0 + \dots, \quad (4.100)$$

тогда

$$\frac{\|\Delta y_i\|}{\|y_i\|} \leq \left\| \frac{\partial F_i(x, \dot{x})}{\partial x} \right|_{x=x_i^0} \frac{\|\Delta x_i^0\|}{\|y_i\|} + \left\| \frac{\partial F_i(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right|_{\dot{x}=\dot{x}_i^0} \frac{\|\Delta \dot{x}_i^0\|}{\|y_i\|} + \dots \leq \bar{\varepsilon}.$$

Поскольку энергия на входе и выходе любого элемента сохраняется, то можно записать

$$\left\| \frac{\partial F_i(x, \dot{x})}{\partial x} \right\|_{\bar{\varepsilon}} + \left\| \frac{\partial F_i(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}} \right\|_{\bar{\varepsilon}} + \left\| \frac{\partial^2 F_i(x, \dot{x})}{\partial x^2} \right\|_{\bar{\varepsilon}} + \dots \leq \bar{\varepsilon}. \quad (4.101)$$

Аналогично запишем в операторной форме для линейной части с учетом свойства аддитивности

$$\Delta x_{in} = W_i(p, t) \Delta y_{in}, \quad (4.102)$$

откуда получим

$$\|\Delta x_{in}\|/\|\Delta y_{in}\| = \|W_i(p, t)\| \leq 1. \quad (4.103)$$

Например, если $\|W_i\|$ – амплитудная характеристика, то она не должна превосходить 1.

Неравенства (4.101), (4.103) являются сильными достаточными условиями сохранения погрешности в указанных пределах.

Пример. 4.1. Расчеты с применением оценки (4.97) показали, что при $m=0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,1; 0,01$ получим $\tilde{n}_i = 6; 500$, а при $m=4$ и $\bar{\varepsilon} = 0,1; 0,01$ получим $\tilde{n}_i = 3; 3$ соответственно. Качественно связь параметров $\tilde{n}_i, m, \bar{\varepsilon}$ показана на рис. 4.3.

Более детальный анализ характеристик линейных и особенно нелинейных частей системы в каждой конкретной задаче может позволить ослабить указанные ограничения.

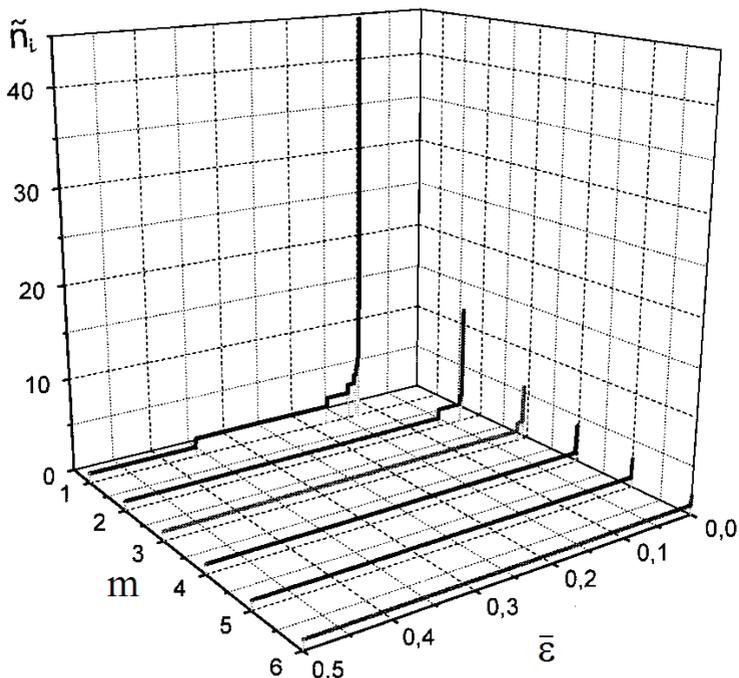


Рис. 4.3. Зависимость точности МГЛ от порядка дифференцируемости нелинейности и количества учитываемых гармоник

Контрольные вопросы и упражнения

1. Что называется неидеальностью переключения?
2. Какие решения задачи Коши называются ε -устойчивыми?
3. Какие области в пространстве параметров системы разделяет область автоколебаний?
4. Какова структура обобщенной локальной пары?
5. Предполагает ли присутствие в системе двузначной нелинейности неоднозначность решения?
6. Относительно каких переменных решается итоговая система уравнений гармонического баланса при учете высших гармоник?
7. Почему фаза первой гармоники может быть приравнена к нулю?
8. Какой параметр является основным для оценки погрешности метода гармонической линеаризации?
9. В чем смысл достаточности оценки погрешности метода гармонической линеаризации?
10. Какими функциями мажорируется последовательность амплитуд гармоник нелинейных колебаний?
11. Чем определяется скорость затухания мажоранты?
12. Можно ли считать оценку числа гармоник, достаточного для обеспечения требуемой точности, явной функцией?

Глава 5. НЕКОТОРЫЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

5.1. Определение параметров скачкообразного резонанса в нелинейных системах

В слабодемпфированных системах управления с нелинейностями типа насыщения (рис. 5.1) под действием плавно меняющихся входных синусоидальных сигналов возможны скачкообразные изменения амплитуды колебаний [25]. Рассмотрим процесс возникновения скачкообразного резонанса при плавном изменении частоты входного сигнала.

Скачкообразный резонанс в диапазоне частот $\omega_1 \div \omega_2$ возникает в нелинейных системах из-за неоднозначного соответствия между сигналами $g(t)$ на входе всей системы и сигналом $x(t)$ на входе нелинейности. Для графоаналитического построения амплитудной характеристики скачкообразного резонанса воспользуемся соотношением, связывающим изображение входного сигнала G и сигнала ошибки X

$$X(A, \omega) = \frac{G(i\omega)}{1 + J(A)W(i\omega)}, \quad (5.1)$$

где $J(A)$ – коэффициент гармонической линеаризации насыщения по первой гармонике.

Перепишем формулу (5.1) в виде

$$X(A, \omega) = \frac{J(A)W(i\omega)}{1 + J(A)W(i\omega)} \frac{G(i\omega)}{J(A)W(i\omega)}. \quad (5.2)$$

Из формулы (5.2) следует, что первый множитель, определяющий семейство амплитудных и фазовых характеристик замкнутой

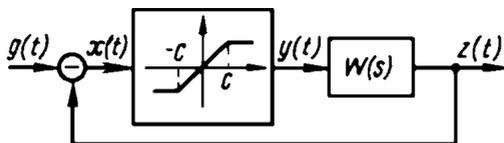


Рис. 5.1. Структурная схема одноконтурной системы управления с нелинейным элементом типа насыщения

системы, обуславливает неоднозначность соответствия сигналов $g(t)$ и $x(t)$. Подадим на вход системы периодический сигнал $g(t) = A_g \sin \omega_g t$, тогда на выходе нелинейной системы образуется сигнал

$$z(t) = A_z \sin(\omega_g t + \varphi_z).$$

На входе нелинейности в этом случае образуется сигнал

$$x(t) = A \sin(\omega_g t + \hat{\varphi}_z),$$

а на выходе

$$y(t) = A_y \sin(\omega_g t + \hat{\varphi}_z).$$

Применяя гармоническую линеаризацию нелинейного элемента, найдем передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(A_g, i\omega_g) = \frac{J(A)W(i\omega_g)}{1 + J(A)W(i\omega_g)}.$$

Обозначим модуль передаточной функции разомкнутой системы в виде отношения амплитуды выходного сигнала замкнутой системы и амплитуды входного сигнала

$$|W(i\omega_g)| = A_z(\omega_g) / A_y(\omega_g).$$

Учитывая, что $A_y(\omega_g) = J(A)A(\omega_g)$ и $A_z = |W(i\omega_g)|J(A)A$, получим

$$A_g = \frac{|W(i\omega_g)|J(A)}{|\Phi(A_g, i\omega_g)|} A = \frac{A_z}{|\Phi(A_g, i\omega_g)|}.$$

Логарифмируя последнее выражение и группируя слагаемые, запишем

$$20 \lg |\Phi(i\omega_g)| = 20 \lg |W(i\omega_g)| - 20 \lg A_g + 20 \lg J(A) + 20 \lg A. \quad (5.3)$$

Выражением (5.3) удобно пользоваться при построении логарифмических амплитудных частотных характеристик скачкообразного резонанса. Точки логарифмической характеристики $20 \lg |\Phi(i\omega_g)|$, соответствующие выражению (5.3), будут принадлежать резонансной кривой, как показано на рис. 5.2. С увеличением частоты от ω_1 до ω_2 амплитуда установившихся колебаний плавно возрастает. При малом возрастании частоты ω происходит скачок амплитуды от точки $T2$ до точки $T3$. Увеличение частоты приво-

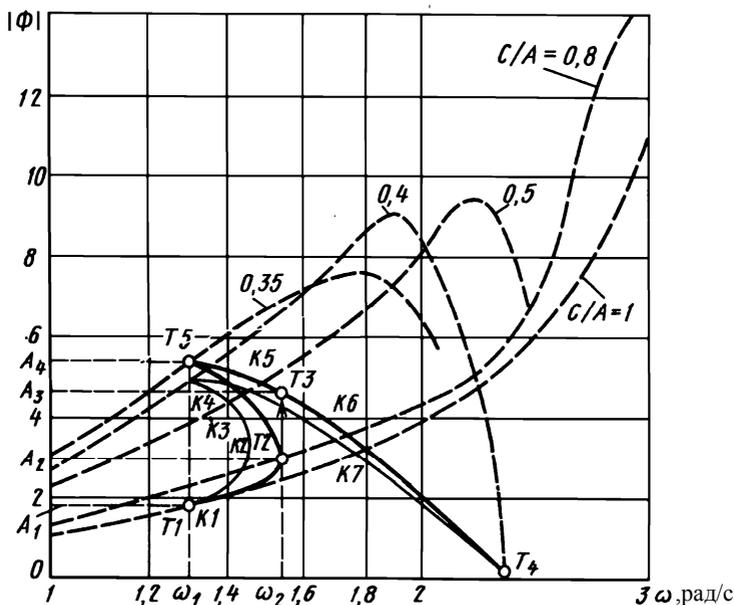


Рис. 5.2. Логарифмическая амплитудная частотная характеристики скачкообразного резонанса в слабодемпфированной нелинейной системе с учетом 1-й и 3-й гармоник

дит к медленному падению амплитуды на участке $T3 - T4$. Если затем снова уменьшить частоту, то в точке $T5$ на частоте ω_1 вновь происходит скачкообразное изменение амплитуды от $T5$ до $T1$.

Высшие гармоники оказывают большое влияние на параметры скачкообразного резонанса, что связано с изменением эквивалентной передаточной функции (коэффициента гармонической линеаризации $J(A)$). Рассмотрим влияние высших гармоник на величину скачка $A_4 - A_1$ для нелинейности типа насыщения. Если $T5$ принадлежит кривой семейства логарифмических амплитудных характеристик замкнутой системы, соответствующей определенному значению A , а следовательно, и $J(A)$, то можно обозначить ординату этой точки через $20 \lg |\Phi_J(i\omega_g)|$. Точка $T1$ принадлежит кривой данного семейства при $J(A) = 1$. Обозначим ординату $T1$ как $20 \lg |\Phi_1(i\omega_g)|$, тогда величина скачка $A_5 - A_1$ в децибелах равна

$$20\lg|\Phi_J(i\omega_g)| - 20\lg|\Phi_1(i\omega_g)| = 20\lg\left|\frac{\Phi_J(i\omega_g)}{\Phi_1(i\omega_g)}\right|.$$

Используя экспоненциальное представление передаточной функции разомкнутой системы в виде $W(i\omega) = H(\omega) \exp[i\theta(\omega)]$, получим

$$R(J) = \left|\frac{\Phi_J(i\omega_g)}{\Phi_1(i\omega_g)}\right| = J \sqrt{\frac{H^2 + 2H \cos \theta + 1}{J^2 H^2 + 2JH \cos \theta + 1}}. \quad (5.4)$$

Таким образом, выражение (5.4) определяет зависимость амплитуды скачкообразного резонанса от вида нелинейности при учете влияния высших гармоник. Исследуем это выражение, учитывая, что когда знаменатель (5.4) стремится к нулю, величина $R(J)$ стремится к бесконечности. Найдем также J и θ , при которых это происходит, пользуясь уравнением

$$J^2 H^2 + 2JH \cos \theta + 1 = 0$$

с дискриминантом $D = 4H^2 \cos^2 \theta - 4H^2$, откуда можно получить значение корней уравнения

$$J_{1,2} = (-\cos \theta \pm i \sin \theta) / H.$$

Так как нелинейность однозначная, то ее эквивалентная передаточная функция не может иметь мнимой части, поэтому $\theta = \pm 180^\circ n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Однако физический смысл условий решения задачи требует, чтобы величина $J(A)$ была неотрицательной. Тогда $\theta = \pm 180^\circ(2n + 1)$. Для реальных систем с фазовым запаздыванием имеем $\theta = -180^\circ$.

