ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО–ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.Б. Костин, И.В. Тихонов, Д.С. Ткаченко

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## Пособие по практическим занятиям
## Часть II

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии» в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений

Москва 2008

УДК 517.958(075)
ББК 22.311.я7
К 72

Костин А.Б., Тихонов И.В., Ткаченко Д.С. **Уравнения математической физики: Пособие по практическим занятиям. Часть II:** Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2008. – 328 с.

Данное пособие представляет собой вторую часть практического курса по уравнениям математической физики. В 2007 году вышла первая часть – А. Б. Костин, И. В. Тихонов, Д. С. Ткаченко. Уравнения математической физики. Пособие по практическим занятиям. Часть I – М.: МИФИ, 2007.

Во второй части рассматриваются: метод интегральных преобразований, формула Пуассона для уравнения теплопроводности, фундаментальное решение уравнения Лапласа, функция Грина, объемный потенциал, функции Бесселя, метод Фурье для уравнения Лапласа в шаре и сферические функции. Также даны образцы домашних заданий и описания лабораторных работ.

Данное пособие ориентировано на студентов факультета К, однако будет полезно всем, кто изучает курс математической физики.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы

Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. О.В. Нагорнов

ISBN 978–5–7262–1034–6

Оглавление

# 1. Преобразование Фурье для задач УМФ

## 1.1. Основные сведения о преобразовании Фурье

Здесь мы будем пользоваться формальным преобразованием Фурье (ПФ), определенным для кусочно-гладких функций $f: (-\infty, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), для которых сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$. Всюду будем полагать, что выполнены известные теоремы математического анализа, делающие наши операции законными.

Интегральным преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется

$$F(\xi) = \widehat{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

При этом функцию $f(x)$ можно восстановить по следующей формуле:

$$f(x) = \widetilde{F(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} F(\xi) d\xi, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Интеграл в формуле (1.2) надо понимать, вообще говоря, в смысле главного значения.

Если $f(x)$ – **четная функция**, то

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \cos(\xi x) f(x) dx, \tag{1.3}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \cos(\xi x) F(\xi) d\xi. \tag{1.4}$$

Если $f(x)$ – **нечетная функция**, то

$$F(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin(\xi x) f(x) dx, \tag{1.5}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \sin(\xi x) F(\xi) d\xi. \tag{1.6}$$

**Утверждение 1.1** (свойства преобразования Фурье).

*Пусть* $F(\xi)$ *– образ Фурье функции* $f(x)$ *при ПФ* (1.1).

*Тогда верны формулы:*

$1^o$ $\widehat{f'(x)} = i\xi F(\xi)$, $\qquad \widehat{f^{(n)}(x)} = \big(i\xi\big)^n F(\xi)$;

$2^o$ $\widehat{f * g} = F(\xi)\cdot G(\xi)$, *где* $f{*}g = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x{-}t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x{-}t)g(t)dt$ – *свертка функций* $f(x)$ *и* $g(x)$.

Кроме этих общих формул потребуется следующий важный интеграл:

**Утверждение 1.2.**

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-p^2\xi^2}\cos(q\xi)d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}\, e^{-\frac{q^2}{4p^2}}, \qquad p > 0,\ q \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

*Доказательство.* Обозначим $\frac{q}{p} = a$ и произведем в искомом интеграле замену переменных:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-p^2\xi^2}\cos(q\xi)d\xi = \left[\begin{array}{ll} p\xi = x, & d\xi = \frac{dx}{p} \\ q\xi = ax & \end{array}\right] = \frac{1}{p}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)dx.$$

Рассмотрим последний интеграл как функцию от $a$:

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)dx.$$

Рассмотрим $I'(a)$:

$$I'(a) = -\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}\sin(ax)dx = \left[\text{по частям: } -xe^{-x^2} = \frac{1}{2}\left(e^{-x^2}\right)'\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\underbrace{e^{-x^2}\sin(ax)\Big|_{x=0}^{x=\infty}}_{=0} - a\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)dx\right) \equiv -\frac{a}{2}\, I(a).$$

Таким образом, для $I(a)$ получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$I'(a) + \frac{a}{2}\, I(a) = 0.$$

Его общее решение имеет вид:

$$I(a) = ce^{-\frac{a^2}{4}}.$$

Чтобы найти коэффициент $c$, положим $a = 0$ и вычислим интеграл $I(0)$:

$$c = I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot 1 \cdot dx.$$

Последний интеграл – интеграл Эйлера – Пуассона, равный $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, откуда $c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ и $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{a^2}{4}}$. Вспоминая замену переменных $\frac{q}{p} = a$, получаем искомый интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-p^2\xi^2} \cos(q\xi) d\xi = \frac{1}{p}\, I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}\, e^{-\frac{q^2}{4p^2}}.$$

$\square$

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, сформулируем **ПРАВИЛО**:

Если задача рассматривается при

- $x \in (-\infty,\ +\infty)$, то надо использовать ПФ по формулам (1.1)-(1.2);
- $x \in (0,\ +\infty)$ с краевым условием I-го рода, то надо использовать sin-ПФ по формулам (1.5)-(1.6);
- $x \in (0,\ +\infty)$ с краевым условием II-го рода, то надо использовать cos-ПФ по формулам (1.3)-(1.4).

### 1.2. Примеры решения задач

**№ 815.**[1]

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0, \tag{1.8}$$

$$u(x,\, 0) = \varphi(x), \qquad x \in (-\infty,\ +\infty), \tag{1.9}$$

$$u_t(x,\, 0) = \psi(x), \qquad x \in (-\infty,\ +\infty). \tag{1.10}$$

#### Шаг 1. Применение ПФ

Поскольку задача рассматривается на всей прямой $x \in (-\infty,\ +\infty)$, в соответствии с правилом, применяем полное ПФ (1.1) по пространственной переменной $x$ к равенству (1.8).

[1]Нумерация задач ведется в соответствии с задачником [1].

Пусть
$$U(\xi,\ t)=\widehat{u(x,\ t)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{-i\xi x}u(x,\ t)dx,$$
Тогда результатом действия ПФ на (1.8) будет равенство:
$$U_{tt}(\xi;\ t)+a^2\xi^2U(\xi;\ t)=0,\qquad \xi\in(-\infty,\ +\infty),\ \ t>0. \tag{1.11}$$
**Шаг 2. Решение ОДУ (1.11)**

Общее решение однородного линейного уравнения (1.11) имеет вид:
$$U(\xi;\ t)=c_1(\xi)\,e^{ia\xi t}+c_2(\xi)e^{-ia\xi t},\qquad \xi\in(-\infty,\ +\infty). \tag{1.12}$$
**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (1.12) обратное преобразование Фурье (1.2). Получим
$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i\xi x}U(\xi;\ t)d\xi=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(c_1(\xi)\,e^{i\xi(x+at)}+c_2(\xi)\,e^{i\xi(x-at)}\Big)\,d\xi=A(x-at)+B(x+at),$$
где $A$ и $B$ – некоторые, пока неизвестные функции, которые мы найдем из требований начальных условий.

**Шаг 4. Использование начальных условий**

В силу начальных условий (1.9) – (1.10), получаем:
$$\begin{cases} u(x,\ 0)=A(x)+B(x)=\varphi(x),\\ u_t(x,\ 0)=a\left(B^{'}(x)-A^{'}(x)\right)=\psi(x),\end{cases}\qquad\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\qquad \begin{cases} A(x)+B(x)=\varphi(x),\\ B(x)-A(x)=\frac{1}{a}\left(\int\limits_0^x\psi(s)ds+c\right),\end{cases}\qquad\Longrightarrow$$
$$\begin{cases} 2A(x)=\varphi(x)-\frac{1}{a}\int\limits_0^x\psi(s)ds,\\ 2B(x)=\varphi(x)+\frac{1}{a}\int\limits_0^x\psi(s)ds,\end{cases}\qquad\Longrightarrow$$
$$u(x,\ t)=A(x-at)+B(x+at)=$$
$$=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x-at}\psi(s)ds+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(s)ds.$$

**Ответ:** $$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds.$$

**№ 819.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x > 0, \;\; t > 0, \tag{1.13}$$

$$u(x,\, 0) = 0, \qquad x \geqslant 0, \tag{1.14}$$

$$u(0,\, t) = \mu(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{1.15}$$

**Шаг 1. Применение $\sin -$ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полупрямой $x \in (0,\; +\infty)$, а заданное краевое условие – I-го рода, то в соответствии с правилом применяем $\sin -$ПФ (1.5) по пространственной переменной $x$ к равенству (1.13).

Пусть

$$U(\xi,\; t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x) u(x,\; t) dx.$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x) u_{xx}(x,\; t) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \underbrace{\sin(\xi x) u_x(x,\; t) \Big|_{x=0}^{x=+\infty}}_{=0} - \xi \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x) u_x(x,\, t) dx \right] =$$

$$= -\xi \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \cos(\xi x) u(x,\; t) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \xi \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x) u(x,\; t) dx \right] =$$

$$= \Big[ u(0,\; t) = \mu(t) \Big] = \xi \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \mu(t) - \xi^2 U(\xi,\; t) \tag{1.16}$$

и задача (1.13) – (1.15) преобразуется в задачу Коши для ОДУ:

$$\begin{cases} U_t(\xi,\, t) + a^2 \xi^2 U(\xi,\, t) = a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \xi \cdot \mu(t); \\ U(\xi,\, 0) = 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (1.17)

Общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего (1.17), имеет вид[1]:

$$U_{\text{ОО}} = c(\xi) e^{-a^2 \xi^2 t}.$$

По МЕТОДУ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННОЙ, общее решение неоднородного линейного уравнения ищется в виде

$$U_{\text{ОНО}} = c(\xi,\, t) e^{-a^2 \xi^2 t}. \tag{1.18}$$

[1]Будем обозначать общее решение однородного уравнения через $U_{\text{ОО}}$, а общее решение соответствующего неоднородного линейного уравнения – через $U_{\text{ОНО}}$.

Подставляя (1.18) в ОДУ задачи (1.17), получим

$$c_t = a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \xi \cdot \mu(t) \cdot e^{a^2\xi^2 t}, \qquad \Longrightarrow$$

$$c(\xi,\, t) = a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \xi \int\limits_0^t \mu(\tau) \cdot e^{a^2\xi^2\tau} d\tau + c_1(\xi).$$

Итак,

$$U_{\text{оно}} = c_1(\xi) e^{-a^2\xi^2 t} + a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \xi \int\limits_0^t \mu(\tau) \cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau.$$

Осталось применить начальное условие:

$$U(\xi,\, 0) = c_1(\xi) + 0 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad c_1(\xi) = 0, \qquad \Longrightarrow$$

$$U = a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \xi \int\limits_0^t \mu(\tau) \cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau. \tag{1.19}$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (1.19) обратное синус-преобразование Фурье (1.6). Получим

$$u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x)\, U(\xi;\, t) d\xi = a^2 \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \xi \sin(\xi x) d\xi \int\limits_0^t \mu(\tau) e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} 2a^2\xi e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} = \\ = -\frac{\frac{\partial}{\partial\xi} e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}}{t-\tau} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\pi} \int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{t-\tau} \cdot \Bigg[ \underbrace{\sin(\xi x) e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} \Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}}_{=0} -$$

$$-x \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x) e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\xi \Bigg] d\tau = \left[ \text{по формуле (1.7), при } \begin{array}{l} q = x, \\ p = a\sqrt{t-\tau} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{x}{\pi} \int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{t-\tau} \cdot \left[ \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\tau = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

**Ответ:** $\quad u(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$

**№ 821.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,\,t), \qquad x > 0, \;\; t > 0, \tag{1.20}$$

$$u(x,\,0) = 0, \qquad x \geqslant 0, \tag{1.21}$$

$$u(0,\,t) = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.22}$$

**Шаг 1. Применение** $\sin -$**ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полупрямой $x \in (0,\ +\infty)$, а заданное краевое условие – I-го рода, то в соответствии с правилом применяем $\sin -$ПФ (1.5) по пространственной переменной $x$ к равенству (1.20).

Пусть

$$U(\xi,\ t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x) u(x,\ t) dx, \qquad F(\xi,\ t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x) f(x,\ t) dx.$$

Тогда, по формуле (1.16) при $\mu(t) \equiv 0$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x) u_{xx}(x,\ t) dx = -\xi^2 U(\xi,\ t)$$

и задача (1.20) – (1.22) преобразуется в задачу Коши для ОДУ:

$$\begin{cases} U_t(\xi,\ t) + a^2\xi^2 U(\xi,\ t) = F(\xi,\ t); \\ U(\xi,\ 0) = 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (1.23)

Общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего (1.23), имеет вид:

$$U_{\text{OO}} = c(\xi) e^{-a^2\xi^2 t}.$$

По МЕТОДУ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННОЙ, общее решение неоднородного линейного уравнения ищется в виде

$$U_{\text{OHO}} = c(\xi,\ t) e^{-a^2\xi^2 t}. \tag{1.24}$$

Подставляя (1.24) в ОДУ задачи (1.23), получим

$$c_t = F(\xi,\ t) \cdot e^{a^2\xi^2 t}, \qquad \Longrightarrow$$

$$c(\xi,\ t) = \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau) \cdot e^{a^2\xi^2\tau} d\tau + c_1(\xi).$$

Итак,

$$U_{\text{OHO}} = c_1(\xi) e^{-a^2\xi^2 t} + \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau) \cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau.$$

Осталось применить начальное условие:

$$U(\xi,\,0) = c_1(\xi) + 0 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad c_1(\xi) = 0, \qquad \Longrightarrow$$

$$U_{\text{ОНО}} = \int\limits_0^t F(\xi,\,\tau)\cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\tau. \tag{1.25}$$

## Шаг 3. Обратное преобразование Фурье

Применим к (1.25) обратное синус-преобразование Фурье (1.6). Получим

$$u(x,\,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\sin(\xi x)\,U(\xi;\,t)d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin(\xi x)\int\limits_0^t \underbrace{\int\limits_0^{+\infty}\sin(\xi s)f(s,\,\tau)ds}_{=F(\xi,\tau)}\cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\tau d\xi =$$

$$= \left[\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^{+\infty} f(s,\,\tau)ds\left[\int\limits_0^{+\infty}\cos\big(\xi(x-s)\big)\,e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\xi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^{+\infty}\cos\big(\xi(x+s)\big)\,e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\xi\right] = \left[\text{в силу (1.7), при } \begin{array}{l} q = x\pm s, \\ p = a\sqrt{t-\tau}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi a}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left[\int\limits_0^{+\infty} f(s,\,\tau)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}ds - \int\limits_0^{+\infty} f(s,\,\tau)e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2(t-\tau)}}ds\right].$$

**Ответ:** $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left[\int\limits_0^{+\infty} f(s,\,\tau)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}ds - \int\limits_0^{+\infty} f(s,\,\tau)e^{-\frac{(x+s)^2}{4a^2(t-\tau)}}ds\right].$

**№ 817.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2u_{xx} = 0, \qquad x\in(-\infty,\,+\infty),\quad t>0, \tag{1.26}$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \qquad x\in(-\infty,\,+\infty), \tag{1.27}$$

## Шаг 1. Применение ПФ

Поскольку задача рассматривается на всей прямой $x\in(-\infty,\,+\infty)$, в соответствии с правилом, применяем полное ПФ (1.1) по пространственной переменной $x$ к равенству (1.26).