Найдем экстремум функции $R(J)$ при $\theta = -180^\circ$ в виде

$$\frac{dR(J)}{dJ} = \sqrt{H^2 + 2 \cos \theta H + 1} \times \left[\frac{\sqrt{H^2 J^2 + 2H \cos \theta J + 1} - \frac{J(H^2 J + 2H \cos \theta)}{2\sqrt{H^2 J^2 + 2H \cos \theta J + 1}}}{H^2 J^2 + 2H \cos \theta J + 1} \right]. \quad (5.5)$$

После преобразований выражения (5.5) определим

$$HJ \cos \theta + 1 = 0, \quad J = -\frac{1}{H(\omega) \cos \theta}. \quad (5.6)$$

Из условия неотрицательности $J(A)$ имеем $\cos \theta < 0$. Формула (5.6) позволяет найти частоту, при которой амплитуда скачка достигает максимума при заданной величине коэффициента гармонической линейаризации. Функция $R(J)$ и полученные с ее помощью выражения не являются условием возникновения скачка. Наоборот, все приведенные рассуждения имеют смысл лишь тогда, когда заранее известно, что на данной частоте возможен скачок. Данные выражения определяют лишь его параметры.

Для нелинейности типа насыщения выражение (5.6) может указывать ориентировочно частотный диапазон, в котором возможен скачкообразный резонанс. Действительно, если при определенной частоте выражение (5.6) принимает величину, большую единицы, то скачкообразный резонанс на данной частоте невозможен.

Важное значение имеет определение координат пересечения функции $R(J)$ с прямой единичного уровня, так как равенство $R(J)$ единице означает принадлежность точки $T6$ амплитудной характеристике, соответствующей линейному режиму работы системы, а это и указывает на отсутствие скачкообразного резонанса.

Действительно, при $R(J) = 1$ из (5.4) имеем

$$\begin{aligned} J\sqrt{H^2 + 2H \cos \theta + 1} &= \sqrt{H^2 J^2 + 2H \cos \theta J + 1}, \\ (2H \cos \theta + 1)J^2 - 2H \cos \theta J - 1 &= 0, \\ D &= 4H^2 \cos^2 \theta + 8H \cos \theta + 4, \end{aligned}$$

а корни уравнения будут

$$J_{1,2} = \frac{H \cos \theta \pm \sqrt{H^2 J^2 + 2H \cos \theta + 1}}{2H \cos \theta + 1}.$$

Так как $J > 0$, то физический смысл имеет лишь один корень

$$J = \frac{H \cos \theta + \sqrt{H^2 J^2 + 2H \cos \theta + 1}}{2H \cos \theta + 1}.$$

Условия $\theta = -90^\circ$ и $J = 1$ означают невозможность появления резонанса на частоте, где фаза равна -90° , так как при $\theta = -180^\circ$ имеем $J = 1/(2H - 1)$. Семейство функций $R(J)$ показано

на рис. 5.3. Исследуем влияние высших гармоник более подробно на примере следящей системы.

Пример 5.1. Пусть САУ состоит из нелинейности типа насыщения ($C=2, B=2$), последовательно соединенной с линейной частью, имеющей следующую передаточную функцию

$$W(s) = \frac{K(T_2s + 1)}{s(T_1s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)},$$

где $T_1 = 2$ с; $T_2 = 1$ с; $T_3 = 0,5$ с; $T_4 = 0,1$ с; $K = 10$ с⁻¹.

Рассмотрим более подробно характер процессов, приводящих к скачкообразному резонансу в данной системе. В линейном режиме, т.е. когда $C/A = 1, J = 1$, фаза выходного сигнала будет

$$\varphi_{\text{эл}} = \arctg \frac{\sin \theta}{\cos \theta + H(\omega)},$$

а в режиме насыщения

$$\varphi_{\text{зн}} = \arctg \frac{\sin \theta}{\cos \theta + J(A)H(\omega)}.$$

Так как $\arctg x$ – функция строго возрастающая, а $J(A) < 1$, то $\varphi_{\text{эл}} < \varphi_{\text{зн}}$. Ошибка $x(t)$ будет наибольшей тогда, когда сигналы $g(t)$ и $z(t)$ находятся в противофазе, т.е. при $\varphi_{\text{зн}} = 90^\circ$. Кривая изменения коэффициента гармонической линеаризации $J(C/A)$ показана на рис. 5.4. При этом видно, что если $C/A < (C/A)^*$, то

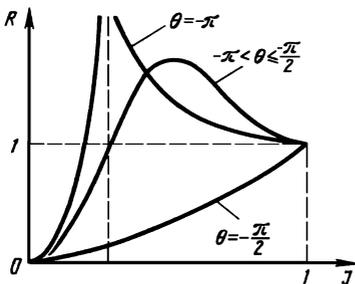


Рис. 5.3. График функции R , определяющей зависимость амплитуды скачкообразного резонанса от формы нелинейности и учета высших гармоник в коэффициенте гармонической линеаризации

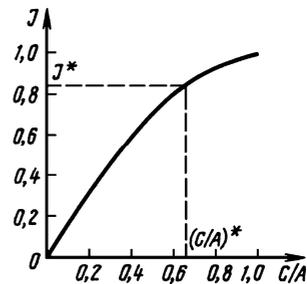


Рис. 5.4. Зависимость коэффициента гармонической линеаризации для нелинейности типа насыщения от C/A

происходит быстрое уменьшение $J(C/A)$ и, соответственно, быстрое увеличение $\varphi_{\text{зн}}$. Для рассматриваемого примера коэффициент гармонической линеаризации будет иметь вид

$$J(C/A) = \frac{2B}{\pi C} \left[\arcsin \frac{C}{A} + \frac{C}{A} \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}} \right].$$

Амплитуда сигнала на выходе нелинейности определяется из соотношения

$$A_y = AJ\left(\frac{C}{A}\right),$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} A_y = \lim_{A \rightarrow \infty} AJ\left(\frac{C}{A}\right) = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[\frac{2B}{\pi C} \left(A \arcsin \frac{C}{A} + C \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}} \right) \right],$$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2B}{\pi} \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}} = \frac{2B}{\pi}. \quad (5.7)$$

Учитывая, что

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \frac{2B}{\pi C} A \arcsin \frac{C}{A} = \frac{2B}{\pi} \quad (5.8)$$

и складывая выражения (5.7) и (5.8), найдем

$$\lim_{A \rightarrow \infty} AJ\left(\frac{C}{A}\right) = \frac{4B}{\pi}.$$

Рассмотрим последовательность процессов, происходящих при плавном нарастании частоты входного сигнала:

1) увеличение частоты приводит к возрастанию ошибки, которую система уже не успевает обрабатывать, ее сигнал $x(t)$ начинает входить в зону насыщения;

2) зона насыщения $J(C/A)$ становится меньше единицы, что приводит к увеличению фазового сдвига $\varphi_{\text{зн}}$;

3) с ростом $\varphi_{\text{зн}}$ увеличивается ошибка, приводящая к увеличению зоны насыщения, и т.д.

После перехода величиной C/A критического значения $(C/A)^*$ процесс насыщения быстро нарастает практически на постоянной частоте, так как при этом зона насыщения растет значительно бы-

стрее, чем плавно меняющаяся частота. Данный процесс приводит к быстрому переходу $z(t)$ от трапецеидального сигнала к прямоугольному, что свойственно нелинейностям типа идеального реле с переключением от B до $-B$. Таким образом, хотя $J(C/A)$ быстро уменьшается, но при этом $AJ(C/A)$ возрастает до постоянного уровня $4B/\pi$, в результате чего образуется скачок на выходе линейной части системы. На рис. 5.2 построены тонкими штриховыми линиями логарифмические амплитудные частотные характеристики замкнутой системы при учете только первой гармоники сигнала $x(t)$. Располагая семейством таких характеристик и зная $J(C/A)$, с помощью графика на рис.5.4 найдем несколько значений $A_{y_i} = J_i(C/A_i)A_i$ и величину A_{z_i}/A_{y_i} . При постоянных значениях амплитуды входного сигнала A_{g_i} на штриховых линиях нанесем точки $K1-K7$ (см. рис. 5.2). Соединяя их сплошной тонкой линией, получим кривую изменения амплитуды в зависимости от частоты, характеризующую нелинейный резонанс в исследуемой системе. Здесь же приведены частоты ω_1 и ω_2 , соответствующие скачкам амплитуды. Учтем влияние третьей гармоники на первую с помощью (5.30).

Построим жирной линией резонансную кривую с учетом влияния третьей гармоники (см. рис. 5.2). Как можно заметить, амплитуда скачка увеличилась примерно на 10 %. При этом зона возможных скачков амплитуды $(\omega_1 - \omega'_2)$ изменилась на 20 %.

Расширение частотного диапазона возможно только вправо, так как левая нижняя граница $\omega_1 = \omega'_1$, соответствующая $C/A=1$, не зависит от добавочных коэффициентов, равных в этом случае нулю. Соответственно не может сдвигаться влево верхняя граница, которая должна находиться на одной частоте с нижней.

Данный пример показывает, что даже в системе, обладающей демпфированием, значительно влияние высших гармоник.

Наличие максимума у функции $R(J)$ позволяет подавить скачкообразный резонанс, вводя резонансные пики по высшим гармоникам в линейной части системы. Это приводит к скачкообразному увеличению коэффициента гармонической линеаризации и позво-

ляет, пройдя максимум амплитуды, перейти на нисходящую ветвь функции без скачка.

Зависимость амплитуды скачка от коэффициента гармонической линеаризации позволяет снижать или повышать эффект скачкообразного резонанса, регулируя форму нелинейности. Ограничимся классом однозначных функций. Влияние всех высших гармоник

$\sum_{i=3}^{\infty} a_{ii}$ определяют с помощью следующей квадратичной оценки

$$\sigma = \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T [AJ(A) \sin \omega t - F(A \sin \omega t)]^2 dt \right\}^{1/2}, \text{ где } J(A) - \text{основной}$$

коэффициент гармонической линеаризации.