Пусть

$$U(\xi,\ t)=\widehat{u(x,\ t)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}u(x,\ t)dx,$$

$$\Phi(\xi)=\widehat{\varphi(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\varphi(x)dx.$$

Тогда результатом действия ПФ на (1.26) – (1.27) будет задача:

$$U_t(\xi;\ t)+a^2\xi^2U(\xi;\ t)=0,\qquad \xi\in(-\infty,\ +\infty),\ \ t>0. \tag{1.28}$$

$$U(\xi;\ 0)=\Phi(\xi),\qquad \xi\in(-\infty,\ +\infty). \tag{1.29}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (1.28) – (1.29)

Общее решение однородного линейного уравнения (1.28) имеет вид:

$$U(\xi;\ t)=c(\xi)\,e^{-a^2\xi^2t},\qquad \xi\in(-\infty,\ +\infty).$$

А в силу начального условия (1.29) имеем:

$$c(\xi)=\Phi(\xi),\quad\Rightarrow\quad U(\xi,\ t)=\Phi(\xi)\,e^{-a^2\xi^2t},\quad \xi\in(-\infty,\ +\infty). \tag{1.30}$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (1.30) обратное преобразование Фурье (1.2). Получим

$$u(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}U(\xi;\ t)d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\xi)e^{i\xi x}\cdot e^{-a^2\xi^2t}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi(x-s)}\cdot\underbrace{e^{-a^2\xi^2t}}_{\text{четная}}d\xi\right]ds=$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)\left[\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\big(\xi(x-s)\big)\cdot e^{-a^2\xi^2t}d\xi\right]ds=$$

$$=\left[\text{по формуле (1.7), при }\begin{array}{l}q=x-s,\\ p=a\sqrt{t}\end{array}\right]=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\cdot e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds.$$

__Ответ:__ $\quad u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2t}}ds.$

**№ 818.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t-a^2u_{xx}=f(x,\ t),\qquad x\in(-\infty,\ +\infty),\ \ t>0, \tag{1.31}$$

$$u(x,\ 0)=0,\qquad x\in(-\infty,\ +\infty). \tag{1.32}$$

**Шаг 1. Применение ПФ**

Поскольку задача рассматривается на всей прямой $x \in (-\infty,\ +\infty)$, в соответствии с правилом, применяем полное ПФ (1.1) по пространственной переменной $x$ к равенству (1.31).

Пусть

$$U(\xi,\ t) = \widehat{u(x,\ t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} u(x,\ t)dx,$$

$$F(\xi,\ t) = \widehat{f(x,\ t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x,\ t)dx.$$

Тогда результатом действия ПФ на (1.31) – (1.32) будет задача:

$$U_t(\xi;\ t) + a^2\xi^2 U(\xi;\ t) = F(\xi,\ t), \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty), \quad t > 0. \tag{1.33}$$

$$U(\xi;\ 0) = 0, \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty). \tag{1.34}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (1.33) – (1.34)

Данный шаг полностью повторяет Шаг 2. № 821.

Общее решение однородного линейного уравнения (1.33) имеет вид:

$$U(\xi;\ t) = c(\xi)\ e^{-a^2\xi^2 t}, \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty).$$

По МЕТОДУ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННОЙ, общее решение неоднородного линейного уравнения ищется в виде

$$U_{\text{ОНО}} = c(\xi,\ t)e^{-a^2\xi^2 t}. \tag{1.35}$$

Подставляя (1.35) в уравнение (1.33), получим

$$c_t = F(\xi,\ t) \cdot e^{a^2\xi^2 t}, \qquad \Longrightarrow$$

$$c(\xi,\ t) = \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau) \cdot e^{a^2\xi^2\tau} d\tau + c_1(\xi).$$

Итак,

$$U_{\text{ОНО}} = c_1(\xi)e^{-a^2\xi^2 t} + \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau) \cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau.$$

Осталось применить начальное условие:

$$U(\xi,\ 0) = c_1(\xi) + 0 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad c_1(\xi) = 0, \qquad \Longrightarrow$$

$$U_{\text{ОНО}} = \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau) \cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau. \tag{1.36}$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (1.36) обратное преобразование Фурье (1.2). Получим

$$u(x,\,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi x}\,U(\xi;\,t)d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi x}\int\limits_{0}^{t}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi s}f(s,\,\tau)ds}_{=F(\xi,\tau)}\cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\tau d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s,\,\tau)ds\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\xi(x-s)}\underbrace{e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}}_{\text{четная по }\xi}d\xi=$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s,\,\tau)ds\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\big(\xi(x-s)\big)\,e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\xi=$$

$$=\left[\text{по формуле (1.7), }\begin{array}{l}q=x-s,\\ p=a\sqrt{t-\tau}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s,\,\tau)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}ds.$$

**Ответ:** $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{t}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(s,\,\tau)e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}ds.$

*Замечание* 1.1. Объединив результаты № 817, 818, мы получим формулу Пуассона (формулу решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой для случая одной пространственной переменной). Мы уже пользовались этой формулой в п. 6.1, 6.2 первой части данного пособия[1]:

$$u(x,\,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot f(\xi,\,\tau)d\xi d\tau.$$

[1] [5], с. 54 – 63.

**№ 820.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x > 0,\ \ t > 0, \tag{1.37}$$

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \qquad x \geqslant 0, \tag{1.38}$$

$$u_x(0,\,t) = \nu(t), \qquad t \geqslant 0. \tag{1.39}$$

**Шаг 1. Применение $\cos$ –ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полупрямой $x \in (0,\ +\infty)$, а заданное краевое условие – II-го рода, то в соответствии с правилом, применяем $\cos$ –ПФ (1.3) по пространственной переменной $x$ к равенству (1.37).

Пусть

$$U(\xi,\ t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x) u(x,\ t)dx,$$

Тогда

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x) u_{xx}(x,\ t)dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \cos(\xi x) u_x(x,\ t)\Big|_{x=0}^{x=+\infty} + \xi \int\limits_0^{+\infty} \sin(\xi x) u_x(x,\ t)dx \right] = \Big[(1.39)\Big] =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( -\nu(t) + \xi \left[ \underbrace{\sin(\xi x) u(x,\ t)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}}_{=0} - \xi \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x) u(x,\ t)dx \right] \right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \nu(t) - \xi^2 U(\xi,\ t) \tag{1.40}$$

и задача (1.37) – (1.39) преобразуется в задачу Коши для ОДУ:

$$\begin{cases} U_t(\xi,\,t) + a^2\xi^2 U(\xi,\,t) = -a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \nu(t); \\ U(\xi,\,0) = 0. \end{cases} \tag{1.41}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (1.41)

Общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего (1.41), имеет вид:

$$U_{\text{OO}} = c(\xi) e^{-a^2\xi^2 t}.$$

По МЕТОДУ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННОЙ, общее решение неоднородного линейного уравнения ищется в виде

$$U_{\text{OHO}} = c(\xi,\,t) e^{-a^2\xi^2 t}. \tag{1.42}$$

Подставляя (1.42) в ОДУ задачи (1.41), получим

$$c_t = -a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \nu(t) \cdot e^{a^2\xi^2 t}, \qquad \Longrightarrow$$

$$c(\xi,\, t) = -a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \nu(\tau) \cdot e^{a^2\xi^2\tau} d\tau + c_1(\xi).$$

Итак,

$$U_{\text{ОНО}} = c_1(\xi) e^{-a^2\xi^2 t} - a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \nu(\tau) \cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau.$$

Осталось применить начальное условие:

$$U(\xi,\, 0) = c_1(\xi) + 0 = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad c_1(\xi) = 0, \qquad \Longrightarrow$$

$$U_{\text{ОНО}} = -a^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \nu(\tau) \cdot e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau. \tag{1.43}$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (1.43) обратное косинус-преобразование Фурье (1.4). Получим

$$u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x)\, U(\xi;\, t) d\xi = -a^2 \cdot \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x) d\xi \int\limits_0^t \nu(\tau) e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\tau =$$

$$= -\frac{2a^2}{\pi} \int\limits_0^t \nu(\tau) d\tau \int\limits_0^{+\infty} \cos(\xi x) e^{-a^2\xi^2(t-\tau)} d\xi = \left[ (1.7), \begin{array}{l} q = x, \\ p = a\sqrt{t-\tau} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{2a^2}{\pi} \int\limits_0^t \nu(\tau) \cdot \left[ \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\tau = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

**Ответ:** $\quad u(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$

**№ 816.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,\, t), \qquad x \in (-\infty,\, +\infty), \;\; t > 0, \tag{1.44}$$

$$u(x,\, 0) = 0, \qquad x \in (-\infty,\, +\infty), \tag{1.45}$$

$$u_t(x,\, 0) = 0, \qquad x \in (-\infty,\, +\infty). \tag{1.46}$$

**Шаг 1. Применение ПФ**

Поскольку задача рассматривается на всей прямой $x \in (-\infty,\ +\infty)$, в соответствии с правилом применяем полное ПФ (1.1) по пространственной переменной $x$ к равенству (1.44).

Пусть

$$U(\xi,\ t) = \widehat{u(x,\ t)}, \qquad F(\xi,\ t) = \widehat{f(x,\ t)}.$$

Тогда результатом действия ПФ на (1.44) – (1.46) будет задача:

$$U_{tt}(\xi;\ t) + a^2\xi^2 U(\xi;\ t) = F(\xi,\ t), \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0. \qquad (1.47)$$

$$U(\xi;\ 0) = 0, \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty), \qquad (1.48)$$

$$U_t(\xi;\ 0) = 0, \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty). \qquad (1.49)$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (1.47) – (1.49)

Общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего уравнению (1.47), имеет вид:

$$U_{\text{оо}}(\xi;\ t) = c_1(\xi)\ \sin(a\xi t) + c_2(\xi)\cos(a\xi t), \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty). \qquad (1.50)$$

В соответствии с МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ ПОСТОЯННЫХ, будем искать решение (1.47) в виде

$$U_{\text{оно}}(\xi;\ t) = c_1(\xi,\ t)\ \sin(a\xi t) + c_2(\xi,\ t)\cos(a\xi t), \qquad \xi \in (-\infty,\ +\infty). \ (1.51)$$

Для нахождения функций $c_{1,2}(\xi,\ t)$ имеем систему:

$$\begin{pmatrix} \sin(a\xi t) & \cos(a\xi t) \\ a\xi\cos(a\xi t) & -a\xi\sin(a\xi t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{1\,t} \\ c_{2\,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F(\xi,\ t) \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} c_{1\,t} = \frac{1}{a\xi}\cdot F(\xi,\ t)\cos(a\xi t) \\ c_{2\,t} = -\ \frac{1}{a\xi}\cdot F(\xi,\ t)\sin(a\xi t). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{a\xi}\ \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau)\cos(a\xi\tau)d\tau + c_3(\xi) \\ c_2 = -\ \frac{1}{a\xi}\ \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau)\sin(a\xi\tau)d\tau + c_4(\xi). \end{cases}$$

Подставим найденные $c_{1,2}$ в (1.51) и получим:

$$U_{\text{оно}}(\xi;\ t) = \frac{1}{a\xi}\left[\ \int\limits_0^t F(\xi,\ \tau)\cos(a\xi\tau)d\tau\ \cdot\sin(a\xi t) - \right.$$

$$-\int_0^t F(\xi,\ \tau)\sin(a\xi\tau)d\tau\ \cdot\cos(a\xi t)\Bigg] + c_3(\xi)\ \sin(a\xi t) + c_4(\xi)\cos(a\xi t) =$$

$$= \frac{1}{a\xi}\ \int_0^t F(\xi,\ \tau)\sin\big(a\xi(t-\tau)\big)\,d\tau + c_3(\xi)\ \sin(a\xi t) + c_4(\xi)\cos(a\xi t). \quad (1.52)$$

Подставим найденную функцию $U$ в первое начальное условие (1.48):

$$U(\xi;\,0) = c_4(\xi) = 0,$$

откуда $U(\xi;\,t) = \frac{1}{a\xi}\ \int_0^t F(\xi,\ \tau)\sin\big(a\xi(t-\tau)\big)\,d\tau + c_3(\xi)\ \sin(a\xi t)$ и

$$U_t(\xi;\,t) = \frac{1}{a\xi}\ F(\xi,\ t)\sin\big(a\xi(t-t)\big) +$$

$$+\frac{1}{a\xi}\ \int_0^t F(\xi,\ \tau)\cos\big(a\xi(t-\tau)\big)\,d\tau + a\xi\cdot c_3(\xi)\ \cos(a\xi t).$$

Тогда второе начальное условие (1.49) даст нам

$$U_t(\xi;\,0) = a\xi\cdot c_3(\xi) = 0.$$

Итак, $c_3(\xi) = c_4(\xi) = 0$

$$\text{и}\quad U(\xi;\,t) = \frac{1}{a\xi}\ \int_0^t F(\xi,\ \tau)\sin\big(a\xi(t-\tau)\big)\,d\tau. \qquad (1.53)$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (1.53) обратное преобразование Фурье (1.2). Получим

$$u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x}U(\xi;\,t)d\xi = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \frac{e^{i\xi x}\sin\big(a\xi(t-\tau)\big)}{\xi}\ F(\xi,\ \tau)d\tau d\xi =$$

$$= \left[\frac{e^{i\xi x}\sin\left(\alpha\xi\right)}{\xi} = \frac{e^{i\xi x}\left(e^{i\alpha\xi} - e^{-i\alpha\xi}\right)}{2i\xi} = \frac{e^{i\xi(x+\alpha)} - e^{i\xi(x-\alpha)}}{2i\xi} = \frac{1}{2}\int_{x-\alpha}^{x+\alpha} e^{i\xi\eta}d\eta\right] =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}}\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^t \left[\ \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} e^{i\xi\eta}d\eta\right]\ F(\xi,\ \tau)d\tau d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta} F(\xi,\ \tau) d\xi}_{=f(\eta,\tau)} \, d\eta d\tau = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\ \tau) d\eta d\tau.$$

**Ответ:** $u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\ \tau) d\eta d\tau.$

*Замечание* 1.2. Объединив результаты № 815, 816, мы получим формулу Даламбера (формулу решения задачи Коши для уравнения колебаний на прямой для случая одной пространственной переменной). Мы уже пользовались этой формулой, решая задачи раздела 4 первой части данного пособия[1].

$$u(x,\ t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2a} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds + \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\ \tau) ds d\tau.$$

## 2. Многомерное преобразование Фурье для задач УМФ

Пусть $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ – элемент $n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, а функция $f(x) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ определена на $\mathbb{R}^n$ и для нее сходится интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)|\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n < +\infty.$$

Тогда для функции $f(x)$ существует преобразование Фурье:

$$F(\xi) = \widehat{f(x)} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\xi,\ x)} f(x) dx, \tag{2.1}$$

где $(\xi,\ x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$ – скалярное произведение векторов $\xi$ и $x$.

При этом функцию $f(x)$ можно восстановить по ее образу Фурье по следующей формуле[2]:

$$f(x) = \widecheck{F(\xi)} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi,\ x)} F(\xi) d\xi. \tag{2.2}$$

[1] [5], с. 28 – 39.

[2] Здесь и ниже мы также предполагаем выполненными условия известных теорем матанализа, позволяющих на законных основаниях осуществлять наши действия.

**2.1. Двумерное преобразование Фурье для задач УМФ**

Для важного частного случая двумерного пространства с координатами $(x,\ y)$ формулы (2.1) – (2.2) переписываются в виде:

$$F(\xi,\ \eta) = \widehat{f(x,\ y)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x+\eta y)} f(x,\ y)dxdy, \tag{2.3}$$

$$f(x,\ y) = \widetilde{F(\xi, \eta)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x+\eta y)} F(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \tag{2.4}$$

Если $f(x,\ y)$ – **четная по** $y$, то

$$F(\xi,\ \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i(\xi x)} \cos(\eta y) f(x,\ y)dxdy, \tag{2.5}$$

$$f(x,\ y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i(\xi x)} \cos(\eta y) F(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \tag{2.6}$$

Если $f(x,\ y)$ – **нечетная по** $y$, то

$$F(\xi,\ \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i(\xi x)} \sin(\eta y) f(x,\ y)dxdy, \tag{2.7}$$

$$f(x,\ y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i(\xi x)} \sin(\eta y) F(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \tag{2.8}$$

Кроме этих общих формул нам потребуются также важные формулы:

**Утверждение 2.1.**

*Пусть* $U(\xi,\ \eta,\ t)$ *– образ Фурье функции* $u(x,\ y,\ t)$ *при ПФ* (2.3),
$U_c(\xi,\ \eta,\ t)$ *– образ при* cos*-ПФ* (2.5),
$U_s(\xi,\ \eta,\ t)$ *– образ при* sin*-ПФ* (2.7).
*Тогда верны формулы:*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x+\eta y)} \Big(u_{xx}(x,\ y,\ t) + u_{yy}(x,\ y,\ t)\Big) dydx = -\Big(\xi^2+\eta^2\Big)\, U(\xi,\ \eta,\ t) \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\sin(\eta y)u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx =$$

$$= \frac{\eta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}u(x,\ 0,\ t)\,dx - \eta^2\,U_s(\xi,\ \eta,\ t) \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}u_y(x,\ 0,\ t)\,dx - \eta^2\,U_c(\xi,\ \eta,\ t). \quad (2.11)$$

*Доказательство.* Чтобы доказать (2.9), докажем формулу

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x+\eta y)}u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx = -\eta^2\,U(\xi,\ \eta,\ t).$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x+\eta y)}u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx = \Big[\text{по частям по } y\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\underbrace{e^{-i\eta y}u_y(x,\ y,\ t)\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty}}_{=0}dx - i\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x+\eta y)}u_y(x,\ y,\ t)dydx\right) =$$

$$= \frac{-i\eta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x+\eta y)}u_y(x,\ y,\ t)dydx = \Big[\text{еще раз по частям по } y\Big] =$$

$$= \frac{-i\eta}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\underbrace{e^{-i\eta y}u(x,\ y,\ t)\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty}}_{=0}dx - i\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x+\eta y)}u(x,\ y,\ t)dydx\right) =$$

$$= (i\eta)^2\ U(\xi,\ \eta,\ t) = -\eta^2\,U(\xi,\ \eta,\ t).$$

Формула

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x+\eta y)}u_{xx}(x,\ y,\ t)dydx = -\xi^2\,U(\xi,\ \eta,\ t)$$

доказывается совершенно аналогично. (Заметим, кстати, что аналог последней формулы будет и для cos-ПФ и sin-ПФ, поскольку всюду в них под интегралом оказываются одинаковые выражения, зависящие от $x$ и не зависящие от $y$.)

Докажем формулу (2.10).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\sin(\eta y)u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx = \Big[\text{по частям по } y\Big] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\underbrace{\sin(\eta y)u_y(x,\ y,\ t)\Big|_{y=0}^{y=\infty}}_{=0}dx - \eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)u_y(x,\ y,\ t)dydx =$$

$$= -\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)u_y(x,\ y,\ t)dydx = \Big[\text{еще раз по частям по } y\Big] =$$

$$= -\eta\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\underbrace{\cos(\eta y)u(x,\ y,\ t)\Big|_{y=0}^{y=\infty}}_{=-u(x,\,0,\,t)}dx + \right.$$

$$\left. + \eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\sin(\eta y)u(x,\ y,\ t)dydx\right) =$$

$$= \eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}u(x,\ 0,\ t)\,dx - \pi\eta^2\,U(\xi,\ \eta,\ t).$$

Поделив полученное равенство на $\pi$, получим (2.10).

Докажем формулу (2.11).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx = \Big[\text{по частям по } y\Big] =$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\underbrace{\cos(\eta y)u_y(x,\ y,\ t)\Big|_{y=0}^{y=\infty}}_{=-u_y(x,\,0,\,t)} dx + \eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\sin(\eta y)u_y(x,\ y,\ t)dydx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi x)}u_y(x,\ 0,\ t)dx + \eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\sin(\eta y)u_y(x,\ y,\ t)dydx =$$

$$= \Big[\text{еще раз по частям по } y\Big] = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}u_y(x,\ 0,\ t)dx +$$

$$+\eta\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\underbrace{\sin(\eta y)u(x,\ y,\ t)\Big|_{y=0}^{y=\infty}}_{=0} dx - \right.$$

$$\left. -\eta\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)u(x,\ y,\ t)dydx\right) =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}u_y(x,\ 0,\ t)\,dx - \pi\eta^2\,U(\xi,\ \eta,\ t).$$

Поделив полученное равенство на $\pi$, получим (2.11), что и завершает доказательство. □

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, сформулируем **ПРАВИЛО**:

Если задача рассматривается при

- $x,\ y \in (-\infty,\ +\infty)$, то надо использовать ПФ по формулам (2.3)–(2.4);
- $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,\ +\infty)$ с краевым условием I-го рода, то надо использовать sin-ПФ по формулам (2.7)–(2.8);
- $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,\ +\infty)$ с краевым условием II-го рода, то надо использовать cos-ПФ по формулам (2.5)–(2.6).

**№ 822.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0, \qquad x,\ y \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0, \tag{2.12}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \qquad x,\ y \in (-\infty,\ +\infty). \tag{2.13}$$

**Шаг 1. Применение ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полной плоскости $x \in (-\infty,\ +\infty)$, $y \in (-\infty,\ +\infty)$, в соответствии с правилом, применяем полное ПФ (2.3) по пространственным переменным $(x,\ y)$ к равенствам (2.12) – (2.13).

Пусть

$$U(\xi,\ \eta,\ t) = \widehat{u(x, y; t)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} u(x,\ y,\ t)\,dxdy,$$

$$\Phi(\xi,\ \eta) = \widehat{\varphi(x, y)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} \varphi(x,\ y)\,dxdy.$$

Тогда результатом действия ПФ на (2.12) – (2.13) будет задача:

$$U_t(\xi, \eta; t) + a^2\left(\xi^2 + \eta^2\right) U(\xi, \eta; t) = 0, \quad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0, \tag{2.14}$$

$$U(\xi, \eta; 0) = \Phi(\xi, \eta), \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty). \tag{2.15}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (2.14) – (2.15) **для ОДУ**

Общее решение однородного линейного уравнения (2.14) имеет вид:

$$U_{\text{оо}}(\xi, \eta; t) = c(\xi, \eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t}, \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty).$$

а из начального условия (2.15) получаем, что коэффициент $c(\xi, \eta)$ равен $\Phi(\xi, \eta)$, откуда

$$U(\xi, \eta; t) = \Phi(\xi, \eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t}. \tag{2.16}$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (2.16) обратное преобразование Фурье (2.4). Получим

$$u = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x + \eta y)} U(\xi,\ \eta;\ t)\,d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x + \eta y)} \Phi(\xi, \eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t}\,d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x + \eta y)} \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi z + \eta s)} \varphi(z,\ s)\,dzds\right)\ e^{-a^2\left(\xi^2 + \eta^2\right)t}\,d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(z,\ s)\,dzds \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x - z)\xi} e^{-a^2\xi^2 t} \cdot e^{i(y - s)\eta} e^{-a^2\eta^2 t}\,d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(z,\ s)dzds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-z)\xi} e^{-a^2\xi^2 t} d\xi \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(y-s)\eta} e^{-a^2\eta^2 t} d\eta =$$

$$= \Big[\text{в силу четности функций } e^{-a^2\xi^2 t} \text{ и } e^{-a^2\eta^2 t} \text{ по переменным } \xi \text{ и } \eta\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(z,\ s)dzds \int\limits_{0}^{+\infty} \cos\Big((x-z)\xi\Big) e^{-a^2\xi^2 t} d\xi \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} \cos\big((y-s)\eta\big) e^{-a^2\eta^2 t} d\eta =$$

$$= \Big[\text{по формуле (1.7) с} \quad p = a\sqrt{t} \quad \text{и} \quad q = x - z \quad \text{либо} \quad q = y - s\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(z,\ s)\ \frac{\pi}{4a^2 t}\ e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}\ e^{-\frac{(y-s)^2}{4a^2t}} dzds =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(z,\ s) e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2t}}\ dzds.$$

**<u>Ответ:</u>** $\qquad u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(z,\ s) e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2t}}\ dzds.$

**№ 823.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = f(x, y; t), \qquad x,\ y \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0, \tag{2.17}$$

$$u(x, y, 0) = 0, \qquad x,\ y \in (-\infty,\ +\infty). \tag{2.18}$$

## <u>Шаг 1. Применение ПФ</u>

Поскольку задача рассматривается на полной плоскости $x \in (-\infty,\ +\infty)$, $y \in (-\infty,\ +\infty)$, в соответствии с правилом, применяем полное ПФ (2.3) по пространственным переменным $(x,\ y)$ к равенствам (2.17) – (2.18).