Оценить влияние высших гармоник можно также, определив близость функций $J(A)x$ и $F(x)$ на отрезке $[-A, A]$, т.е.

$$\sigma^* = \left\{ \int_{-A}^A [J(A)x - F(x)]^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Для получения аналитической оценки определим выражение для приближенного вычисления коэффициента гармонической линеаризации с учетом влияния третьей гармоники на первую, используя согласно [26] разложение нелинейности в ряд Тейлора в окрестности первой гармоники

$$J'(C/A) = J(C/A) + \delta_3 \cos \varphi_3 \Delta a_{13}(C/A), \quad (5.9)$$

$$\delta_3 = |W(3\omega)| \sqrt{a'_{33}(C/A) + b'_{33}(C/A)};$$

$$\varphi_3 = \pi + \arg W(3\omega) + \operatorname{arctg} \frac{b'_{33}(C/A)}{a'_{33}(C/A)}.$$

Здесь $a'_{33}(C/A)$ и $b'_{33}(C/A)$ – коэффициенты гармонической линеаризации по третьей гармонике. Формулы для их вычисления имеют вид

$$a'_{33}(C/A) = \frac{C}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin 3\psi d\psi;$$

$$b'_{33}(C/A) = \frac{C}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \cos 3\psi d\psi.$$

Рассмотренная в примере нелинейность неоднозначна и нечетна, т.е.

$$\delta_3 = |W(3\omega)|a'_{33}(C/A); \quad (5.10)$$

$$\varphi_3 = \pi + \arg W(3\omega). \quad (5.11)$$

Подставив в выражения (5.10) и (5.11) числовые значения, определим δ_3 и φ_3 и, зная $\Delta a_{13}(C/A) = (C/\pi A) \int_0^{2\pi} F(A \sin \psi) \sin 3\psi d\psi$, полу-

чим второе приближение эквивалентной передаточной функции $J'(C/A)$. Результаты расчетов приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

**Основные и добавочные коэффициенты
гармонической линеаризации**

C/A	J'	Δa_{13}	a_{13}
0,1	0,127	0,001	0,05
0,2	0,25	0,025	0,1
0,3	0,376	0,05	0,14
0,4	0,495	0,08	0,16
0,42	0,517	0,085	0,162
0,5	0,555	0,15	0,17
0,8	0,895	0,4	0,08

Однако влияние высших гармоник характеризуется не только совокупностью величин $a_{ii}(A)$ и $\Delta a_{li}(A)$, но и их отношением к основному коэффициенту $J(A)$.

Пусть имеются две замкнутые системы управления с одинаковыми линейными частями $W(s)$ и разными нелинейностями $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Рассмотрим соотношение

$$L = \frac{\Delta a_{li}(A)a_{ii}(A)}{J(A)},$$

тогда, если выполняется неравенство

$$\frac{\Delta a_{li}^{H1}(A)a_{ii}^{H1}(A)}{J^{H1}(A)} > \frac{\Delta a_{li}^{H2}(A)a_{ii}^{H2}(A)}{J^{H2}(A)}, \quad (5.12)$$

влияние высших гармоник во второй нелинейности меньше, чем в первой.

Таким образом, соотношение (5.12) является наиболее полной оценкой влияния высших гармоник на первую. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 5.2. Пусть нелинейность $F_1(x)$ – насыщение с уровнем $B=2$, а нелинейность $F_2(x)$ изображена на рис. 5.5. Она представляет собой сумму двух нелинейностей: идеального реле переключением по уровню $B=1$, $B=-1$ и с зоной линейности ($K'=1/2$) и нелинейности типа зоны нечувствительности ($C=2$, $K''=-1/2$). Будем учитывать влияние третьей гармоники на первую при амплитуде входного сигнала $A=3$. Результаты соответствующих расчетов приведены в табл. 5.2.

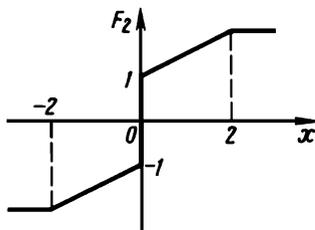


Рис. 5.5. Нечетная однозначная нелинейность сложной формы

Таблица 5.2

Коэффициенты гармонической линеаризации

Тип нелинейности	$J(C/A)$	$\Delta a_{13}(C/A)$	$a_{33}(C/A)$	L
Насыщение с зоной линейности $C=1$	0,395	0,11	0,055	0,0155
Насыщение с зоной линейности $C=2$	0,70	0,22	0,22	0,031
Идеальное реле	0,43	0	0,14	0
Сложная нелинейность	0,825	0,33	0,195	0,026

Из данных табл. 5.2 следует, что у нелинейности с зоной насыщения $C=2$, $L_1=0,031$, а у сложной нелинейности $L_2=0,026$. Так как $L_1 > L_2$, то влияние высших гармоник на первую у нелинейности типа насыщения больше, чем у сложной нелинейности. У нелинейности типа идеального реле полностью отсутствует влия-

ние высших гармоник на первую, так как $L_3 = 0$.

В заключение отметим, что избежать скачкообразного резонанса в системе с насыщением можно путем охвата нелинейности положительной обратной связью. В результате нелинейность превратится в идеальное реле. Необходимо при этом учесть, что наличие реле может вызвать автоколебания.

5.2. Расчет переходных процессов и оценка показателей качества системы методом экспоненциальной линеаризации

Лежащая в основе метода гармонической линеаризации идея замены исходной системы линейной, коэффициенты которой нелинейно зависят от параметров решения, может быть распространена на случай затухающих или расходящихся колебательных процессов в нелинейных системах. Изложим метод приближенного построения переходных процессов согласно [8], который далее будем называть методом экспоненциальной линеаризации.

Линейные затухающие (расходящиеся) колебания в системе 2-го порядка можно представить в виде

$$x = a_0 e^{\xi_0 t} \sin \omega_0 t, \quad (5.13)$$

причем параметры – показатель затухания ξ_0 и частота колебаний ω_0 – остаются постоянными во время переходного процесса. В зависимости от знака ξ_0 выражение (5.13) описывает как затухающие ($\xi_0 < 0$), так и расходящиеся процессы ($\xi_0 > 0$), но для краткости оба вида процессов будем называть затухающими, так как именно затухающие процессы обычно представляют больший интерес при анализе.

Чтобы передать нелинейные свойства исходной системы с использованием линейной модели, в течение переходного процесса ее коэффициенты потребуется изменять, что очевидно, приведет к изменению параметров ξ_0 и ω_0 . Таким образом, методика построения переходного процесса должна учитывать изменения величин указанных параметров.

Как и при обосновании МГЛ, для обоснования подхода используется асимптотический метод Крылова – Боголюбова [9]. Решение нелинейной системы ищется в форме

$$x = a \sin \psi + \varepsilon \varphi_1(a, \psi) + \varepsilon^2 \varphi_2(a, \psi) + \dots + \varepsilon^n \varphi_n(a, \psi), \quad (5.14)$$

причем

$$\frac{da}{dt} = a \xi_0 + \varepsilon \Phi_1(a) + \varepsilon^2 \Phi_2(a) + \dots + \varepsilon^m \Phi_m(a), \quad (5.15)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots + \varepsilon^m B_m(a). \quad (5.16)$$

Выражения (5.14) – (5.16) – формальные ряды; ε – малый параметр; φ_k , Φ_k , B_k , $k = 1, \dots, \infty$, – некоторые функции. Линейной системе соответствует значение $\varepsilon = 0$. В этом случае выражения (5.14) – (5.16) принимают следующий вид:

$$x = a \sin \psi, \quad (5.17)$$

$$\frac{da}{dt} = a \xi_0, \quad (5.18)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_0. \quad (5.19)$$

Задав для (5.18), (5.19) начальные условия

$$a(t_0) = a_0, \quad \psi(0) = 0.$$

из (5.17) – (5.19) получаем решение в виде (5.13). Если положить $\xi_0 = 0$, получим $a = \text{const}$, что соответствует колебаниям с постоянной амплитудой, рассматриваемым в МГЛ. Таким образом, выражения (5.14)-(5.16) позволяют описывать нелинейные переходные процессы, близкие к линейным с точностью до ε .

Для того чтобы (5.17) было близко к искомому решению, исходная нелинейная система в соответствии с методом Крылова – Боголюбова должна быть представима с использованием малого параметра. Например, выражения (5.17)-(5.19) могут приближать решения уравнения [8]

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + c^2 x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \quad (5.20)$$

причем

$$\xi_0 = -b, \quad \omega_0 = \sqrt{c^2 - b^2}. \quad (5.21)$$

При $\varepsilon = 0$ система (5.20) становится линейной, показатель затухания и частота (5.21) определяют её решение в виде (5.13).

Чтобы избежать при исследовании системы привязки к определенным начальным условиям и времени, будем рассматривать зависимость параметров процесса от текущего значения амплитуды.

Запишем выражения для показателя затухания и частоты в первом приближении по ε . Допуская изменение указанных величин, введем обозначения для текущего показателя затухания $\xi = \xi(a)$ и текущей частоты $\omega = \omega(a)$. Мгновенная амплитуда равна $a = a_0 e^{\xi t}$.

Тогда $\frac{da}{dt} = \xi a_0 e^{\xi t} = \xi a$. Из (5.15), (5.16) получим

$$\xi = \xi_0 + \frac{\varepsilon \Phi_1(a)}{a}, \quad (5.22)$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon B_1(a). \quad (5.23)$$

Наличие малого параметра в (5.22), (5.23) в слагаемых, зависящих от амплитуды, означает, что предполагается медленное изменение параметров ξ и ω . Заметим, что медленное изменение параметра ξ не означает медленного изменения амплитуды a , скорость изменения которой определяется самой величиной ξ .

Для выполнения перехода от нелинейной системы к линейной необходимо провести линеаризацию нелинейного элемента с учетом входного сигнала. Как и при описании МГЛ, методику изложим применительно к системам стандартной структуры. В качестве нелинейного элемента будем рассматривать одно- или двузначную статическую нелинейность.

Итак, приближением входного сигнала с точностью до ε является

$$x = a \sin \psi, \quad (5.24)$$

где

$$\frac{da}{dt} = a\xi, \quad (5.25)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega. \quad (5.26)$$

Запишем производную (5.24), полученную с учетом (5.25) – (5.26):

$$px = a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi, \quad (5.27)$$

откуда

$$\cos \psi = \frac{p - \xi}{a\omega} x, \quad (5.28)$$

а из (5.24)

$$\sin \psi = \frac{x}{a}. \quad (5.29)$$

Теперь, имея выражения (5.28), (5.29), можно перейти к линейризации нелинейности. Запишем функцию на выходе двузначной нелинейности с учетом (5.24), (5.27):

$$y(t, \psi) = F(a(t) \sin \psi, a(t)\omega \cos \psi + a(t)\xi \sin \psi), \quad (5.30)$$

формально считая t и ψ независимыми переменными. Зафиксируем переменную t . Тогда для каждого фиксированного t (5.30) можно представить рядом Фурье:

$$y(t, \psi) = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin k\psi + b_k(t) \cos k\psi;$$

$$A_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a(t) \sin \psi, a(t)\omega \cos \psi + a(t)\xi \sin \psi) d\psi;$$

$$a_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a(t) \sin \psi, a(t)\omega \cos \psi + a(t)\xi \sin \psi) \sin k\psi d\psi; \quad (5.31)$$

$$b_k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a(t) \sin \psi, a(t)\omega \cos \psi + a(t)\xi \sin \psi) \cos k\psi d\psi.$$

Представление (5.31) можно рассматривать как разложение в ряд Фурье, соответствующее мгновенной текущей амплитуде $a(t)$, которой соответствуют текущие показатель затухания ξ и частота ω . При изменении t изменяются коэффициенты ряда (5.31). Теперь вспомним, что переменная ψ зависит от t . Геометрически это можно представить так: процессу соответствует кривая $\psi(t)$ в плоскости параметров ψ и t , причем (5.31) соответствует секущая $t = \text{const}$, которую кривая $\psi(t)$ пересекает лишь в одной точке. Это означает, что с течением времени непрерывно меняется разложение (5.30) в ряд Фурье. Но каждое такое разложение закононо! Оно по-

зволяет определить, каким был бы незатухающий процесс с параметрами, соответствующими текущему времени.