Пусть

$$U(\xi,\ \eta,\ t) = \widehat{u(x, y; t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} u(x,\ y,\ t) dxdy,$$

$$F(\xi,\ \eta,\ t) = \widehat{f(x, y; t)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi x + \eta y)} f(x,\ y,\ t) dxdy.$$

Тогда результатом действия ПФ на (2.17) – (2.18) будет задача:

$$U_t(\xi, \eta; t) + a^2\left(\xi^2 + \eta^2\right) U(\xi, \eta; t) = F(\xi,\ \eta,\ t), \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t > 0, \tag{2.19}$$

$$U(\xi, \eta; 0) = 0, \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty). \tag{2.20}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши (2.19) – (2.20) для ОДУ**

Общее решение однородного линейного уравнения (2.19) имеет вид:

$$U_{\text{оо}}(\xi,\eta;t) = c(\xi,\eta)\; e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}, \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty).$$

поэтому МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ «ПОСТОЯННОЙ» $c(\xi,\eta)$ получаем:

$$U_{\text{оно}}(\xi,\eta;t) = c(\xi,\eta;\,t)\; e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}, \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty).$$

откуда для $c(\xi,\eta;\,t)$, подставив искомый вид решения (2.2) в уравнение (2.19), получаем условие:

$$c_t(\xi,\eta;\,t) = F(\xi,\ \eta,\ t)\; e^{a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}.$$

Зная производную $c_t$, найдем $c$:

$$c(\xi,\eta;\,t) = \int\limits_0^t F(\xi,\ \eta,\ \tau)\; e^{a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)\tau} d\tau + c_1(\xi,\eta).$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (2.19) имеет вид:

$$U_{\text{оно}}(\xi,\eta;t) = \int\limits_0^t F(\xi,\ \eta,\ \tau)\; e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)} d\tau + c_1(\xi,\eta)\; e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}. \quad (2.21)$$

Используя начальное условие (2.20), находим $c_1(\xi,\eta) \equiv 0$, откуда, наконец получаем решение задачи Коши (2.19) – (2.20):

$$U(\xi,\eta;t) = \int\limits_0^t F(\xi,\ \eta,\ \tau)\; e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)} d\tau. \quad (2.22)$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (2.22) обратное преобразование Фурье (2.4). Получим

$$u(x,y;t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x+\eta y)} U(\xi,\ \eta;\ t) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x+\eta y)} \left( \int\limits_0^t F(\xi,\ \eta,\ \tau)\; e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)} d\tau \right) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(\xi x+\eta y)} e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)} \left( \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\xi z+\eta s)} f(z,\ s,\ \tau) dz ds \right) d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z,\ s,\ \tau) dzds \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(x-z)\xi} e^{-a^2\xi^2\,(t-\tau)} \cdot e^{i(y-s)\eta} e^{-a^2\eta^2\,(t-\tau)} d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z,\ s,\ \tau) dzds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-z)\xi} e^{-a^2\xi^2\,(t-\tau)} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(y-s)\eta} e^{-a^2\eta^2\,(t-\tau)} d\eta =$$

$$= \Big[\text{в силу четности функций } e^{-a^2\xi^2\,t} \text{ и } e^{-a^2\eta^2\,t} \text{ по переменным } \xi \text{ и } \eta\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z,\ s,\ \tau) dzds \int\limits_0^{+\infty} \cos\Big((x-z)\xi\Big) e^{-a^2\xi^2\,(t-\tau)} d\xi \times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} \cos\big((y-s)\eta\big) e^{-a^2\eta^2\,(t-\tau)} d\eta =$$

$$= \Big[\text{по формуле (1.7) с} \quad p = a\sqrt{t-\tau} \quad \text{и} \quad q = x - z \quad \text{либо} \quad q = y - s\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z,\ s,\ \tau)\ \frac{\pi}{4a^2(t-\tau)}\ e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2(t-\tau)}}\ e^{-\frac{(y-s)^2}{4a^2(t-\tau)}} dzds =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{1}{t-\tau} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z,\ s,\ \tau) e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}\ dzds\ d\tau.$$

**Ответ:** $\qquad u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int\limits_0^t \frac{1}{t-\tau} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(z,\ s,\ \tau) e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2(t-\tau)}}\ dzds\ d\tau.$

### № 824.

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2\,(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \quad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty),\ \ t > 0, \qquad (2.23)$$

$$u(x,0;t) = 0, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty), \qquad (2.24)$$

$$u(x,y;0) = \varphi(x,y), \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty). \qquad (2.25)$$

**Шаг 1. Применение sin-ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, а краевое условие первого рода, в соответствии с правилом, применяем sin-ПФ (2.7) – по пространственным переменным $(x,\ y)$ к равенствам (2.23) – (2.25).

Пусть

$$U(\xi,\ \eta,\ t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_0^{+\infty} e^{-i\xi x} \sin(\eta y) u(x,\ y,\ t) dydx,$$

$$\Phi(\xi,\ \eta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \sin(\eta y)\varphi(x,\ y)dydx.$$

При действии sin-ПФ на $u_t$ получим, очевидно, $U_t$, а при действии на $u_{xx}$, как при обычном ПФ, получим $-\xi^2 U$. Чтобы выяснить, в какое равенство перейдет уравнение (2.23), осталось применить формулу (2.10) (стр. 22) – результат действия sin-ПФ на $u_{yy}$, и учесть, что в данном примере $u(x,\ 0,\ t) = 0$. Окончательно получаем:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \sin(\eta y) u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx = -\eta^2\, U(\xi,\ \eta,\ t)$$

Итак, результатом действия sin-ПФ на (2.23) – (2.25) будет задача:

$$U_t(\xi,\eta;t) + a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)U(\xi,\eta;t) = 0, \qquad \xi\in\mathbb{R},\ \ \eta>0,\ \ t>0, \qquad (2.26)$$

$$U(\xi,\eta;0) = \Phi(\xi,\eta), \qquad \xi\in\mathbb{R},\ \ \eta>0. \qquad (2.27)$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши (2.26) – (2.27) для ОДУ**

Общее решение однородного линейного уравнения (2.26) имеет вид:

$$U_{\text{оо}}(\xi,\eta;t) = c(\xi,\eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}, \qquad \xi,\ \eta\in(-\infty,\ +\infty).$$

а из начального условия (2.27) получаем, что коэффициент $c(\xi,\eta)$ равен $\Phi(\xi,\eta)$, откуда

$$U(\xi,\eta;t) = \Phi(\xi,\eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}. \qquad (2.28)$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (2.28) обратное sin-преобразование Фурье (2.8). Получим

$$\begin{aligned} u(x,y;t) &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i\xi x} \sin(\eta y) U(\xi,\eta;t)d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i\xi x} \sin(\eta y)\Phi(\xi,\eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t} d\xi d\eta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i\xi x} \sin(\eta y)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i(\xi z)} \sin(\eta s)\varphi(z,\ s)dsdz\right)\ d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s)dzds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{i(x-z)\xi} e^{-a^2\xi^2 t} \cdot \sin(\eta y)\sin(\eta s) e^{-a^2\eta^2 t} d\xi d\eta =$$

$$= \left[\text{в силу } \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s)dsdz \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-z)\xi} e^{-a^2\xi^2 t} d\xi \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\cos\big((y-s)\eta\big) - \cos\big((y+s)\eta\big)\Big) e^{-a^2\eta^2 t} d\eta =$$

$$= \Big[\text{в силу четности функций } \cos\big((y \pm s)\eta\big) \text{ и } e^{-a^2\eta^2 t} \text{ по переменной } \eta,$$

$$\text{а также четности функций } e^{-a^2\xi^2 t} \text{ по переменной } \xi\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s)dsdz \int\limits_{0}^{+\infty} \cos\big((x-z)\xi\big) e^{-a^2\xi^2 t} d\xi \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\cos\big((y-s)\eta\big) - \cos\big((y+s)\eta\big)\Big) e^{-a^2\eta^2 t} d\eta =$$

$$= \Big[\text{по формуле (1.7) с } \quad p = a\sqrt{t} \quad \text{ и } \quad q = x - z, \quad \text{ либо } q = y \pm s\Big] =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s)\ \frac{\pi}{4a^2 t}\ e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2 t}} \ \left(e^{-\frac{(y-s)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(y+s)^2}{4a^2 t}}\right) dsdz =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s)\ \left(e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x-z)^2+(y+s)^2}{4a^2 t}}\right) dsdz.$$

**Ответ:** $u = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s)\ \left(e^{-\frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x-z)^2+(y+s)^2}{4a^2 t}}\right) dsdz.$

**№ 825.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2\,(u_{xx} + u_{yy}) = 0, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y > 0,\ \ t > 0, \qquad (2.29)$$

$$u(x,0;t) = \mu(x;t), \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t \in (0,\ +\infty). \qquad (2.30)$$

$$u(x,y;0) = 0, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty). \qquad (2.31)$$

**Шаг 1. Применение** $\sin$**-ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, а краевое условие первого рода, в соответствии с правилом, применяем $\sin$-ПФ (2.7) – по пространственным переменным $(x,\ y)$ к равенствам (2.29) – (2.31).

Пусть

$$U(\xi,\ \eta,\ t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \sin(\eta y) u(x,\ y,\ t) dy dx.$$

При действии $\sin$-ПФ на $u_t$ получим, очевидно, $U_t$, а при действии на $u_{xx}$, как при обычном ПФ, получим $-\xi^2 U$. Воспользуемся формулой (2.10) (стр. 22):

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \sin(\eta y) u_{yy}(x,\ y,\ t) dy dx =$$

$$= \frac{\eta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u(x,\ 0,\ t)\, dx - \eta^2\, U(\xi,\ \eta,\ t). \quad (2.32)$$

С учетом, что в данном примере $u(x,\ 0,\ t) = \mu(x; t)$, окончательно получаем:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \sin(\eta y) u_{yy}(x,\ y,\ t) dy dx =$$

$$= \frac{\eta}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \mu(x,\ t)\, dx - \eta^2\, U(\xi,\ \eta,\ t) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \eta\, \widehat{\mu} - \eta^2\, U(\xi,\ \eta,\ t).$$

Итак, результатом действия $\sin$-ПФ на (2.29) – (2.31) будет задача:

$$U_t(\xi, \eta; t) + a^2 \left(\xi^2 + \eta^2\right) U(\xi, \eta; t) = a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \eta\, \widehat{\mu}, \qquad \xi \in \mathbb{R},\quad \eta > 0,\quad t > 0, \quad (2.33)$$

$$U(\xi, \eta; 0) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R},\quad \eta > 0. \quad (2.34)$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (2.33) – (2.34) **для ОДУ**

Общее решение однородного линейного уравнения (2.33) имеет вид:

$$U_{\text{оо}}(\xi, \eta; t) = c(\xi, \eta)\, e^{-a^2\left(\xi^2 + \eta^2\right) t}, \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty),$$

поэтому МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ «ПОСТОЯННОЙ» $c(\xi,\eta)$ получаем,

$$U_{\text{оно}}(\xi,\eta;t)=c(\xi,\eta;\,t)\;e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t},\qquad \xi,\ \eta\in(-\infty,\ +\infty),\tag{2.35}$$

откуда для $c(\xi,\eta;\,t)$, подставив искомый вид решения (2.35) в уравнение (2.33), получаем условие:

$$c_t(\xi,\eta;\,t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\eta\,\widehat{\mu}\;e^{a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}.$$

Зная производную $c_t$, найдем $c$:

$$c(\xi,\eta;\,t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\eta\int\limits_0^t\widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\;e^{a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)\tau}d\tau+c_1(\xi,\eta).$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (2.33) имеет вид:

$$U_{\text{оно}}(\xi,\eta;t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\eta\int\limits_0^t\widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\;e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}d\tau+$$
$$+\,c_1(\xi,\eta)\;e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}.\tag{2.36}$$

Используя начальное условие (2.34), находим $c_1(\xi,\eta)\equiv 0$, откуда, наконец получаем решение задачи Коши (2.33) – (2.34):

$$U(\xi,\eta;t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\eta\int\limits_0^t\widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\;e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}d\tau.\tag{2.37}$$

Перепишем это выражение при помощи определения $\widehat{\mu}$:

$$U(\xi,\eta;t)=a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\eta\int\limits_0^t\widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\;e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}d\tau\equiv$$
$$\equiv a^2\frac{\eta}{\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x}\mu(x,\ \tau)\;e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}dxd\tau.\tag{2.38}$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (2.38) обратное sin-преобразование Фурье (2.8). Получим

$$u(x,y;t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}e^{i\xi x}\sin(\eta y)U(\xi,\eta;t)d\xi d\eta=$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{i\xi x}\sin(\eta y)\left(a^2\frac{\eta}{\pi}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi z)}\mu(z;\,\tau)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}dzd\tau\right)d\xi d\eta =$$

$$= \frac{a^2}{\pi^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\,\tau)\ dzd\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{i(x-z)\xi}e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}\cdot\eta\cdot\sin(\eta y)d\xi d\eta =$$

$$= \frac{a^2}{\pi^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\,\tau)\ dzd\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-z)\xi}e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\xi\cdot\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a^2\eta^2(t-\tau)}\cdot\eta\cdot\sin(\eta y)d\eta =$$

$$= \left[\text{в силу четности функции } e^{-a^2\xi^2 t} \text{ по переменной } \xi\right] =$$

$$= \frac{2a^2}{\pi^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\,\tau)dzd\tau\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\big((x-z)\xi\big)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\xi\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a^2\eta^2(t-\tau)}\eta\sin(\eta y)d\eta =$$

$$= \Big[\text{по формуле (1.7) с} \quad p = a\sqrt{t-\tau} \quad \text{и} \quad q = x-z$$

$$\text{и возьмем по частям последний интеграл}\Big] =$$

$$= \frac{2a^2}{\pi^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\,\tau)\ \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\ e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\times$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{2a^2(t-\tau)}\right)\left(\underbrace{e^{-a^2\eta^2(t-\tau)}\ \sin(\eta y)\Big|_{\eta=0}^{\eta=\infty}}_{=0} - y\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-a^2\eta^2(t-\tau)}\cos(\eta y)d\eta\right)dzd\tau =$$

$$= \left[\text{по формуле (1.7) с} \quad p = a\sqrt{t-\tau} \quad \text{и} \quad q = y\right] =$$

$$= \frac{y}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a}\right)^2\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(z;\,\tau)}{(t-\tau)^2}\ e^{-\frac{(x-z)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\ dzd\tau =$$

$$= \frac{y}{4\pi a^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(z;\,\tau)}{(t-\tau)^2}\ e^{-\frac{(x-z)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\ dzd\tau.$$

**Ответ:** $\quad u(x,t) = \frac{y}{4\pi a^2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(z;\,\tau)}{(t-\tau)^2}\ e^{-\frac{(x-z)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\ dzd\tau.$

**№ 826.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0, \quad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty),\ \ t > 0, \qquad (2.39)$$

$$u_y(x,0;t) = 0, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty), \qquad (2.40)$$

$$u(x,y;0) = \varphi(x,y), \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty). \qquad (2.41)$$

**Шаг 1. Применение cos-ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, а краевое условие второго рода, в соответствии с правилом, применяем cos-ПФ (2.7) – по пространственным переменным $(x,\ y)$ к равенствам (2.39) – (2.41).

Пусть

$$U(\xi,\ \eta,\ t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)u(x,\ y,\ t)dydx,$$

$$\Phi(\xi,\ \eta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)\varphi(x,\ y)dydx.$$

При действии cos-ПФ на $u_t$ получим, очевидно, $U_t$, а при действии на $u_{xx}$, как при обычном ПФ, получим $-\xi^2 U$. Чтобы выяснить, в какое равенство перейдет уравнение (2.39), осталось применить формулу (2.11) (стр. 22) – результат действия cos-ПФ на $u_{yy}$, и учесть, что в данном примере $u_y(x,\ 0,\ t) = 0$. Окончательно получаем:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x}\cos(\eta y)u_{yy}(x,\ y,\ t)dydx = -\eta^2 U(\xi,\ \eta,\ t).$$

Итак, результатом действия cos-ПФ на (2.39) – (2.41) будет задача:

$$U_t(\xi,\eta;t) + a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)U(\xi,\eta;t) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R},\ \ \eta > 0,\ \ t > 0, \qquad (2.42)$$

$$U(\xi,\eta;0) = \Phi(\xi,\eta), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ \ \eta > 0. \qquad (2.43)$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (2.42) – (2.43) **для ОДУ**

Общее решение однородного линейного уравнения (2.42) имеет вид:

$$U_{\text{оо}}(\xi,\eta;t) = c(\xi,\eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}, \qquad \xi,\ \eta \in (-\infty,\ +\infty).$$

а из начального условия (2.43) получаем, что коэффициент $c(\xi,\eta)$ равен $\Phi(\xi,\eta)$, откуда

$$U(\xi,\eta;t) = \Phi(\xi,\eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}. \qquad (2.44)$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (2.44) обратное cos-преобразование Фурье (2.8). Получим

$$u(x,y;t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i\xi x}\cos(\eta y)U(\xi,\eta;t)d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i\xi x}\cos(\eta y)\Phi(\xi,\eta)\; e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i\xi x}\cos(\eta y)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-i(\xi z)}\cos(\eta s)\varphi(z,\ s)dsdz\right)e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}d\xi d\eta=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(z,\ s)dzds\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{i(x-z)\xi}e^{-a^2\xi^2 t}\cdot\cos(\eta y)\cos(\eta s)e^{-a^2\eta^2 t}d\xi d\eta=$$

$$=\left[\text{в силу }\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\Big)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(z,\ s)dsdz\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(x-z)\xi}e^{-a^2\xi^2 t}d\xi\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\cos\big((y-s)\eta\big)+\cos\big((y+s)\eta\big)\Big)e^{-a^2\eta^2 t}d\eta=$$

$$=\Big[\text{в силу четности функций }\ \cos\big((y\pm s)\eta\big)\ \text{и}\ e^{-a^2\eta^2 t}\ \text{по переменной}\ \eta,$$

$$\text{а также четности функций}\ e^{-a^2\xi^2 t}\ \text{по переменной}\ \xi\Big]=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(z,\ s)dsdz\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\big((x-z)\xi\big)e^{-a^2\xi^2 t}d\xi\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{+\infty}\Big(\cos\big((y-s)\eta\big)+\cos\big((y+s)\eta\big)\Big)e^{-a^2\eta^2 t}d\eta=$$

$$=\Big[\text{по формуле (1.7) с}\quad p=a\sqrt{t}\quad\text{и}\quad q=x-z,\quad\text{либо}\ q=y\pm s\Big]=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(z,\ s)\ \frac{\pi}{4a^2t}\ e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2t}}\ \left(e^{-\frac{(y-s)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(y+s)^2}{4a^2t}}\right)dsdz=$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s)\ \left( e^{-\ \frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2t}} + e^{-\ \frac{(x-z)^2+(y+s)^2}{4a^2t}} \right) dsdz.$$

**Ответ:** $u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(z,\ s) \left( e^{-\ \frac{(x-z)^2+(y-s)^2}{4a^2t}} + e^{-\ \frac{(x-z)^2+(y+s)^2}{4a^2t}} \right) dsdz.$

**№ 827.**

*Пользуясь интегральным преобразованием Фурье, решить задачу:*

$$u_t - a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 0, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y > 0,\ \ t > 0, \tag{2.45}$$

$$u_y(x, 0; t) = \mu(x; t), \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ t \in (0,\ +\infty). \tag{2.46}$$

$$u(x, y; 0) = 0, \qquad x \in (-\infty,\ +\infty),\ \ y \in (0,\ +\infty). \tag{2.47}$$

**Шаг 1. Применение cos-ПФ**

Поскольку задача рассматривается на полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, а краевое условие второго рода, в соответствии с правилом, применяем cos-ПФ (2.7) – по пространственным переменным $(x,\ y)$ к равенствам (2.45) – (2.47).

Пусть

$$U(\xi,\ \eta,\ t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \cos(\eta y) u(x,\ y,\ t) dy dx.$$

При действии cos-ПФ на $u_t$ получим, очевидно, $U_t$, а при действии на $u_{xx}$, как при обычном ПФ, получим $-\xi^2 U$. Воспользуемся формулой (2.11) (стр. 22):

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \cos(\eta y) u_{yy}(x,\ y,\ t) dy dx =$$

$$= -\ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} u_y(x,\ 0,\ t)\, dx - \eta^2\, U(\xi,\ \eta,\ t). \tag{2.48}$$

С учетом, что в данном примере $u_y(x,\ 0,\ t) = \mu(x,t)$, окончательно получаем:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-i\xi x} \cos(\eta y) u_{yy}(x,\ y,\ t) dy dx =$$

$$= -\ \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} \mu(x,\ t)\, dx - \eta^2\, U(\xi,\ \eta,\ t) \equiv -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \ \widehat{\mu} - \eta^2\, U(\xi,\ \eta,\ t).$$

Итак, результатом действия cos-ПФ на (2.45) – (2.47) будет задача:

$$U_t(\xi,\eta;t) + a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)U(\xi,\eta;t) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \widehat{\mu}, \qquad \xi\in\mathbb{R},\ \ \eta>0,\ \ t>0, \tag{2.49}$$

$$U(\xi,\eta;0) = 0, \qquad \xi\in\mathbb{R},\ \ \eta>0. \tag{2.50}$$

**Шаг 2. Решение задачи Коши** (2.49) – (2.50) **для ОДУ**

Общее решение однородного линейного уравнения (2.49) имеет вид:

$$U_{\text{оо}}(\xi,\eta;t) = c(\xi,\eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}, \qquad \xi,\ \eta\in(-\infty,\ +\infty),$$

поэтому МЕТОДОМ ВАРИАЦИИ «ПОСТОЯННОЙ» $c(\xi,\eta)$ получаем

$$U_{\text{оно}}(\xi,\eta;t) = c(\xi,\eta;\ t)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}, \qquad \xi,\ \eta\in(-\infty,\ +\infty). \tag{2.51}$$

откуда для $c(\xi,\eta;\ t)$, подставив искомый вид решения (2.51) в уравнение (2.49), получаем условие

$$c_t(\xi,\eta;\ t) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \widehat{\mu}\ e^{a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}.$$

Зная производную $c_t$, найдем $c$:

$$c(\xi,\eta;\ t) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int\limits_0^t \widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\ e^{a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)\tau}d\tau + c_1(\xi,\eta).$$

Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (2.49) имеет вид:

$$U_{\text{оно}}(\xi,\eta;t) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int\limits_0^t \widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}d\tau + \\ + c_1(\xi,\eta)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)t}. \tag{2.52}$$

Используя начальное условие (2.50), находим $c_1(\xi,\eta)\equiv 0$, откуда, наконец получаем решение задачи Коши (2.49) – (2.50):

$$U(\xi,\eta,t) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \int\limits_0^t \widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}d\tau. \tag{2.53}$$

Перепишем это выражение при помощи определения $\widehat{\mu}$:

$$U(\xi,\eta;t) = -a^2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^t \widehat{\mu}(\xi,\ \tau)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}d\tau \equiv$$

$$\equiv -\ \frac{a^2}{\pi} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x}\mu(x,\ \tau)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}dxd\tau. \quad (2.54)$$

**Шаг 3. Обратное преобразование Фурье**

Применим к (2.54) обратное cos-преобразование Фурье (2.8). Получим

$$u(x,y;t) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{i\xi x}\cos(\eta y)U(\xi,\eta;t)d\xi d\eta = \frac{1}{\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{i\xi x}\cos(\eta y)\left(-\ \frac{a^2}{\pi} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\xi z)}\mu(z;\ \tau)\ e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}dzd\tau\right) d\xi d\eta =$$

$$= -\ \frac{a^2}{\pi^2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\ \tau)\ dzd\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{i(x-z)\xi}e^{-a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)(t-\tau)}\cdot\cos(\eta y)d\xi d\eta =$$

$$= -\ \frac{a^2}{\pi^2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\ \tau)\ dzd\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-z)\xi}e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\xi \int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\eta^2(t-\tau)}\cdot\cos(\eta y)d\eta =$$

$$= \left[\text{в силу четности функции } e^{-a^2\xi^2 t} \text{ по переменной } \xi\right] = -\ \frac{2a^2}{\pi^2}\times$$

$$\times\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\ \tau)\ dzd\tau \int\limits_0^{+\infty}\cos\left((x-z)\xi\right)e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\xi \int\limits_0^{+\infty} e^{-a^2\eta^2(t-\tau)}\cdot\cos(\eta y)d\eta =$$

$$= \left[\text{по формуле (1.7) с} \quad p = a\sqrt{t-\tau} \quad \text{и} \quad q = x-z, \quad \text{либо} \quad q = y\right] =$$

$$= -\ \frac{2a^2}{\pi^2}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mu(z;\ \tau)\ \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{(x-z)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{y^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)dzd\tau =$$

$$= -\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(z;\ \tau)}{t-\tau}\ e^{-\frac{(x-z)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\ dzd\tau.$$

**Ответ:** $\qquad u(x,t) = -\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(z;\tau)}{t-\tau}\ e^{-\frac{(x-z)^2+y^2}{4a^2(t-\tau)}}\ dzd\tau.$

## 3. Фундаментальное решение уравнения Лапласа

### 3.1. Оператор Лапласа в криволинейных координатах

Нам понадобятся для дальнейшего рассмотрения цилиндрические координаты:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi; \\ x_2 = r\sin\varphi; \\ x_3 = z, \end{cases} \tag{3.1}$$

а также сферические координаты, задаваемые соотношениями

$$\begin{cases} x_2 = r\sin\theta\cos\varphi; \\ x_2 = r\sin\theta\sin\varphi; \\ x_3 = r\cos\theta. \end{cases} \tag{3.2}$$

Приведем вид оператора Лапласа в этих системах координат.

В цилиндрических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{3.3}$$

В сферических координатах:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}. \tag{3.4}$$

*Фудаментальным решением* уравнения Лапласа называется решение, зависящее только от $r$. (Более точное определение будет дано ниже.) Поэтому будем искать функцию вида $u = u(r)$ – решение уравнения

$$\Delta u = 0. \tag{3.5}$$

Но для случая, когда искомая функция зависит только от $r$, оператор Лапласа принимает более простой вид, вид, который мы можем легко получить и в $n$-мерном случае.
В самом деле, для $u = u(r)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_k} = u_r\cdot r_{x_k},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_r\cdot r_{x_k}\right) = u_{rr}\cdot r_{x_k}^2 + u_r\cdot r_{x_k x_k},$$

$$\Delta u(r) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = u_{rr}\cdot\sum_{k=1}^{n} r_{x_k}^2 + u_r\cdot\sum_{k=1}^{n} r_{x_k x_k}. \tag{i}$$

Посчитаем $\sum\limits_{k=1}^{n} r_{x_k}^2 \equiv \nabla r \cdot \nabla r$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} r_{x_k x_k} \equiv \Delta r$. Так как $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2 + \ldots + x_n^2}$, то

$$r_{x_k} = \frac{x_k}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_k}{r}, \qquad r_{x_k x_k} = \frac{r - x_k \cdot \frac{x_k}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x_k^2}{r^3}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} r_{x_k}^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{r^2} = 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} r_{x_k x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r^2 - x_k^2}{r^3} = \frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{n-1}{r}.$$

Подставим полученные выражения в (i) и получим представление оператора Лапласа в $n$-мерном пространстве от функции $u(r)$:

$$\Delta u(r) = u_{rr} + \frac{n-1}{r} \cdot u_r \equiv \frac{1}{r^{n-1}} \left( r^{n-1} u_r \right)_r, \qquad n \geqslant 2. \tag{3.6}$$

### 3.2. Двумерный случай

Задачи на плоскости можно рассматривать как частный случай задач в трехмерном пространстве, когда искомое решение не зависит от $x_3 = z$. Тогда оно является **цилиндрически симметричным**, и задачу естественно рассматривать в цилиндрических координатах. Уравнение Лапласа (3.5) с учетом вида оператора Лапласа (3.6) для функции $u = u(r)$ вырождается в этом случае в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\Delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( r \cdot \frac{du}{dr} \right) = 0. \tag{3.7}$$

Домножим его на $r$, проинтегрируем обе части и получим:

$$r \cdot \frac{du}{dr} = c_1, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{dr} = \frac{c_1}{r}.$$

Еще раз проинтегрируем и получим общее решение уравнения Лапласа, обладающее цилиндрической симметрией:

$$u = c_1 \ln r + c_2. \tag{3.8}$$

Главной частью здесь безусловно является первое слагаемое: $c_1 \ln r$, так как константа всегда является решением уравнения Лапласа и не несет никакой информации. Чтобы не таскать с собой произвольную константу $c_1$, надо сразу договориться о ее значении[1].