Теперь, как и в случае гармонической линеаризации, ограничимся только первой гармоникой ряда (5.31). Выразим (5.31) через входной сигнал (5.24), для чего используем (5.28), (5.29):

$$F(x, px) = q(a, \xi, \omega)x + q'(a, \xi, \omega) \frac{p - \xi}{\omega} x = \left(q(a, \xi, \omega) - \frac{\xi}{\omega} q'(a, \xi, \omega) \right) x + \frac{q'(a, \xi, \omega)}{x} px, \quad (5.32)$$

где

$$q(a, \xi, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (5.33)$$

$$q'(a, \xi, \omega) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi, a\omega \cos \psi + a\xi \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (5.34)$$

Если нелинейность однозначная, (5.33), (5.34) полностью совпадают с соответствующими коэффициентами гармонической линеаризации. Новая усложненная формула гармонической линеаризации (5.32) отличается присутствием члена $-\frac{\xi}{\omega} q'x$, которого не было для незатухающих процессов. Отношение $\frac{\xi}{\omega}$ согласно линейной теории колебаний характеризует скорость затухания ($\xi < 0$) или расхождения ($\xi > 0$) амплитуды колебаний за один период (такая оценка весьма условна, так как величины ξ и ω изменяются с течением времени, хотя и медленно). Как следует из приведенных рассуждений, (5.33), (5.34) требуется непрерывно пересчитывать. На практике это означает необходимость пересчета при изменении амплитуды на величину, которую нельзя считать пренебрежимо малой. Из (5.25) получим

$$a = a_0 \exp\left(\int_0^t \xi dt\right). \quad (5.35)$$

Таким образом, огибающая переходного процесса состоит из фрагментов экспонент с меняющимся показателем ξ , поэтому данная

линеаризация получила название экспоненциальной. Как вычислить новое значение ξ , будет показано далее.

Теперь перейдем к отысканию решения замкнутой системы. Системы рассматриваемого класса описываются дифференциальным уравнением (2.21):

$$Q(p)x + R(p)F(x, px) = 0.$$

Подставим вместо $F(x, px)$ результат его экспоненциальной линеаризации (5.32):

$$Q(p)x + R(p)\left(q(a, \xi, \omega) + \frac{p-\xi}{\omega}q'(a, \xi, \omega)\right)x = 0. \quad (5.36)$$

Колебательному процессу линейной системы, описываемому (5.13), соответствует пара комплексных корней характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \xi \pm i\omega$, причем $\xi = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$, что соответствует сделанному ранее допущению о медленном изменении параметров ξ и ω . Запишем характеристическое уравнение для (5.36):

$$Q(\lambda) + R(\lambda)\left(q(a, \xi, \omega) + \frac{\lambda - \xi}{\omega}q'(a, \xi, \omega)\right) = 0. \quad (5.37)$$

Подставив $\lambda = \xi + i\omega$ (знак “+” используется для определенности), получим:

$$Q(\xi + i\omega) + R(\xi + i\omega)(q(a, \xi, \omega) + iq'(a, \xi, \omega)) = 0. \quad (5.38)$$

Заметим, что при $\xi = 0$ (5.33), (5.34), (5.37), (5.38) совпадают со своими аналогами в МГЛ. Если нелинейность нечетная однозначная, уравнение (5.38) упрощается:

$$Q(\xi + i\omega) + R(\xi + i\omega)q(a) = 0. \quad (5.39)$$

Комплексное уравнение (5.38) (или (5.39)) позволяет сформировать только два уравнения с действительными коэффициентами, в то время как неизвестных три: ξ , ω , a . Обычно в качестве свободного параметра принимается амплитуда a , в зависимости от которой вычисляются сначала коэффициенты экспоненциальной линеаризации q и q' (5.33), (5.34). Подставляя их в (5.38) и решая его относительно показателя затухания и частоты, получаем их значения при заданной амплитуде или законы их изменения при изменении амплитуды

$$\xi = \xi(a), \quad \omega = \omega(a).$$

Задавая начальные условия $a(0) = a_0$, $\psi(0) = \psi_0$, из (5.25), (5.26) получим $a = a(t)$ и $\psi = \psi(t)$:

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{a\xi(a)} = t, \quad (5.40)$$

$$\psi = \int_0^t \omega(a)d\tau + \psi_0. \quad (5.41)$$

Сначала из (5.40) определяем $a(t)$, затем подставляем найденную зависимость $a(t)$ в (5.41) и получаем

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(a(\tau))d\tau + \psi_0. \quad (5.42)$$

Подставляя (5.40), (5.42) в (5.24), находим описание переходного процесса

$$x = a(t) \sin \psi(t).$$

Пример 5.3. Найдем приближенное описание переходного процесса в системе, представленной на рис. 5.6. Передаточная функция линейной части системы

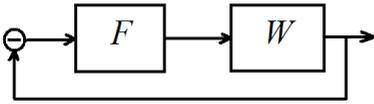


Рис. 5.6. Структурная схема САУ

$$W(s) = \frac{5}{s(0,1s+1)(s+1)}.$$

Нелинейность F – «ограничение» с параметрами $k = 4$, $x_1 = 1$ (см. рис.1.3). Коэффициент экспоненциальной линеаризации вычисляется для однозначной нелинейности и не зависит от ξ , совпадая с коэффициентом гармонической линеаризации этой нелинейности

$$q(A) = \frac{2k}{\pi} \left(\arcsin \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right). \quad (5.43)$$

Дифференциальное уравнение (5.36) принимает вид

$$p(p+1)(0,1p+1) + 5q(A) = 0,$$

а его характеристическое уравнение (5.37):

$$\lambda(\lambda+1)(0,1\lambda+1) + 5q(A) = 0. \quad (5.44)$$

Подставляя $\lambda = \xi + i\omega$ в (5.44) и приравнявая к нулю действительную и мнимую части, получаем два уравнения:

$$\begin{cases} 0,1(\xi^3 - 3\xi\omega^2) + 1,1(\xi^2 - \omega^2) + \xi + 5q(A) = 0; \\ 3\xi^2 + 22\xi + 10 = \omega^2. \end{cases} \quad (5.45)$$

Исключая ω , получаем:

$$0,8\xi^3 + 8,8\xi^2 + 26,2\xi + 11 - 5q(A) = 0. \quad (5.46)$$

Из (5.46) находим показатель затухания ξ , а из второго уравнения системы (5.45) – частоту колебаний ω . В табл. 5.3 приведены вычисленные таким образом значения ξ и ω для различных значений амплитуды A .

Таблица 5.3

Зависимость параметров решения от амплитуды

A	ξ	ω		A	ξ	ω
1,00	0,31	4,1		3,00	-0,10	2,8
1,25	0,24	3,9		4,00	-0,19	2,4
1,50	0,17	3,7		5,00	-0,24	2,2
1,75	0,10	3,5		6,00	-0,28	2,0
2,00	0,044	3,3		7,00	-0,31	1,8
2,25	-0,0026	3,2		8,00	-0,33	1,7
2,50	-0,040	3,0		9,00	-0,35	1,6
2,75	-0,76	2,9		10,0	-0,36	1,56

Легко видеть, что с изменением амплитуды изменяются оба параметра ξ и ω . При амплитуде $A = 2,24$, соответствующей автоколебаниям, $\xi = 0$.

Последовательность приближенного построения переходного процесса следующая. Пусть известно (задано как начальное условие или получено в ходе вычислений) некоторое значение амплитуды a_k . Вычисляем соответствующий ей коэффициент экспоненциальной линеаризации, подставив в (5.43) $A = a_k$. Из уравнения (5.46) находим показатель затухания $\xi(a_k)$, выбрав из трех корней (5.46) действительный. Подставив $\xi(a_k)$ во второе уравнение (5.45), получаем $\omega(a_k)$. Строим фрагмент процесса. Переходный

процесс будет объединением фрагментов процессов вида (5.13). Для $t_k \leq t < t_{k+1}$ фрагмент описывается выражением:

$$x(t) = a_k \exp(\xi_k(t - t_k)) \sin(\omega_k(t - t_k) + \psi_k), \quad (5.47)$$

$\Psi_{k+1} = \omega_k(t_{k+1} - t_k) + \psi_k$, $\Psi_0 = 0$. Новое значение «мгновенной» амплитуды $A = a_{k+1}$ найдем по формуле

$$a_{k+1} = a_k \exp(\xi_k(t_{k+1} - t_k)), \quad (5.48)$$

полученной из (5.35). Затем вычисления повторяются. Шаг по времени $h_k = t_{k+1} - t_k$ может быть как постоянным, так и переменным. Методика позволяет также проводить вычисления, задавая шаг по амплитуде. Из (5.48) по известному последующему значению амплитуды a_{k+1} определим новый момент времени t_{k+1} , для которого необходимо вычислить очередные значения параметров переходного процесса ξ и ω (это выражение можно получить и непосредственно из (5.40)):

$$t_{k+1} = \frac{1}{\xi_k} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} + t_k. \quad (5.49)$$

Затем вычисления по (5.43), (5.45), (5.46), (5.49) повторяются.

На рис. 5.7 представлены переходные процессы, построенные с использованием описанной методики. Для сравнения приведены процессы, полученные численным интегрированием нелинейной системы методом Рунге – Кутты 4-го порядка. При вычислениях с шагом по амплитуде средний шаг по времени за первые 6,5 с составил 1,28 с, изменяясь 5 раз в пределах от 0,71 до 2,69 с для процесса, представленного на рис. 5.8, а. Для процесса на рис. 5.8, б шаг по времени изменялся 11 раз от 0,19 до 1,9 с (средняя величина 0,57 с). После установления автоколебаний, начиная с 6,5 с, пересчета параметров не требуется.

Как видно из представленных графиков, существенное уменьшение шага по времени не позволяет заметно увеличить точность построения переходного процесса. Это можно объяснить следующими причинами. Во-первых, в разложении нелинейности в ряд Фурье учитывается только первая гармоника. Во-вторых, линейная система третьего порядка аппроксимируется системой второго порядка: для построения переходного процесса используется только пара доминирующих собственных значений.

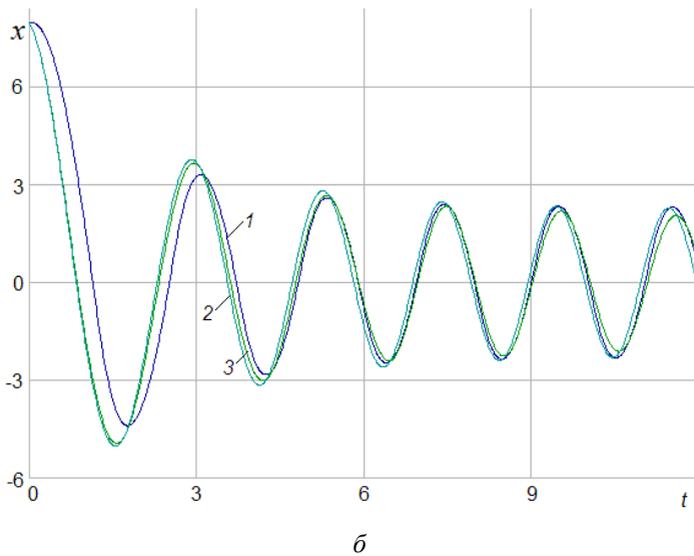
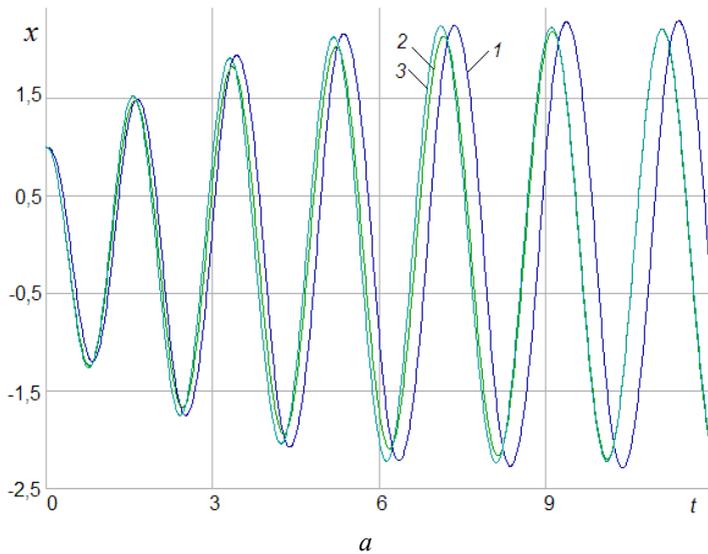


Рис 5.7. Переходные процессы в нелинейной системе,
 где 1 – численное моделирование с шагом по времени 0,01 с;
 2, 3 – процессы, построенные методом экспоненциальной линеаризации
 с шагом по времени 0,1 с и с шагом по амплитуде 0,25 соответственно.
 . *a* – установление автоколебаний с возрастанием амплитуды;
б – установление автоколебаний с убыванием амплитуды

С другой стороны, качество нелинейной системы оценивается достаточно точно при шаге по времени, на порядок превышающем необходимый шаг численного моделирования. Применение методики дает приближенное аналитическое решение и позволяет проводить анализ качества семейства решений вне связи с начальными условиями.