**Опр. 3.1. Фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости** называется функция:

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \ln r, \qquad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \tag{3.9}$$

[1] В разных книгах значение $c_1$ выбирается по-разному, исходя из удобства изложения и личных предпочтений авторов. Мы будем пользоваться обозначениями, принятыми на лекциях.

### 3.3. Трехмерный случай

В сферических координатах уравнение (3.5) с учетом вида оператора Лапласа (3.6) для функции $u = u(r)$ также вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^2 \cdot \frac{du}{dr} \right) = 0. \tag{3.10}$$

Домножим его на $r^2$, проинтегрируем обе части и получим:

$$r^2 \cdot \frac{du}{dr} = c_1, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{dr} = \frac{c_1}{r^2}.$$

Еще раз проинтегрируем и получим общее решение уравнения Лапласа, обладающее сферической симметрией:

$$u = \frac{-c_1}{r} + c_2. \tag{3.11}$$

Главной частью здесь также является первое слагаемое: $\frac{-c_1}{r}$. Договоримся о значении константы[1] $c_1 = \frac{1}{4\pi}$.

**Опр. 3.2. Фундаментальным решением уравнения Лапласа в трехмерном пространстве** называется функция:

$$E(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4\pi\, r}, \qquad r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{3.12}$$

С этой функцией связано еще одно важное понятие.

**Опр. 3.3. Ньютоновым потенциалом** называется функция:

$$E_N(x_1, x_2, x_3) = -4\pi E(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|x|}. \tag{3.13}$$

**Физический смысл Ньютонова потенциала.**
Пусть в точке $(0,\ 0,\ 0)$ сосредоточен заряд $\mu$. Тогда в точке $(x_1, x_2, x_3)$ этот заряд создает поле, потенциал которого равен

$$u(x_1, x_2, x_3) = \mu E_N(x_1, x_2, x_3). \tag{3.14}$$

### 3.4. $n$-мерный случай

Уравнение (3.5) с учетом вида оператора Лапласа (3.6) для функции $u = u(r)$ и в этом случае вырождается в обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \frac{d}{dr} \left( r^{n-1} \cdot \frac{du}{dr} \right) = 0. \tag{3.15}$$

[1] См. предыдущую сноску.

Домножим его на $r^{n-1}$, проинтегрируем обе части и получим:

$$r^{n-1}\cdot\frac{du}{dr}=c_1,\qquad\Longrightarrow\qquad\frac{du}{dr}=\frac{c_1}{r^{n-1}}.\tag{3.16}$$

Еще раз проинтегрируем и получим общее решение уравнения Лапласа, обладающее сферической симметрией:

$$u=\frac{-c_1}{(n-2)r^{n-2}}+c_2.\tag{3.17}$$

Главной частью здесь также является первое слагаемое: $\frac{-c_1}{(n-2)r^{n-2}}$. Договоримся о значении константы $c_1=\frac{1}{\omega_n}$, где $\omega_n$ – площадь единичной сферы[1] в $n$-мерном пространстве:

$$\omega_n=\frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},\qquad\text{в частности,}\qquad\omega_2=2\pi,\quad\omega_3=4\pi.\tag{3.18}$$

Здесь $\Gamma(t)$ – Гамма-функция Эйлера и

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{(n-2)!!}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}\sqrt{\pi}.$$

Как и в двух- и трехмерном случаях, приходим к определению:

**Опр. 3.4. Фундаментальным решением уравнения Лапласа в $n$-мерном пространстве** называется функция:

$$E(x)=E(x_1,\,\ldots,\,x_n)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\,\ln|x|, & \text{при}\ \ n=2;\\ -\frac{1}{\omega_n\,(n-2)\,|x|^{n-2}}, & \text{при}\ \ n\geqslant 3.\end{cases}\tag{3.19}$$

Несколько обобщим данное определение, учитывая, что радиус-вектор $\vec{r}$ можно проводить в точку $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ не только из начала координат, а из любой точки $\xi=(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$. Тогда аналогичными рассуждениями мы придем к определению:

**Опр. 3.5. Фундаментальным (элементарным) решением уравнения Лапласа в $n$-мерном пространстве** называется функция:

$$E(x,\ \xi)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\,\ln|\xi-x|, & \text{при}\ \ n=2;\\ -\frac{1}{\omega_n\,(n-2)\,|\xi-x|^{n-2}}, & \text{при}\ \ n\geqslant 3.\end{cases}\tag{3.20}$$

[1] В некоторых книгах площадь единичной сферы в $n$-мерном пространстве обозначают $\omega_{n-1}$, поскольку она является, с топологической точки зрения, многобразием порядка $n-1$.

**Теорема 3.1.**
*Фундаментальное решение* (3.19) *уравнения Лапласа удовлетворяет равенству*
$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n\, r^{n-1}}, \qquad n \geqslant 2. \tag{3.21}$$

*Доказательство.* В силу равенства
$$\frac{du}{dr} = \frac{c_1}{r^{n-1}}, \tag{3.16}$$
которому должно удовлетворять фундаментальное решение с константой $c_1 = \frac{1}{\omega_n}$, мы сразу получаем доказываемое утверждение. □

### 3.5. Примеры решения задач

#### № 184. Поле диполя.

**Опр. 3.6. Диполем** в трехмерном пространстве называется пара одинаковых по модулю и противоположных по знаку зарядов $\pm\mu$, расположенных на «малом» расстоянии $\Delta l$ друг от друга.
При этом величина $\mu\Delta l$ называется **моментом диполя**, а единичный вектор $\vec{l}$, направленный вдоль прямой, содержащей диполь, от отрицательного заряда к положительному, является **направляющим вектором оси диполя**.

*Найти потенциал поля, образованного диполем (с центром в точке* $M^0(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)$*, моментом* $\mu\Delta l$ *и направляющим вектором оси диполя* $\vec{l}$*), в точке* $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$*, удаленной от диполя.*

#### Шаг 1. Применение Ньютонова потенциала

Пусть в точке $M\,'$ засположен заряд $(+\mu)$ нашего диполя, а в точке $M\,''$ – заряд $(-\mu)$. Тогда вектор $\vec{l}$ имеет вид
$$\vec{l} = \frac{M\,' - M\,''}{|M\,' - M\,''|} = \frac{M\,' - M\,''}{\Delta l}, \tag{3.22}$$
а точка $M^0$ – есть середина отрезка $[M\,',\ M\,'']$.
Найдем потенциал заряда $(+\mu)$ в точке $M$ по формуле (3.14):
$$u_+(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{\mu}{|M - M\,'|} = \frac{\mu}{r\,'}.$$
Аналогично, потенциал $(-\mu)$, соответственно, равен
$$u_-(x_1,\, x_2,\, x_3) = -\,\frac{\mu}{|M - M\,''|} = -\,\frac{\mu}{r\,''},$$

и потенциал всего диполя в точке $M$

$$u(x_1,\, x_2,\, x_3) = \frac{\mu}{r\,'} - \frac{\mu}{r\,''} = \mu \cdot \frac{r\,'' - r\,'}{r\,'r\,''}. \qquad (3.23)$$

**<u>Шаг 2. Аналитический способ</u>**

Учитывая, что расстоянии $\Delta l = |M\,'' - M\,'|$ пренебрежимо мало по сравнению с расстояниями $r = |M - M^0|$, $r\,' = |M - M\,'|$ и $r\,'' = |M\,'' - M|$, по теореме о конечных приращениях можно сделать вывод, что

$$\frac{1}{r\,'} - \frac{1}{r\,''} \approx \frac{d}{d\vec{l}} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \Delta l.$$

Вспоминая, что $\frac{df}{d\vec{l}} = \left(\operatorname{grad} f,\ \vec{l}\right)$, а в сферических координатах

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \mathbf{e}_r + \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r \sin\theta},$$

и учитывая, что в нашем случае функция $f$ имеет вид $f = \frac{1}{r}$, то есть зависит только от $r$, находим:
сначала градиент

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{e}_r = -\,\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r},$$

(где вектор $\vec{r}$ направлен **из** точки $M$ в центр диполя),
затем производную по направлению

$$\frac{df}{d\vec{l}} = \left(\operatorname{grad} f,\ \vec{l}\right) = -\,\frac{1}{r^2} \cdot \frac{(\vec{r},\ \vec{l})}{r} = \frac{\cos\left(-\vec{r},\ \vec{l}\right)}{r^2},$$

и, наконец, потенциал диполя

$$u = \frac{\mu}{r\,'} - \frac{\mu}{r\,''} \approx \mu \cdot \frac{d}{d\vec{l}} \left(\frac{1}{r}\right) \cdot \Delta l = \mu \Delta l \cdot \frac{\cos\left(-\vec{r},\ \vec{l}\right)}{r^2}.$$

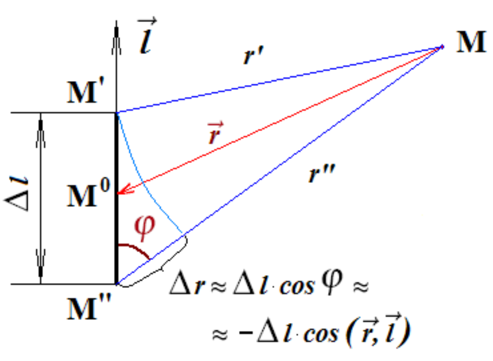
**<u>Шаг 2. Геометрический способ</u>**

Если полагать, что $|M - M^0| >> \Delta l$, то числитель $\Delta r$ выражения

$$\frac{r\,'' - r\,'}{r\,'r\,''},$$

входящего в формулу (3.23), можно приближенно считать равным выражению

$$\Delta r \approx \Delta l \cos\varphi \approx \Delta l \cos\left(-\vec{r},\ \vec{l}\right).$$



С другой стороны, знаменатель $r'r'' \approx r^2$.
Поэтому все выражение для вычисления потенциала диполя в точке $M$ находится по формуле

$$u = \mu \cdot \frac{r'' - r'}{r'r''} \approx \mu \cdot \frac{\Delta r}{r^2} \approx \mu \Delta l \cdot \frac{\cos\left(-\vec{r},\ \vec{l}\right)}{r^2}.$$

**Шаг 3. Переобозначение**

Более естественно рассматривать не вектор $\vec{r} = \overrightarrow{M\,M^0}$, а наоборот: $\vec{r} = \overrightarrow{M^0\,M}$. Ведь у нас задан диполь с конкретным положением в пространстве, а точка $M$ произвольно перемещается по пространству. Поэтому переобозначим вектор $\vec{r} = \overrightarrow{M^0\,M}$.

**Ответ:**

$$u = \mu \Delta l \cdot \frac{d}{d\vec{l}}\left(\frac{1}{r}\right) = \mu \Delta l \cdot \frac{\cos\left(\vec{r},\ \vec{l}\right)}{r^2}, \tag{3.24}$$

где $\mu\Delta l$ – дипольный момент, $\vec{l}$ – направляющий вектор оси диполя, а вектор $\vec{r} = \overrightarrow{M^0\,M}$ – радиус-вектор произвольной (достаточно удаленной) точки $M$ пространства относительно центра диполя $M^0$.