Описанная методика позволяет без моделирования оценить показатели качества нелинейной системы, причем наличие аналитической связи показателей качества с параметрами линейной или нелинейной частей позволяет получить оценки качества как функции параметров системы. Даже если получение явной аналитической зависимости затруднительно, это позволяет избежать серийного моделирования и последующей обработки его результатов для оценки качества системы как функции ее параметров.

Следует отметить, что построение приближенного решения системы в зависимости от времени зачастую не требуется, а показатели качества переходного процесса, а именно показатель затухания и частота колебаний, определяются из (5.38) в форме выражений для ξ и ω . Это позволяет без построения переходного процесса судить о качестве системы, прежде всего о времени протекания переходного процесса. Учитывая общность методов экспоненциальной и гармонической линеаризации, его следует применять, прежде всего, для оценки времени установления автоколебаний. Для наглядного представления показателей качества нелинейной системы, полученных методом экспоненциальной линеаризации, обычно используют диаграммы качества переходных процессов, являющихся обобщением областей устойчивости, рассмотренных как графическое представление параметров периодических режимов. Диаграмма качества представляет собой семейство линий уровня отдельно для ξ и ω в координатах a и какого-либо параметра системы, что позволяет делать предположения о динамике системы при выборе этого параметра на этапе проектирования или изменении динамики системы при изменении этого параметра.

Примерный вид диаграммы качества представлен на рис. 5.8. Рис. 5.8, a построен для показателей затухания. Кривая $\xi = 0$, как указывалось ранее, представляет собой решение уравнений гармонического баланса и соответствует колебаниям с постоянной ам-

плитудой. Остальные кривые характеризуют связь параметров системы при некотором $\xi = \text{const}$. Для системы с постоянным параметром K переходный процесс на диаграмме будет отмечен вертикальной прямой, последовательно пересекающей линии с постоянным значением ξ . Как и на областях устойчивости, направление движения обозначено стрелками, но в данном случае они избыточны, так как характер изменения амплитуды можно определить по знаку параметра ξ .

На рис. 5.8, б представлена вторая часть диаграммы качества, состоящая из линий $\omega = \text{const}$. На обоих рисунках для $a < d$ линии постоянства показателей качества имеют вид вертикальных прямых, что означает независимость параметра от амплитуды при фиксированном K . Эта область соответствует зоне линейности $|x| < d$ нелинейного элемента. Действительно, в линейной системе ξ_0 и ω_0 (см. (5.13)) не зависят от амплитуды и определяются только корнями характеристического уравнения.

Часто требуется исследовать показатели качества переходного процесса, в установившемся режиме представляющего собой несимметричные колебания. В этом случае входной сигнал описывается в форме

$$x = x_0 + a \sin \psi,$$

отличающейся от (5.24) постоянной составляющей x_0 , а выходной представляется в виде

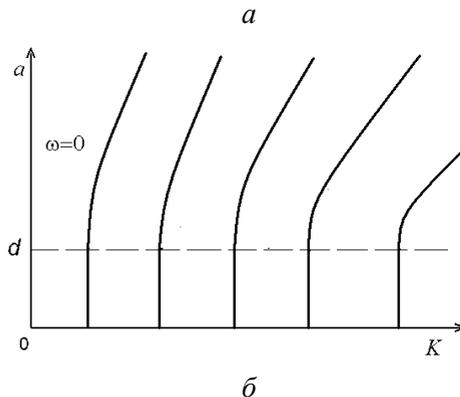
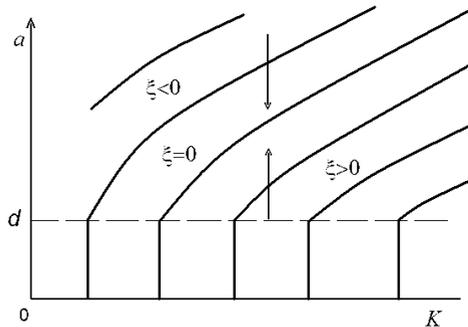


Рис. 5.8. Примерный вид диаграммы качества

$$F(x, px) = F_0(x_0, a, \xi, \omega) + q(x_0, a, \xi, \omega)x + q'(x_0, a, \xi, \omega) \frac{p - \xi}{\omega} x.$$

Выражения для коэффициентов экспоненциальной линеаризации (5.33), (5.34) следует модифицировать, добавив к входному сигналу x_0 , а из дифференциального уравнения выделить уравнение для постоянной составляющей, как это делалось в МГЛ.

5.3. Модифицированный метод экспоненциальной линеаризации

Существенным ограничением методики, изложенной в разд. 5.2, является требование разделимости системы на одну линейную и одну нелинейную части, в связи с чем применение ее для анализа систем с двумя или более нелинейностями, разделенными линейными частями весьма проблематично. Другой недостаток метода экспоненциальной линеаризации – использование для аппроксимации переходных процессов кривых вида (5.13), которые соответствуют линейной системе второго порядка, что не позволяет описать сложные переходные процессы, возникающие в нелинейных системах высокого порядка.

В гл. 4 описана модификация МГЛ, существенно расширяющая класс систем, для которых могут быть определены периодические процессы. Дополним модифицированный МГЛ (ММГЛ) средствами описания переходных процессов так, чтобы в частном случае при расчете процессов с постоянной амплитудой был бы получен ММГЛ. Для дальнейшего понимания читателю необходимо ознакомиться с гл. 4. Излагаемый подход назовем модифицированным методом экспоненциальной линеаризации (ММЭЛ).

В основу ММГЛ положено разложение периодических функций в ряд Фурье с последующим представлением их частичными суммами ряда при расчетах. Одновременный учет нескольких гармоник позволяет описывать сигналы сложной формы во всех точках сопряжения линейных и нелинейных подсистем. Фактически линеаризация системы и запись уравнений гармонического баланса приводит к тем же уравнениям, что и приравнивание параметров сигналов на входе и выходе элементов элементарных линейных и нелинейных звеньев. Таким образом, для изложения ММЭЛ требу-

ется определить класс функций, описывающих сигналы между подсистемами и преобразование этих сигналов нелинейными и линейными звеньями. Уравнения же составляются как равенства параметров функций, описывающих сигналы в одной или нескольких точках полной системы. Учитывая нелинейный характер получаемых таким образом уравнений и большое число искомых параметров, получение решения в аналитической форме для большинства сложных систем (на применение для которых и ориентирован метод) затруднительно, если вообще возможно. Поэтому изложим ММЭЛ применительно к численному решению полученных уравнений.

Очевидно, что при анализе потребуется учитывать возможность существования разных показателей затухания для каждой локальной пары «нелинейность – линейная подсистема». В этом случае существенно, что на показатели затухания будет влиять и нелинейность, поэтому сигнал на выходе нелинейности представим выражением, учитывающим изменение амплитуды со временем (затухание).

Предположим, что основная частота колебаний ω известна, колебания на выходе нелинейности близки к установившимся. Представим выход нелинейности частичной суммой ряда Фурье (2.5), (2.9)

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \sin(k\omega t + \varphi_k). \quad (5.50)$$

Так как колебания все же не являются установившимися, для момента времени $t + \Delta t$ повторяя разложение в ряд, получим (5.50), но с другими параметрами. Предположим, что выход нелинейности в некотором смысле эквивалентен выходу линейной системы порядка n , не умеющей кратных корней. Тогда представив закон изменения амплитуд в виде $A_k = a_k e^{\xi_k t}$, получим представление выхода нелинейности с учетом затухания в новой форме

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \exp(\xi_k t) \sin(k\omega t + \varphi_k). \quad (5.51)$$

Замена нелинейности этой линейной системой и есть модифицированная экспоненциальная линеаризация, причем как будет показано далее, искать вид и параметры линеаризующей системы не требу-

ется – достаточно найти параметры выходного сигнала (5.51). Число слагаемых (экспоненциальных гармоник) n в (5.51) определяется требуемой точностью описания сигнала.

Выражение (5.51) не следует рассматривать как частичную сумму ряда, построенного, вообще говоря, не по системе ортогональных функций, а в качестве эмпирической формы, связывающей ряды Фурье, полученные для разных моментов времени. Здесь есть определенное внутреннее противоречие: значение выходного сигнала, представленное рядом, справедливо на отрезке времени, меньшем, чем отрезок разложения, определяемый частотой ω . Решение этой проблемы и обоснование допустимости такого подхода подробно рассмотрено в разд. 5.2 применительно к ряду Фурье и, следовательно, к его частичным суммам.

Показатель затухания, определяемый собственно нелинейностью, для каждой экспоненциальной гармоники определим по формуле:

$$\xi_k = \frac{\ln A_k(t_{m+1}) - \ln A_k(t_m)}{\Delta t}, \quad (5.52)$$

где $\Delta t = t_{m+1} - t_m$ – достаточно малый промежуток времени, определяемый временем «достоверности» найденного решения, за который параметры ξ_k и ϕ_k существенно не изменяются. В изложенном методе экспоненциальной линеаризации Δt соответствует шагу по времени. Величины $A_k(t_m)$, $A_k(t_{m+1})$ – коэффициенты ряда Фурье, полученные для соответствующих моментов времени. Выражение (5.52) получено из представления амплитуд

$$A_k(t_{m+1}) = A_k(t_m) e^{\xi_k \Delta t}.$$

Необходимо пояснить, каким образом можно вычислить коэффициенты ряда Фурье, соответствующие одному конкретному моменту времени. Но прежде определим класс функций и метод определения их параметров, которые будут входными для нелинейности.

С учетом того, что линейные и нелинейные подсистемы группируются, на вход нелинейности поступает выход некоторой линейной части. В свою очередь, на вход линейной части поступает выход нелинейности (возможен и более сложный случай – сумма выходов линейной и нелинейной подсистем).

Таким образом, форму представления выхода линейной части сформируем на основе (5.51). Прохождение сигнала вида (5.51) через линейное звено приводит при точном вычислении к дополнительным слагаемым, определяемым полюсами линейного звена. Выход линейного звена запишем в следующей форме, учитывающей возможное наличие в линейной подсистеме корней с ненулевой мнимой частью и кратных корней:

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n \tilde{A}_k \exp(\tilde{\xi}_k t) \sin(k\tilde{\omega}t + \tilde{\varphi}_k) + \sum_{k=0}^l \sum_{i=0}^{m(k)} B_i^k t^i \exp(\tilde{\xi}_k t) \sin(\tilde{\omega}_k t + \psi_k). \quad (5.53)$$

Форма (5.53) пригодна и для описания реакции на сигналы вида (5.53) и их суммы с (5.51). Коэффициенты (5.53) могут быть найдены, например, с использованием операционного исчисления.

Вернемся к определению коэффициентов (5.51) и применению (5.52). Можно предложить два способа решения этой задачи. В соответствие с первым, который можно назвать методом замороженных коэффициентов, сумму (5.53) следует привести к виду

$$x(t, t_m) = A_0 + \sum_{k=1}^M \bar{A}_k(t_m) \sin(k\omega t + \tilde{\varphi}_k), \quad (5.54)$$

где $\bar{A}_k(t_m) = \text{const}$ – коэффициент, полученный для времени t_m подстановкой его в функции перед синусами в (5.53). Формируя (5.54) для моментов времени $t = t_m$ и $t = t_{m+1}$ и раскладывая в ряд Фурье $F(x(t, t_m))$, $F(x(t, t_{m+1}))$, получаем представление (5.51) с использованием (5.52). Согласно второму способу вход нелинейности представляется выражением (5.53) без предварительной модификации, а разложение выхода нелинейности $F(x(t))$ в ряд Фурье производится по (2.5), (2.6) дважды на отрезках $[t_m - T/2, t_m + T/2]$ и $[t_m + \Delta t - T/2, t_m + \Delta t + T/2]$, где $T = 2\pi/\omega$. Если $t_m < T$, то разложение следует выполнять на отрезках $[0, T]$ и $[\Delta t, T + \Delta t]$.

Наличие обратных или перекрестных связей в системе позволяет записать уравнения баланса приравниванием соответствующих параметров и коэффициентов в (5.51) или (5.53) аналогично тому, как это делается в ММГЛ. Количество учитываемых гармоник и

форма представления должны совпадать только для приравниваемых сигналов. Остальные же сигналы в локальных парах «нелинейность – линейный элемент» могут иметь другое число гармоник, зависящее от свойств локальной пары. Их количество может определяться фильтрующими свойствами линейной части, быстротой затухания отдельных гармоник и т.п. Например, как было показано в гл. 2, при наличии фильтрующей линейной подсистемы на входе нелинейности следующей локальной пары сигнал можно представить одной гармоникой. При этом может потребоваться учесть большее число гармоник на выходе этой нелинейности, а их количество можно определять в процессе расчетов, сравнивая относительную амплитуду k -й гармоники с заранее заданным пороговым значением. Применимость сказанного для экспоненциальных гармоник очевидна, если принять во внимание алгоритм их формирования. Количество гармоник на выходе линейной системы хотя и определяется совокупностью входных и собственных гармоник, но может быть уменьшено, как и для нелинейности, с сравнением с пороговым значением.

Укажем теперь, какие параметры будут искомыми. Прежде всего, в системе следует выбрать точку, в которой сигнал может быть описан наименьшим числом экспоненциальных гармоник в форме (5.51). Искомыми будут частота колебаний ω , показатели затухания ξ_k , фазы φ_k . Как и в методе экспоненциальной линеаризации, эти параметры можно считать зависящими от свободного параметра – текущей амплитуды первой гармоники рассматриваемого сигнала. Начальные амплитуды старших гармоник следует положить нулевыми. В этом случае число искомых параметров такое же, как и в ММГЛ. Если рассматривается процесс вблизи установившегося режима, найденного ранее с помощью ММГЛ, старшие гармоники следует взять из полученного решения. В противном случае число искомых параметров придется увеличить на количество учитываемых старших гармоник, добавив начальные значения их амплитуд.

Пример 5.4. Пусть передаточная функция линейной части

$$W(s) = \frac{K}{s - \lambda}. \text{ Предположим, на ее вход подается сигнал}$$

$$y(t) = a_0 \exp(\xi t) \sin(\omega t + \varphi),$$

являющийся выходом нелинейности после ее экспоненциальной линеаризации. На выходе линейного элемента с использованием операционного исчисления получим, считая $\xi = \text{const}$, $\omega = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$:

$$x(t) = \frac{a_0 K (\exp(\lambda t) \sin(\varphi + \psi) - \exp(\xi t) \sin(\omega t + \varphi + \psi))}{\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + \omega^2}}, \quad (5.55)$$

где $\psi = \arctg \frac{\omega}{\lambda - \xi}$. Подставляя в (5.55) t_m и t_{m+1} (m – номер шага по времени) всюду вместо t , за исключением функции \sin , получаем для двух моментов времени вход последующей нелинейности в форме (5.54). Так,

$$x(t, t_m) = \bar{a}_0(t_m) + \bar{a}(t_m) \sin(\omega t + \bar{\varphi}(t_m)),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{a}(t_m) &= \frac{-\exp(\xi t_m)}{\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + \omega^2}}, \\ \bar{a}_0(t_m) &= \frac{a_0 K (\exp(\lambda t_m) \sin(\varphi + \psi))}{\sqrt{(\xi - \lambda)^2 + \omega^2}}, \\ \bar{\varphi}(t_m) &= \varphi + \arctg \frac{\omega}{\lambda - \xi}. \end{aligned}$$

Применяя (2.5), (2.6), дважды, используя (5.52), получаем входной сигнал для последующей линейной части в виде (5.51). Дополнительные слагаемые, определенные полюсами предшествующих линейных частей, не присутствуют в полученном выражении вида (5.51) выхода нелинейности. Для двузначной нелинейности $F(x, \dot{x})$ второй аргумент $\dot{x}(t, t_m)$ вычисляется подстановкой $t = t_m$ в производную выражения (5.55). Продолжая таким образом, приходим к узлу системы, с которого вычисления были начаты. Приравнивая параметры в описании сигнала в данном узле до и после экспоненциальной линеаризации, получаем систему уравнений. Разность параметров «исходного» и «прошедшего звенья» сигналов позволяет построить функцию невязки для решения задачи методами нелинейного математического программирования.

Изложенная методика обобщает метод гармонической линеаризации (включая модификацию для сложных систем с нефилтующими линейными частями) на случай быстрозатухающих переходных процессов. Этот подход позволяет получить связь показателей качества системы с ее параметрами и приближенно построить семейство типовых переходных процессов, задавая лишь начальную амплитуду, что существенно упрощает этап анализа системы, сокращая необходимые объемы моделирования. Так как построение переходных процессов возможно вести с шагом по амплитуде, а не по времени, методика позволяет также сделать обоснованные предположения о необходимом шаге моделирования по времени и проводить его с переменным шагом, что может существенно сократить требуемый объем вычислений.

5.4. Расчет параметров автоколебаний при неравномерной сходимости ряда Фурье

Изложенный в гл. 2 метод гармонической линеаризации и модифицированный метод гармонической линеаризации, представленный в гл. 4, позволяют решать задачи поиска и исследования автоколебаний для весьма широкого класса систем. Тем не менее, принятые допущения не позволяют применять МГЛ и его модификацию для ряда систем. Дополнительный учет специфических свойств таких систем позволяет еще более расширить область применения МГЛ.

Напомним, что в основу МГЛ, являющегося вариантом асимптотического метода Крылова – Боголюбова [9] и приводящего к эквивалентным результатам метода Пуанкаре [27], положено предположение о существовании решения в первом приближении, для чего накладывается условие фильтра. Для того чтобы решение существовало, линейная подсистема должна иметь как минимум третий порядок при однозначной нечетной нелинейности и второй, если нелинейность двузначная (см. метод шаблонов). Учет старших гармоник позволяет только уточнить решение, полученное в первом приближении. Кроме того, первое приближение ищется в форме линейных колебаний, для существования которых порядок системы не может быть меньше второго.

Казалось бы, если уравнения гармонического баланса, построенные с учетом одной гармоники, не имеют решения, одновременный учет суммы гармоник, как в модифицированном МГЛ, решает задачу. Однако в ряде систем и такой подход не дает желаемого результата.

Применение частичной суммы ряда Фурье для описания разрывных функций приводит к явлению Гиббса [28]. Напомним, что суть явления состоит в существовании пульсаций вблизи точки разрыва первого рода исходной функции, вызванных неравномерной сходимостью ряда Фурье. Для иллюстрации на рис. 5.9 приведены графики функции $f(t) = \text{sgn } t$ и частичные суммы ряда Фурье $S_n(t)$ (три, пять и семь гармоник) этой функции при разложении на отрезке $[-1, 1]$. Следует обратить внимание, во-первых, на то, что величина отклонения в точке максимума частичной суммы от соответствующего предела раскладываемой функции в точке разрыва не зависит от числа гармоник и равна $\left(\frac{\text{si}(\pi)}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\Delta f \approx 0,09\Delta f$, где

Δf – величина разрыва функции, $\text{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$ – интегральный

синус. Во-вторых, точки экстремумов частичных сумм хотя и стремятся к точкам разрыва с увеличением n – числа гармоник, но не совпадают с ней.

Для некоторых систем указанные отклонения могут оказаться критичными. На-

пример, неустранимая путем увеличения числа гармоник ошибка в определении перехода между ветвями двузначной нелинейности или существенно различными сегментами функции могут привести к существенным ошибкам

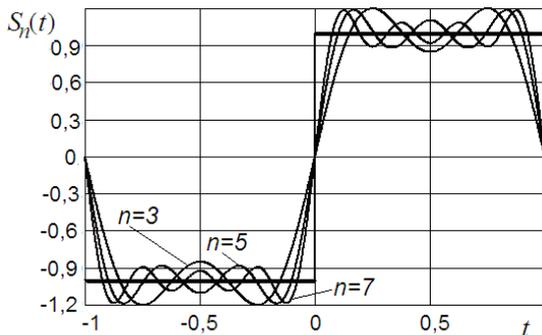


Рис. 5.9. Явление Гиббса

при линеаризации и, как следствие, либо к ошибочному решению, либо неустойчивости процедуры его получения в численной реализации.

Изложим методику определения периодических режимов в системах, имеющих указанную выше специфику [29].

Рассмотрим стационарную систему стандартной структуры (см. рис. 2.1) с двузначной нелинейностью $F(x, \dot{x})$, имеющей конечное число разрывов первого рода. Пусть ее линейная часть асимптотически устойчива, $|W(i\omega)|$ не имеет существенных локальных максимумов и является слабым фильтром низких частот, т.е. условие $|W(ik\omega)| \ll |W(i\omega)|$ выполняется при $k > 3$, где $W(s)$ – передаточная функция линейной части.

Для простоты изложения рассмотрим случай симметричных колебаний, для чего дополнительно примем, что нелинейность нечетно-симметрична. Обобщение на случай несимметричных колебаний проводится так же, как и в МГЛ.

Сигнал x представим рядом Фурье

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* \sin(k\omega^* t + \varphi_k^*). \quad (5.56)$$

Решение задачи будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad (5.57)$$

где A_k , φ_k , ω – искомые параметры автоколебаний, которые могут отличаться от истинных A_k^* , φ_k^* , ω^* . Процедуру решения построим, исходя из выполнения условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n(t) - S_n(t)\| = 0, \quad (5.58)$$

где $S_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k^* \sin(k\omega^* t + \varphi_k^*)$ – частичная сумма ряда (5.56). Ис-

пользование аналитических оценок [23, 24], как и приведенной в гл. 4, для определения числа гармоник, достаточного для определения искомых параметров с заданной относительной погрешностью ε , вряд ли целесообразно при практических расчетах, так как они

дают, как правило, слишком завышенные n . Поэтому будем пользоваться необходимым условием для ограничения числа гармоник

$$\|x_{n-1} - x_n\| / \|x_n\| \leq \varepsilon.$$

Считаем, что система уравнений гармонического баланса, полученных для представления x в форме (5.57)

$$\bar{\Theta}(\omega, A_1, \dots, A_n, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad (5.59)$$

не имеет решения при $n = 1$ и требуется обязательный учет старших гармоник при приближении сигнала x на входе нелинейности.

Функция $F(x, \dot{x})$ может быть задана в виде

$$F(x, \dot{x}) = \begin{cases} f_1(x), & \dot{x}(t) \geq 0; \\ f_2(x), & \dot{x}(t) < 0, \end{cases} \quad (5.60)$$

где $f_1(x), f_2(x)$ – кусочно-непрерывные на отрезке функции с абсолютно интегрируемой второй производной на интервалах непрерывности, причем $f_1(-x) = -f_2(x)$. Значение функции при $\dot{x} = 0$ приписано без потери общности к первой ветви, так как точки покоя системы при решении не рассматриваются, а точки экстремумов сигнала x образуют множество меры нуль и не влияют на результаты линеаризации.

Как уже было сказано, функция $F(x, \dot{x})$ имеет разрывы первого рода, обозначим их количество r , $r > 0$. Тогда при представлении $F(x, \dot{x})$ в форме (5.57) будет иметь место явление Гиббса. Тогда решение уравнений (5.59) будет осложнено неравномерной сходимостью $x_n(t)$ или $\dot{x}_n(t)$, если $x_n(t)$ является кусочно-дифференцируемой.