### № 185. Поле системы зарядов.

*Найти потенциал поля, образованного конечной системой зарядов $\mu_k$ $\left(k = \overline{1,\ n}\right)$, расположенных в точках $M^k(x_1^k,\ x_2^k,\ x_3^k)$, в точке $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$, отличной от $M^k$.*

Найдем потенциал заряда $\mu_k$ в точке $M$ по формуле (3.14):

$$u_k(x_1,\ x_2,\ x_3) = \frac{\mu_k}{|M - M^k|} = \frac{\mu}{r^k}.$$

Тогда потенциал всей системы зарядов $\mu_k$ равен

$$u(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{|M - M^k|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{r^k}.$$

**Ответ:**

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{|M - M^k|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{r^k}.$$

### № 186. Поле заряженной сферы.

*Плотность зарядов, расположенных на сфере с центром в точке $M^0$ радиуса $R$ постоянна и равна $C$. Найти потенциал поля, созданного этими зарядами в центре сферы.*

По формуле (3.14), потенциал поля, созданного площадкой $dS$ сферы в точке $M^0$ равен $\frac{CdS}{R}$. Поэтому, чтобы найти потенциал всей сферы, надо проинтегрировать это выражение по сфере:

$$u(M^0) = \int\limits_S \frac{CdS}{R} = \frac{C}{R}\int\limits_S dS = \frac{C}{R}\cdot 4\pi R^2 = 4\pi CR.$$

**Ответ:** $\quad u(M^0) = 4\pi CR.$

### № 187. Поле заряженной кривой.

*На пространственной кривой $L$, параметрически заданной равенствами*

$$\xi_1 = \xi_1(t), \qquad \xi_2 = \xi_2(t), \qquad \xi_3 = \xi_3(t); \qquad t \in [t_0,\ t_1],$$

*распределены заряды с непрерывной линейной плотностью $\mu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$. Найти потенциал поля, созданного этими зарядами в произвольной точке пространства $M(x_1,\ x_2,\ x_3) \notin L$.*

По формуле (3.14), потенциал поля, созданного дугой $dl$ кривой в точке $M$ равен $\frac{\mu(\xi_1,\,\xi_2,\,\xi_3)dl}{|x-\xi|}$. Поэтому, чтобы найти потенциал всей кривой, надо проинтегрировать это выражение по L:

$$u(M) = \int\limits_L \frac{\mu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)dl}{|x-\xi|} = \left[dl = \sqrt{\big(\xi_1'(t)\big)^2 + \big(\xi_2'(t)\big)^2 + \big(\xi_3'(t)\big)^2}\, dt\right] =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\mu(\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \xi_3(t))\sqrt{\big(\xi_1'(t)\big)^2 + \big(\xi_2'(t)\big)^2 + \big(\xi_3'(t)\big)^2}\, dt}{\sqrt{\big(x_1-\xi_1(t)\big)^2 + \big(x_2-\xi_2(t)\big)^2 + \big(x_3-\xi_3(t)\big)^2}}.$$

**Ответ:** $\quad u(M) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\mu(\xi_1(t),\,\xi_2(t),\,\xi_3(t))\sqrt{\big(\xi_1'(t)\big)^2+\big(\xi_2'(t)\big)^2+\big(\xi_3'(t)\big)^2}\, dt}{\sqrt{\big(x_1-\xi_1(t)\big)^2+\big(x_2-\xi_2(t)\big)^2+\big(x_3-\xi_3(t)\big)^2}}.$

### № I. Поле двойной сферы.

*Две концентрические сферы с малой разностью радиусов $R - R' = \Delta l$ заряжены внутренняя – положительными зарядами, внешняя – отрицательными. При этом образуется «двойная» сфера с плотностью дипольного момента $\nu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = \mu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\Delta l$. Найти потенциал поля, создаваемого этой двойной сферой в точке $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$, удаленной от ее поверхности.*

Воспользуемся результатом № 184, чтобы выписать потенциал в точке $M$, создаваемый элементом площади сферы $dS$. Так как дипольный момент этого элемента равен $\mu\Delta l\, dS = \nu\, dS$, по формуле (3.24) получаем:

$$du = \nu\cdot\frac{d}{d\vec{l}}\left(\frac{1}{r}\right)\, dS = \nu\cdot\frac{\cos\left(\vec{r},\ \vec{l}\right)}{r^2}\, dS,$$

где $\vec{l}$ – единичный вектор от центра сферы в точку сферы $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, а $\vec{r}$ – вектор из $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ в точку $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$. С учетом, что вектор $\vec{l}$ совпадает с вектором единичной нормали к поверхности, полученная формула переписывается в виде:

$$du = \nu \cdot \frac{d}{d\vec{n}} \left(\frac{1}{r}\right) dS = \nu \cdot \frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r^2}\, dS.$$

Нам осталось только проинтегрировать ее по сфере, и мы получим зачение «потенциала двойного слоя»:

$$u(M) = \int\limits_S \nu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\, \frac{d}{d\vec{n}} \left(\frac{1}{r}\right) dS = \int\limits_S \nu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\, \frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r^2}\, dS.$$

**Ответ:** $\quad u(M) = \int\limits_S \nu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\, \frac{d}{d\vec{n}} \left(\frac{1}{r}\right) dS = \int\limits_S \nu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)\, \frac{\cos(\vec{r},\ \vec{n})}{r^2}\, dS,$

где $\nu(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ – плотность дипольного момента, $\vec{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности сферы, а $\vec{r}$ – вектор из точки сферы $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ в точку $M(x_1,\ x_2,\ x_3)$.

### № $196^M$. Гармонические функции в шаровом слое.

*В шаровом слое $0 < a < r < b$ найти гармонические функции $u = u(r)$, удовлетворяющие условиям*

$$\Delta u(r) = 0, \qquad u(a) = T, \quad u(b) = U:$$

*а) в двумерном случае; б) в трехмерном случае; в) в $n$-мерном случае.*

## а) Двумерный случай

Общее решение уравнения Лапласа на плоскости вида $u(r)$ дает формула

$$u = c_1 \ln r + c_2. \tag{3.8}$$

Поэтому нам осталось только подобрать $c_1$ и $c_2$ так, чтобы выполнялись краевые условия.

$$\begin{cases} u(a) = T \\ u(b) = U \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} c_1 \ln a + c_2 = T \\ c_1 \ln b + c_2 = U \end{cases} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \ln a & 1 \\ \ln b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\ln b & \ln a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$u(r) = \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} \Big( (T - U) \ln r - T \ln b + U \ln a \Big) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} \Big( (T - U) \cdot 2\pi E(x_1,\ x_2) - T \ln b + U \ln a \Big).$$

### б) Трехмерный случай

Общее решение уравнения Лапласа в пространстве вида $u(r)$ дает формула

$$u = \frac{c_1}{r} + c_2. \tag{3.11}$$

Поэтому нам осталось только подобрать $c_1$ и $c_2$ так, чтобы выполнялись краевые условия.

$$\begin{cases} u(a) = T \\ u(b) = U \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{c_1}{a} + c_2 = T \\ \frac{c_1}{b} + c_2 = U \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ \\ \frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{ab}{b-a} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ -\frac{1}{b} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b-a} \begin{pmatrix} ab & -ab \\ -a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$u(r) = \frac{1}{b-a} \left( \frac{ab(T-U)}{r} - aT + bU \right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{b-a} \Big( -ab(T-U) \cdot 4\pi E(x_1,\, x_2,\, x_3) - aT + bU \Big).$$

### в) $n$-мерный случай ($n \geqslant 3$)

Общее решение уравнения Лапласа в $n$-мерном пространстве вида $u(r)$ дает формула

$$u = -\frac{c_1}{\omega_n\,(n-2)\,r^{n-2}} + c_2 = c_1 E(x_1,\, \ldots,\, x_n) + c_2 = c_1 E(r) + c_2.$$

Подберем $c_1$ и $c_2$ так, чтобы выполнялись краевые условия.

$$\begin{cases} u(a) = T \\ u(b) = U \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 E(a) + c_2 = T \\ c_1 E(b) + c_2 = U \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} E(a) & 1 \\ E(b) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{E(a) - E(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -E(b) & E(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$u(r) = \frac{1}{E(a) - E(b)} \Big( (T-U) \cdot E(r) - TE(b) + UE(a) \Big) \equiv$$

$$\equiv \frac{-\omega_n\,(n-2)\,(ab)^{n-2}}{b^{n-2}-a^{n-2}}\left((T-U)\cdot\frac{-1}{\omega_n\,(n-2)\,r^{n-2}}+\frac{T}{\omega_n\,(n-2)\,b^{n-2}}-\right.$$

$$\left.-\ \frac{U}{\omega_n\,(n-2)\,a^{n-2}}\right)=\frac{1}{b^{n-2}-a^{n-2}}\left((T-U)\cdot\frac{(ab)^{n-2}}{r^{n-2}}-Ta^{n-2}+Ub^{n-2}\right).$$

**<u>Ответ:</u>**

**а)** в двумерном случае $u(r)=\dfrac{1}{\ln\frac{a}{b}}\Big((T-U)\ln r-T\ln b+U\ln a\Big)\equiv$

$$\equiv\frac{1}{\ln\frac{a}{b}}\Big((T-U)\cdot 2\pi E(x_1,\,x_2)-T\ln b+U\ln a\Big);$$

**б)** в трехмерном случае $u(r)=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{ab(T-U)}{r}-aT+bU\right)\equiv$

$$\equiv\frac{1}{b-a}\Big(-ab(T-U)\cdot 4\pi E(x_1,\,x_2,\,x_3)-aT+bU\Big);$$

**в)** в $n$-мерном случае, $n\geqslant 3$

$$u(r)=\frac{1}{E(a)-E(b)}\Big((T-U)\cdot E(r)-TE(b)+UE(a)\Big)=$$

$$=\frac{1}{b^{n-2}-a^{n-2}}\left((T-U)\cdot\frac{(ab)^{n-2}}{r^{n-2}}-Ta^{n-2}+Ub^{n-2}\right).$$

### № $197^M$. Гармонические функции в шаровом слое.

*В шаровом слое $0<a<r<b$ найти гармонические функции $u=u(r)$, удовлетворяющие условиям*

$$\Delta u(r)=0,\qquad u(a)=T,\quad u_r(b)=U:$$

*а) в двумерном случае; б) в трехмерном случае; в) в $n$-мерном случае.*

**<u>а) Двумерный случай</u>**

Общее решение уравнения Лапласа на плоскости вида $u(r)$ дает формула

$$u=c_1\ln r+c_2. \tag{3.8}$$

Поэтому нам осталось только подобрать $c_1$ и $c_2$ так, чтобы выполнялись краевые условия.

$$\begin{cases} u(a) = T \\ u_r(b) = U \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 \ln a + c_2 = T \\ \frac{c_1}{b} = U \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{pmatrix} \ln a & 1 \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{b} & \ln a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ U \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:

$$u(r) = bU \ln r + T - bU \ln a = bU \ln \frac{r}{a} + T.$$

**б) Трехмерный случай**

Общее решение уравнения Лапласа в пространстве вида $u(r)$ дает формула

$$u = \frac{c_1}{r} + c_2. \tag{3.11}$$

Поэтому нам осталось только подобрать $c_1$ и $c_2$ так, чтобы выполнялись краевые условия.

$$\begin{cases} u(a) = T \\ u_r(b) = U \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{c_1}{a} + c_2 = T \\ -\frac{c_1}{b^2} = U \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = -b^2 U \\ c_2 = T + \frac{b^2}{a} U. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$u(r) = -\frac{b^2 U}{r} + T + \frac{b^2 U}{a} \equiv T + b^2 U \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right).$$

**в) $n$-мерный случай ($n \geqslant 3$)**

Общее решение уравнения Лапласа в $n$-мерном пространстве вида $u(r)$ дает формула

$$u = -\frac{c_1}{\omega_n \, (n-2) \, r^{n-2}} + c_2 = c_1 E(x_1, \, \ldots, \, x_n) + c_2 = c_1 E(r) + c_2.$$

Подберем $c_1$ и $c_2$ так, чтобы выполнялись краевые условия. С учетом, что в силу (3.21) и (3.19) выполняется равенство $E_r(r) = -\frac{n-2}{r} E(r)$, получаем:

$$\begin{cases} u(a) = T \\ u_r(b) = U \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 E(a) + c_2 = T \\ -\frac{(n-2)c_1}{b} E(b) = U \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = \frac{-bU}{(n-2)E(b)} \\ c_2 = T + \frac{bUE(a)}{(n-2)E(b)} \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$u(r) = \frac{-bU}{(n-2)E(b)} E(r) + T + \frac{bUE(a)}{(n-2)E(b)} = \frac{bU}{(n-2)E(b)} \Big( E(a) - E(r) \Big) + T.$$

**Ответ:**

**а)** в двумерном случае $u(r) = \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} \Big( (T-U) \ln r - T \ln b + U \ln a \Big) \equiv$

$$\equiv \frac{1}{\ln \frac{a}{b}} \Big( (T-U) \cdot 2\pi E(x_1, \, x_2) - T \ln b + U \ln a \Big);$$

**б)** в трехмерном случае

$$u(r) = -\frac{b^2U}{r} + T + \frac{b^2U}{a} \equiv T + b^2U\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right);$$

**в)** в $n$-мерном случае, $n \geqslant 3$

$$u(r) = \frac{bU}{(n-2)E(b)}\ \Big(E(a) - E(r)\Big) + T.$$

## 4. Формулы Грина

### 4.1. Первая формула Грина

Пусть в $n$-мерном пространстве задана область $G$ с кусочно гладкой поверхностью $\partial G = S$.
Для непрерывно дифференцируемых функций $u(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и $v(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ введем обозначение

$$\nabla u \nabla v = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

**Теорема 4.1.**

*Пусть* $u \in C^2(G) \bigcap C^1\left(\overline{G}\right)$, $v \in C^1\left(\overline{G}\right)$.

*Тогда справедлива* ***первая фомула Грина:***

$$\int\limits_G v\Delta u\, dx = \int\limits_S v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dS - \int\limits_G \nabla u \nabla v\, dx. \tag{4.1}$$

*Доказательство.* Рассмотрим вспомогательную область $G' \Subset G$ с кусочно гладкой границей $\partial G' = S'$. Отступив от границы $S$, мы добились того, что функция $u$ дважды непрерывно дифференцируема уже вплоть до границы:

$$u \in C^2\left(\overline{G'}\right).$$

Теперь мы имеем право применить формулу Гаусса – Остроградского

$$\int\limits_{S'} v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dS = \int\limits_{G'} \mathrm{div}\ (v\ \mathrm{grad}\, u)\, dx.$$

Распишем подынтегральную функцию правой части:

$$\mathrm{div}\ (v\ \mathrm{grad}\, u) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^{n} v \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \equiv \nabla u \nabla v + v\Delta u.$$

Поэтому верна первая формула Грина для области $G'$:

$$\int\limits_{G'} v\Delta u\,dx = \int\limits_{S'} v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dS - \int\limits_{G'} \nabla u\nabla v\,dx. \tag{i}$$

Осталось перейти к пределу по последовательности областей $G'$, исчерпывающей область $G$. Предел правой части $(i)$ существует и равен правой части (4.1), следовательно существует также предел левой части и справедливо равенство (4.1). При этом интеграл левой части (4.1), вообще говоря, несобственный. $\square$

*Замечание* 4.1.
Есть более общий вид первой формулы Грина:

$$\int\limits_{G} v\left(\operatorname{div}\left(p\operatorname{grad} u\right) + qu\right)\,dx = \int\limits_{S} pv\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,dS - \int\limits_{G} p\nabla u\nabla v\,dx + \int\limits_{G} quv\,dx. \tag{4.2}$$

Эта формула доказывется совершенно аналогично. См., например, [4], с. 244 – 245.