Пусть в интервале частот возможных колебаний $|W(i\omega)|$ монотонно убывает и удовлетворяет неравенству

$$|W(i\omega)| \geq (1 + T^2 \omega^2)^{-1/2}.$$

Мажорантой последовательности амплитуд гармоник ряда Фурье функции $F(x, \dot{x})$ является последовательность M/k , где M – положительная константа. Ряд из этих амплитуд может расходиться, поэтому при малых T частичные суммы ряда из A_k тоже могут вести себя как суммы расходящегося ряда даже при больших n .

Соответственно, ряд Фурье для $\dot{x}(t)$ будет сходиться медленнее ряда для $x(t)$ (или даже неравномерно) и решение уравнения

$$\dot{x}_n(t) = 0, \quad (5.61)$$

необходимое для определения моментов перехода с одной ветви нелинейности (5.60) на другую, не будет уточняться при увеличении n вследствие явления Гиббса.

В силу указанных причин предельный переход (5.58) может быть неравномерным, что не учитывается в уравнениях (5.59). Данная проблема может быть решена сведением задачи решения системы (5.59) к задаче нелинейного программирования с целевой функцией специального вида.

Запишем уравнения гармонического баланса рассматриваемой системы:

$$A_k = |W(ik\omega)| \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad (5.62)$$

$$\varphi_k = \arctg(b_k / a_k) + \arg W(ik\omega) + \pi, \quad (5.63)$$

$$k = 1, \dots, n; \quad \varphi_1 = 0,$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_n(\psi), \dot{x}_n(\psi)) \sin k\psi d\psi, \quad (5.64)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x_n(\psi), \dot{x}_n(\psi)) \cos k\psi d\psi \quad (5.65)$$

$$x_n(\psi) = \sum_{k=1}^n A_k \sin(k\psi + \varphi_k), \quad (5.66)$$

$$\dot{x}_n(\psi) = \omega \sum_{k=1}^n k A_k \cos(k\psi + \varphi_k), \quad (5.67)$$

$W(s)$ – передаточная функция линейной части системы, $\psi = \omega t$. К их решению подойдем следующим образом. Зафиксируем параметры в (5.66), (5.67) и вычислим на их основе коэффициенты (5.64), (5.65). Затем подставим их в (5.62), (5.63) и используя их (при этом необязательно $\varphi_1 = 0$), построим оценку (5.66), которую обозначим $\hat{x}_n(\psi)$.

Заменим переменную в (5.61) на $\psi = \omega t$. Обозначим через ψ_i , $i = 1, \dots, m_1$, решения уравнения

$$\dot{x}_n(\psi) = 0, \quad (5.68)$$

а через $\hat{\psi}_i$ – решения уравнения

$$\dot{\hat{x}}_n(\psi) = 0, \quad (5.69)$$

на периоде $[0, 2\pi]$. Выберем из них $m \leq m_1$ точек, соответствующих экстремумам функций. Тогда первая составляющая целевой функции J будет иметь вид

$$G_1 = \sum_{j=1}^m |\hat{\psi}_j - \psi_j|. \quad (5.70)$$

Эта составляющая позволяет минимизировать влияние явления Гиббса в ряде Фурье функции $\dot{x}_n(\psi)$ на определение точек «переключения» (смены ветви) нелинейности.

Пусть z_i , $i = 1, \dots, r$, – точки разрыва функции $F(x, \dot{x})$. Обозначим $\tilde{\psi}_{ji}$, $j = 1, \dots, \tilde{m}_i$, решения уравнений

$$y(\psi) = z_i. \quad (5.71)$$

Тогда вторая составляющая целевой функции J примет вид

$$G_2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\tilde{m}_i} |\hat{x}(\psi_{ji}) - z_i|.$$

Роль данной составляющей – минимизация влияния явления Гиббса в ряде Фурье $x_n(\psi)$ на переход аргумента нелинейности через точку, в которой нелинейность претерпевает разрыв.

Использование $\psi = \omega t$ как аргумента функции x при расчетах позволяет уменьшить влияние ошибки определения частоты ω на определение моментов времени, начиная с которых явление Гиббса становится существенным, и проводить корректное сравнение значений целевой функции при различных частотах.

Окончательно задача приближенного определения параметров автоколебаний может быть представлена как задача нелинейного программирования с целевой функцией

$$G = C_1 G_1 + C_2 G_2 \rightarrow \min, \quad (5.72)$$

где C_1, C_2 – задаваемые положительные константы.

Пример 5.5. Рассмотрим систему, структурная схема которой приведена на рис.5.9. Дифференциальное уравнение относительно входа нелинейности имеет вид

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x - \frac{1}{T}F(x, \dot{x}).$$

Линейная часть представляет собой аperiодическое звено. Нелинейность описывается выражением

$$F(x, \dot{x}) = \begin{cases} d \operatorname{sgn}(x - b), & \dot{x} \geq 0; \\ d \operatorname{sgn}(x + b), & \dot{x} < 0, \end{cases}$$

ее параметры приведены на графике (рис. 5.10). Такие системы часто встречаются в электронике [30].

Решение дифференциального уравнения системы получим методом приспособывания

$$x(t) = \begin{cases} (x(t_0) - d)e^{-(t-t_0)/T} + d, & \dot{x} \geq 0; \\ (x(t_0) + d)e^{-(t-t_0)/T} - d, & \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (5.73)$$

где t_0 – момент смены ветви нелинейности. Выражение (5.73), далее – истинное решение, приведено только для оценки точности приближенного решения, которое будет получено в соответствии с изложенной методикой. Расчеты проведем для следующих значений параметров: $T = 0,1$ с; $d = 1$; $b = 0,5$.

Наличие решения уравнений гармонического баланса в первом приближении при $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t)$

$$1 + W(i\omega)\bar{J}(A_1) = 0$$

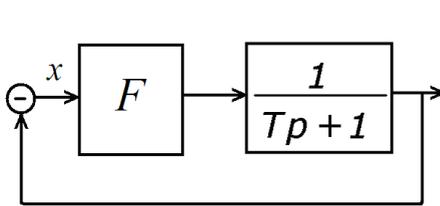


Рис. 5.9. Структурная схема нелинейной системы

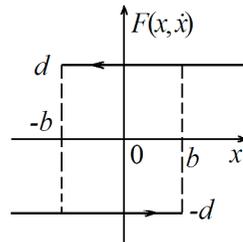


Рис. 5.10. График нелинейности

определим графически (здесь $\bar{J}(A_1) = q(A_1) + iq'(A_1)$). На рис. 5.11 построены годограф $W(i\omega) = \frac{1}{Ti\omega + 1}$ линейной части системы и шаблон нелинейности $-1/\bar{J}(A_1)$, где

$$\bar{J}(A_1) = \frac{4d}{\pi A_1} \left(\sqrt{1 - (b/A_1)^2} - i(b/A_1) \right), \quad A_1 \geq b.$$

Очевидно, что не существует таких A_1 и ω , при которых кривые пересекаются. Наиболее близко кривые подходят друг к другу при $A_1 = b$ и $\omega = 28,922$ (при указанных параметрах), но наименьшая невязка по фазе между годографами будет при $A_1 = b$ и $\omega \rightarrow \infty$.

Рассмотрим решение задачи при $n > 1$. Точки разрыва и смены ветвей нелинейности по $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ совпадают, а между экстремумами функция $x(t)$ монотонна, т.к. линейная часть – аperiodическое звено. Вместо применяемого в МГЛ условия $\varphi_1 = 0$ границами отрезка разложения в ряд Фурье примем точки экстремума функции $x(t)$, зависящие от n , что позволит согласовать их с точками переключения нелинейности. Колебания симметричны, при аргументах, задаваемых выражениями (5.66), (5.67), выход нелинейного элемента $F(x, \dot{x}) = -d \operatorname{sgn} \dot{x}$ и не зависит от значений векторов \vec{A} и $\vec{\varphi}$ для любого n . Решения (5.68) и (5.71) совпадают и

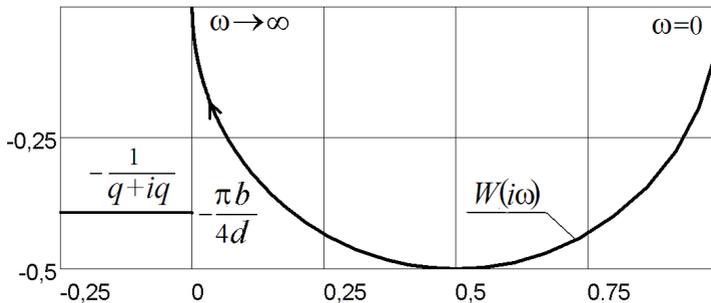


Рис. 5.11. Графическое решение уравнений гармонического баланса в первом приближении

равны $0, \pi, 2\pi$, но в силу симметрии и периодичности достаточно учесть лишь $\psi_1 = 0$. Тогда

$$\hat{x}(\psi) = \sum_{k=1}^n \frac{4d}{\pi k \sqrt{1 + (Tk\omega)^2}} \sin(k\psi - \arctg(k\omega T)), \quad (5.74)$$

а уравнение (5.69) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n \frac{4d\omega}{\pi k \sqrt{1 + (Tk\omega)^2}} \cos(k\pi\delta - \arctg(k\omega T)) = 0, \quad (5.75)$$

где для удобства количественного анализа используется переменная $\delta = \psi / \pi$, характеризующая относительное отклонение точки смены знака $x_n(t)$ от границы отрезка разложения. Тогда целевую функцию (5.72) запишем в виде

$$G = C_1 |\delta| + C_2 |\hat{x}(0) + b|, \quad (5.76)$$

где C_1 и C_2 – весовые коэффициенты, $C_1 = 4$ и $C_2 = 1$. При таких C_1 и C_2 с ростом n , т.е. с увеличением числа учитываемых членов ряда Фурье истинного решения, значение целевой функций (5.76), вычисленное для частоты автоколебаний (истинного решения)

$\omega^* = \frac{\pi}{T \ln \frac{d+b}{d-b}}$, полученной по (5.73), монотонно убывает, что под-

тверждает правомерность ее использования, а оценка частоты, полученная при решении задачи минимизации (5.76), монотонно возрастает до ω^* . Таким образом, вследствие кусочно-постоянного характера нелинейности задача поиска параметров автоколебаний сводится к задаче оптимизации по одной переменной ω , что следует из (5.74) – (5.76). После того как определена частота автоколебаний, векторы \vec{A} и $\vec{\varphi}$ вычисляются в соответствии с (5.74).

На рис. 5.12 представлены зависимости целевой функции (5.76) от частоты при различных n . Целевая функция не является унимодальной. Аргумент глобального минимума представляет собой искомую частоту. Частота, при которой имеет место первый локальный минимум, зависит от постоянной времени T апериодического звена и увеличивается при ее уменьшении. С ростом n решение монотонно стремится к частоте автоколебаний системы, а значение

целевой функции в точке глобального минимума уменьшается. Если не учитывать (5.70), положив $C_1 = 0$, целевые функции при $n=1$ и $n>1$ качественно не отличаются, а значения в локальных минимумах сопоставимы по величине, что приводит к ложному решению. Аргумент второго минимума незначительно отличается от полученного для $n>1$ при $C_1 = 4$.

Поиск минимума целевой функции производился по частоте в диапазоне $0,01 < \omega \leq 100$, разбитом на отрезки $[0,01, \omega_T]$ и $[\omega_T, 100]$, на которых целевая функция унимодальна (см. рис. 5.12), $\omega_T = 10 = 1/T$ – частота, при которой изменяются фильтрующие свойства линейной части. Левая граница выбрана ненулевой, чтобы исключить тривиальное решение. Минимизация целевой функции на каждом из отрезков проводилась методом золотого сечения до сокращения его длины на 10 порядков. Из найденных таким образом локальных минимумов выбирался глобальный. Уравнение (5.75) решалось методом дихотомии с точностью 10^{-7} на отрезке величиной 0,01. Отрезок поиска определялся последовательным смещением от 0 с шагом 0,01, а направление поиска – по знаку $\dot{x}_n(0)$.

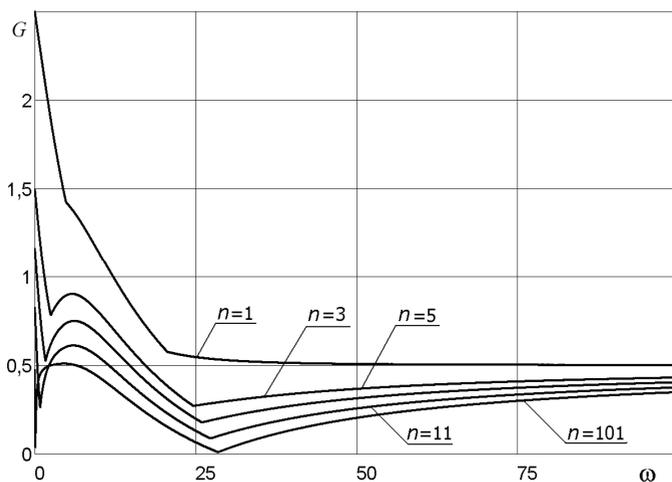


Рис. 5.12. Зависимость значения целевой функции от частоты и количества гармоник

Некоторые параметры приближенных решений и истинного решения приведены в табл.5.3. Также даны значения целевой функции G^* и δ^* для частичной суммы ряда Фурье разложения истинного решения, а для оценки сходимости рядов – значения относительных погрешностей приближенных решений

$$\varepsilon_0 = \|x_{n-1} - x_n\| / \|x_n\|,$$

$$\varepsilon_1 = \|\dot{x}_{n-1} - \dot{x}_n\| / \|\dot{x}_n\|,$$

$$\varepsilon_0^* = \|x_{n-1}^* - x_n^*\| / \|x_n^*\|,$$

$$\varepsilon_1^* = \|\dot{x}_{n-1}^* - \dot{x}_n^*\| / \|\dot{x}_n^*\|,$$

где x_n – приближенное решение; x_n^* – частичная сумма ряда Фурье истинного решения. Учитывая, что частоты колебаний x_{n-1} и x_n различны, норма вычислялась на полупериоде x_n для минимизации отклонений, вызванных различием частот. При $n=1$ частота стремится к правой границе отрезка поиска, что подтверждает отсутствие решения в этом случае. На рис. 5.13 приведены графики автоколебаний в системе и приближенных решений $x_n(t)$.

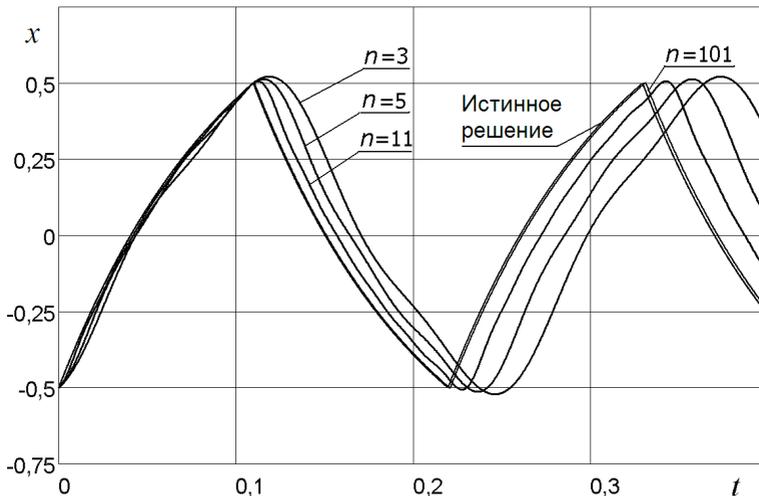


Рис. 5.13. Приближенные решения $x_n(t)$

Таблица 5.3

Результаты решения примера 5.5

n	1	3	5	11	101	Истинное решение
J	0,501	0,271	0,178	0,0876	0,0102	–
J^*	0,532	0,291	0,2	0,103	0,0123	0
δ	0,0317	0,0677	0,0444	0,0219	0,00255	–
δ^*	0,107	0,0592	0,0407	0,021	0,00253	0
ω	100	24,643	25,974	27,295	28,444	28,596
ε_0	–	1,12	0,126	0,0239	0,000267	–
ε_0^*	–	0,116	0,0419	0,0086	0,000103	0
ε_1	–	0,736	0,301	0,111	0,00976	–
ε_1^*	–	0,331	0,196	0,0874	0,00936	0
A_1	0,127	0,479	0,457	0,438	0,422	0,420
φ_1 , град.	-84,289	-67,913	-68,943	-69,878	-70,630	-70,725
A_3	–	0,057	0,054	0,051	0,049	0,049
φ_3 , град.	–	-82,297	-82,687	-83,037	-83,316	-83,351
A_5	–	–	0,020	0,019	0,018	0,018
φ_5 , град.	–	–	-85,597	-85,809	-85,978	-85,999

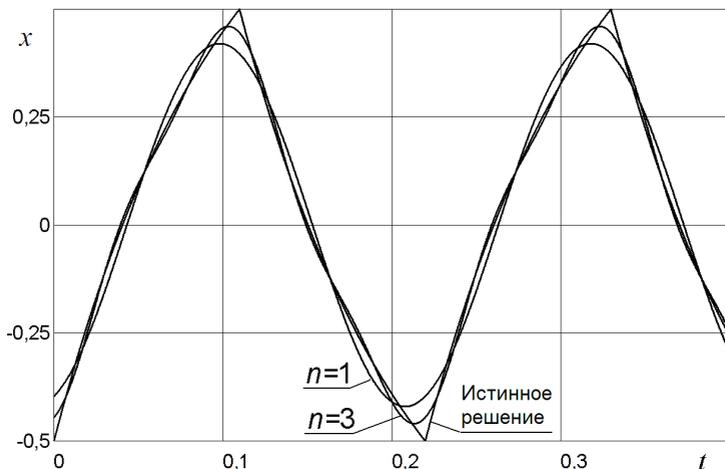


Рис. 5.14. Частичные суммы ряда Фурье истинного решения

Несовпадение экстремумов графиков на рис. 5.13 в значительной степени объясняется ошибкой в определении частоты, однако $\delta \neq 0$ и для частичных сумм ряда Фурье истинного решения, что иллюстрирует рис.5.14. Параметр δ характеризует относительное смещение точки смены ветви нелинейности, вызванное явлением Гиббса, при использовании приближенного решения. Вычисление точек переключения нелинейного элемента без учета явления Гиббса ($\delta = 0$) только на основе характеристик приближенного решения $x_n(t)$ с последующим применением итерационной процедуры приводит к увеличению погрешности и не позволяет найти решение итерационным способом с использованием только (5.62) – (5.67).

Таким образом, применение метода гармонической линеаризации для определения параметров автоколебаний возможно в системах, не имеющих решения в первом приближении. Если ряд Фурье автоколебательного процесса или его производной сходится неравномерно, требуется учитывать явление Гиббса. При этом решение уравнений гармонического баланса может быть сведено к задаче нелинейного программирования.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Какое явление называется скачкообразным резонансом?
2. Каким условиям должна удовлетворять линейная часть системы для возможного возникновения скачкообразного резонанса?
3. Влияет ли учет высших гармоник на вычисляемые значения параметров скачкообразного резонанса?
4. Каким условиям должен удовлетворять входной сигнал для того, чтобы в системе возник скачкообразный резонанс?
5. Запишите решение первого приближения, используемое в методе экспоненциальной линеаризации.
6. Чем отличается вид решения, используемого в методе экспоненциальной линеаризации от решения, используемого в методе гармонической линеаризации? Почему?
7. Можно ли использовать метод экспоненциальной линеаризации для анализа качества линейной системы?
8. Можно ли получить точное решение линейной системы при построении переходного процесса методом экспоненциальной линеаризации?
9. Опишите применение метода экспоненциальной линеаризации с шагом по времени и по амплитуде.
10. Запишите выражения для экспоненциальной линеаризации нелинейности.
11. Для применения в каких системах разработан модифицированный метод экспоненциальной линеаризации?
12. Как осуществляется линеаризация нелинейности в модифицированном методе экспоненциальной линеаризации?
13. Как вычисляется выход линейной подсистемы в модифицированном методе экспоненциальной линеаризации?

14. Чем определяется количество учитываемых гармоник в модифицированном методе экспоненциальной линеаризации?

15. В каком случае проявляется неравномерная сходимость ряда Фурье?

16. К каким сложностям при расчетах может привести явление Гиббса?

17. В каких системах явление Гиббса может затруднить поиск автоколебаний?

18. Как можно учесть негативное влияние явления Гиббса при гармонической линеаризации нелинейностей?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования/ Под ред. В.В. Солодовникова. Кн. 1–3. – М.: Машиностроение, 1967–69.
2. Гельдер К., Кубик С. Нелинейные системы управления: Пер. с нем. – М.: Мир, 1987.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983.
4. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем. – М.: Машиностроение, 1978.
5. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. – М.: Машиностроение, 1989.
6. Шумилов Б.Ф. Аналитическое описание, правила соединения и компенсации нелинейностей систем управления. / Методы расчета нелинейных систем управления. – М.: Энергоатомиздат, 1983. С. 25–32.
7. Шумилов Б.Ф. Приближенные аналитические методы исследования нелинейных автоматических систем управления подвижными объектами. – М.: МИФИ, 1984.
8. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. – М.: Физматгиз, 1960.
9. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974.
10. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972.
11. Современные методы проектирования систем автоматического управления: Анализ и синтез / Под ред. Б.Н. Петрова, В.В. Солодовникова, Ю.И. – Топчиева. М.: Машиностроение, 1967.
12. Казаков И.Е., Доступов Б.Г. Статистическая динамика нелинейных автоматических систем. – М.: Физматгиз, 1962.
13. Первозванский А.А. Случайные процессы в нелинейных автоматических системах. М., Физматгиз, 1962.
14. Гельфанд. И.М., Шилов Г.Е.Обобщенные функции и действия над ними – М.: Физматгиз, 1959.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965.

16. Немыцкий В.В. К вопросу об установившихся режимах в САР // Доклады I Конгресса ИФАК. – 1960.
17. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: Физматгиз, 1962.
18. Статистические методы в проектировании нелинейных систем автоматического управления. / Под ред. Б.Г. Доступова. – М.: Машиностроение, 1970.
19. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985.
20. Гришин С.А. Доопределение дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Новые направления в теории систем с переменной структурой. – М.: Изд-во ВНИИСИ, 1980. – С.30-39.
21. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1959.
22. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. – М.: ГИТТЛ, 1953.
23. Метод гармонической линеаризации в проектировании нелинейных систем автоматического управления. / Под ред. Е.П. Попова. – М.: Машиностроение, 1970.
23. Бобылев Н.А., Бурман Ю.М., Коровин С.К. Оценка погрешности метода гармонического баланса. // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 6. – С.3-12.
24. Кулябичев Ю.П., Потапова З.Е., Шумилов Ю.Ю. Оценка погрешности метода гармонической линеаризации. // Труды X Международного научно-технического семинара «Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации». Алушта – 2001. – М.: Изд-во МАИ. 2001. – С. 66–67.
25. Тэлор Д., Пестель М. Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления: Пер. с англ. – М.-Л.: Энергия, 1964.
26. Шумилов Ю.Ю. Применение автоматизированных методов моделирования при проектировании нелинейных систем управления // Методы автоматизированного проектирования нелинейных систем / Под ред. Ю.И. Топчиева. – М.: Машиностроение, 1993.
27. Проскуряков А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977.
28. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1986.

29. Ктитров С.В., Шумилов Ю.Ю. Расчет параметров автоколебаний при неравномерной сходимости ряда Фурье. //Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 3, С. 52–57.

30. Алексаков Г.Н., Копылов Б.Н. Структуры, спектры и моделирование в анализе нелинейных систем. – М.: МИФИ, 1989.

Сергей Викторович Ктитров
Юрий Юрьевич Шумилов

**РАСЧЕТ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ
И ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ**

Учебное пособие

Редактор М.В. Макарова

Подписано в печать 17.11.2008. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 13,0 Печ. л. 13,0 Тираж 150 экз.
Изд. № 1/38. Заказ №

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

Типография издательства «Тривант».
г.Троицк Московской области