### 4.2. Вторая формула Грина

**Теорема 4.2.**

*Пусть* $u,\ v \in C^2(G)\bigcap C^1\left(\overline{G}\right)$.

*Тогда справедлива* ***вторая фомула Грина****:*

$$\int\limits_{G} \left(v\Delta u - u\Delta v\right)\,dx = \int\limits_{S} \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\,dS. \tag{4.3}$$

*Доказательство.* В первой формуле Грина (4.1) поменяем $u$ и $v$ местами. Получим:

$$\int\limits_{G} u\Delta v\,dx = \int\limits_{S} u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\,dS - \int\limits_{G} \nabla v\nabla u\,dx. \tag{ii}$$

Вычитая теперь из (4.1) равенство (ii), сразу получаем (4.3). $\square$

**Теорема 4.3.**

*Пусть* $u \in C^2(G) \bigcap C^1\left(\overline{G}\right)$.

*Тогда справедлива* ***основная фомула Грина:***

$$u(x) = \int\limits_S \left( u \, \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - E(x,\ \xi) \, \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \right) \, dS_\xi + \int\limits_G E(x,\ y) \, \Delta u(y) \, dy. \quad (4.4)$$

*Доказательство.* Фиксируем произвольную точку $x \in G$ и рассмотрим интеграл:

$$\int\limits_G \left( E(x,\ y) \, \Delta_y u - u \Delta_y E(x,\ y) \right) \ dy. \quad \text{(i)}$$

Мы не имеем права применить вторую формулу Грина (4.3) к этому интегралу непосредственно, поскольку фундаментальное решение $E(x,\ y)$ не удовлетворяет условию теоремы 4.2 (оно имеет разрыв в точке $y = x$). Поэтому (аналогично доказательству Интегральной Формулы Коши из курса ТФКП) мы вырежем точку $y = x$ шариком $B_r$ достаточно малого радиуса $r$, чтобы его граница не пересекала $\partial G$. В построенной области

$$G^* = G \setminus B_r$$

обе функции $u$ и $E$ удволетворяют условию теоремы 4.2, и кроме того в ней

$$\Delta_y E \equiv 0.$$

С учетом последнего равенства для интеграла (i) по второй формуле Грина, верно соотношение:

$$\int\limits_{G^*} E(x,\ y) \, \Delta u(y) \ dy \equiv \int\limits_{G^*} \left( E(x,\ y) \, \Delta_y u - u \Delta_y E(x,\ y) \right) \ dy =$$

$$= \int\limits_S \left( E(x,\ \xi) \, \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}} - u(\xi) \, \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}} \right) \ dS_\xi +$$

$$+ \int\limits_{\partial B_r} \left( E(x,\ \xi) \, \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_-} - u(\xi) \, \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_-} \right) \ dS_\xi. \quad \text{(ii)}$$

Под $\vec{n}_-$ в последнем интеграле понимается нормаль к сфере $\partial B_r$, являющаяся внешней для области $G^*$, но при этом внутренняя для сферы.

Рассмотрим, чему равен предел последнего интеграла (ii) при $r \to +0$. Так как $\frac{\partial E(x,\,\xi)}{\partial \vec{n}_-}$ на сфере $\partial B_r$ равна $-\frac{\partial E(x,\,\xi)}{\partial \vec{r}_\xi}$, то

$$\lim_{r\to+0} \int\limits_{\partial B_r} \left( E(x,\ \xi)\, \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_-} - u(\xi)\, \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_-} \right)\, dS_\xi =$$

$$= \lim_{r\to+0} \int\limits_{\partial B_r} u(\xi)\, \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial r_\xi}\, dS_\xi - \lim_{r\to+0} \int\limits_{\partial B_r} E(x,\ \xi)\, \frac{\partial u(\xi)}{\partial r_\xi}\, dS_\xi. \quad \text{(iii)}$$

Вспомним, что фундаментальное решение

$$E(x,\ \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi - x|, & \text{при } \ n = 2; \\ -\frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ |\xi - x|^{n-2}}, & \text{при } \ n \geqslant 3. \end{cases} \tag{3.20}$$

удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial E}{\partial r} = \frac{1}{\omega_n\ r^{n-1}}, \qquad (\text{где } r = |x - \xi|) \qquad \text{при всех } n \geqslant 2. \tag{3.21}$$

Поэтому

$$\lim_{r\to+0} \int\limits_{\partial B_r} u(\xi)\, \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial r_\xi}\, dS_\xi = \lim_{r\to+0} \frac{1}{\omega_n\ r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r} u(\xi)\, dS_\xi =$$

$$= \Big[\text{по теореме о среднем найдется } \xi^* \in \partial B_r : \Big] =$$

$$= \lim_{r\to+0} \frac{u(\xi^*)}{\omega_n\ r^{n-1}} \int\limits_{\partial B_r} dS_\xi = \lim_{r\to+0} \frac{u(\xi^*)}{\omega_n\ r^{n-1}} \cdot \omega_n r^{n-1} = \lim_{r\to+0} u(\xi^*) = u(x), \quad \text{(iv)}$$

$$\lim_{r\to+0} \int\limits_{\partial B_r} E(x,\ \xi)\, \frac{\partial u(\xi)}{\partial r_\xi}\, dS_\xi = \Big[\text{при } \ n = 2\Big] = \lim_{r\to+0}\ \frac{1}{2\pi}\ \ln r \cdot \int\limits_{\partial B_r} \frac{\partial u(\xi)}{\partial r_\xi}\, dS_\xi =$$

$$= \Big[\text{по теореме о среднем найдется } \xi^* \in \partial B_r : \Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ \lim_{r\to+0}\ \ln r \cdot \frac{\partial u(\xi^*)}{\partial r_\xi^*} \int\limits_{\partial B_r} dS_\xi = \frac{1}{2\pi}\ \lim_{r\to+0}\ \ln r \cdot \frac{\partial u(\xi^*)}{\partial r_\xi^*} \cdot 2\pi r =$$

$$= \lim_{r\to+0}\ \underbrace{\frac{\partial u(\xi^*)}{\partial r_\xi^*}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{r \ln r}_{\to 0} = 0. \quad \text{(v)}$$

$$\lim_{r\to+0}\int\limits_{\partial B_r} E(x,\ \xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial r_\xi}\,dS_\xi = \Big[\text{при}\ \ n>2\Big] =$$

$$= -\lim_{r\to+0}\ \frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ r^{n-2}}\int\limits_{\partial B_r}\frac{\partial u(\xi)}{\partial r_\xi}\,dS_\xi =$$

$$= \Big[\text{по теореме о среднем найдется } \xi^*\in\partial B_r:\Big] =$$

$$= -\lim_{r\to+0}\ \frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ r^{n-2}}\cdot\frac{\partial u(\xi^*)}{\partial r^*_\xi}\int\limits_{\partial B_r} dS_\xi =$$

$$= -\lim_{r\to+0}\ \frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ r^{n-2}}\cdot\frac{\partial u(\xi^*)}{\partial r^*_\xi}\cdot\omega_n r^{n-1} =$$

$$= -\lim_{r\to+0}\ \frac{1}{n-2}\cdot\frac{\partial u(\xi^*)}{\partial r^*_\xi}\cdot r = 0. \quad \text{(vi)}$$

Таким образом, в силу (iv) – (vi) при всех натуральных $n\geqslant 2$ для предела (iii) получаем:

$$\lim_{r\to+0}\int\limits_{\partial B_r}\left(E(x,\ \xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial\vec{n}_-}-u(\xi)\,\frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial\vec{n}_-}\right)\,dS_\xi = u(x). \qquad \text{(vii)}$$

Теперь перейдем в (ii) к пределу при $r\to+0$ и воспользуемся

- тем, что в пределе $\int\limits_{G^*} E(x,\ y)\ \Delta u(y)\ dy$ даст несобственный интеграл $\int\limits_{G} E(x,\ y)\ \Delta u(y)\ dy$,
- полученным равенством (vii).

Получаем:

$$\int\limits_G E(x,\ y)\ \Delta u(y)\ dy = \int\limits_S\left(E(x,\ \xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial\vec{n}}-u(\xi)\,\frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial\vec{n}}\right)\ dS_\xi + u(x). \qquad \square$$

### 4.4. Дельта-функция Дирака

**Опр. 4.1. Дельта-функцией Дирака** называется линейный функционал на множестве финитных (т.е. равных нулю вне некоторой ограниченной области) бесконечно дифференцируемых функций, действующий по закону

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\delta(x)\varphi(x)\ dx = \varphi(0). \qquad (4.5)$$

**Утверждение 4.1.**

***Утв. 1)*** $\delta(x) = 0, \quad x \neq 0.$

***Утв. 2)*** *Справедливо равенство:* $\delta(-x) = \delta(x)$.

***Утв. 3)*** *Пусть* $\varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n)$. *Тогда справедлива фомула свертки:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(y-x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(y-x)\,dx = \varphi(y). \tag{4.6}$$

*Доказательство.* [1]

**1)** Пусть $\delta(x) > 0$ на множестве $D \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, имеющем ненулевую $n$-мерную меру (в двумерном случае – площадь, в трехмерном – объем и т.д.). Тогда выберем функцию $\varphi(x)$ так, чтобы она была равна нулю всюду вне $D$ и была неотрицательна и не тожественным нулем внутри $D$. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{D} \delta(x)\varphi(x)\,dx > 0.$$

Но с другой стороны, по определению дельта-функции, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$, а по построению $\varphi(0) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что функция $\delta(x) = 0$ почти всюду в $\mathbb{R}^n$, и не равна нулю в $x = 0$.

**2)** Сразу следует из первого пукта.

**3)** $$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(y-x)\varphi(x)\,dx = \Big[\text{замена переменной: } x-y = z\Big] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(-z)\varphi(y+z)dz =$$

$$= \Big[\text{в силу пункта 2)}\Big] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(z)\varphi(y+z)dz = \varphi(y+z)\Big|_{z=0} = \varphi(y).$$ □

### 4.5. Уравнение Пуассона для фундаментального решения

*Убедиться, что фундаментальное решение* $E(x)$ *является решением уравнения Пуассона*

$$\Delta E(x) = \delta(x), \qquad n \geqslant 2. \tag{4.7}$$

Равенство (4.7) означает, по определению 4.1, что для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta E(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0). \tag{i}$$

[1] Отметим, что и определение, и доказательства, которые здесь приводятся, не являются достаточно строгими, а носят скорее иллюстративный характер. Для полноценного описания дельта-функции и ее свойств необходимо сначала разобрать теорию интеграла Лебега, затем теорию обобщенных функций (или распределений), которые традиционно не входят в курс математики в МИФИ. Желающие могут познакомиться с этими теориями по книгам [8], [4] и др.

Изучим интеграл в левой части (i). Так как $\varphi(x)$ финитна, найдется шар $B_R$ достаточно большого радиуса $R$, вне которого (а в силу непрерывности $\varphi(x)$, и на границе которого) $\varphi(x) \equiv 0$. Поэтому рассматриваемый интеграл превращается в интеграл по шару $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < R\}$. Проинтегрируем его по частям дважды по каждой переменной, чтобы перекинуть оператор $\Delta$ на функцию $\varphi(x)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta E(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{B_R} \Delta E(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{B_R} E(x)\Delta\varphi(x)dx. \qquad \text{(ii)}$$

При этом мы учли, что интеграл по границе $B_R$, возникающий при интегрировании по частям, равен нулю, так как и сама функция $\varphi(x)$, и все ее частные производные (любого порядка) на границе шара равны нулю, а функция $E(x)$ на ней ограничена.
Теперь применим основную формулу Грина (4.4)

$$u(x) = \int\limits_S \left( u\,\frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - E(x,\ \xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \right)\, dS_\xi + \int\limits_G E(x,\ y)\,\Delta u(y)\,dy, \quad (4.4)$$

взяв в ней $G = B_R$, $u(y) = \varphi(y)$ и $x = 0$:

$$\int\limits_{B_R} \overbrace{E(y)}^{\equiv E(0,y)}\ \Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(0) - \int\limits_{\partial B_R} \left( \underbrace{\varphi(\xi)}_{=0}\,\frac{\partial E(0,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - E(0,\ \xi)\,\underbrace{\frac{\partial \varphi(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}}_{=0} \right) dS_\xi =$$
$$= \varphi(0) - 0 = \varphi(0).$$

Таким образом, с учетом равенства (ii), получаем, что для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ справедливо равенство (i):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta E(x)\varphi(x) = \varphi(0),$$

что и требовалось доказать.

*Замечание* 4.2.
Равенство $\Delta E(x) = \delta(x)$, доказанное для $E(x) \equiv E(0,\ x)$, легко обобщить на фундаментальное решение $E(x,\ y)$ как функцию двух наборов пространственных переменных:

$$\Delta_x E(x,\ y) = \Delta_y E(x,\ y) = \delta(x-y), \qquad n \geqslant 2. \qquad (4.8)$$

В самом деле, функция

$$E(x,\ y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ \ln|x-y|, & \text{при } n=2; \\ -\frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ |x-y|^{n-2}}, & \text{при } n \geqslant 3 \end{cases} \qquad (3.20)$$

зависит от переменной $x$ только через модуль разности $|x-y|$. Обозначив эту разность за новую переменную $\xi = x - y$ и считая $y$ постоянным, получим:

$$\Delta_x E(x,\ y) = \Delta_\xi E(\xi,\ 0) \equiv \Delta_\xi E(0,\ \xi) = \Big[\text{в силу (4.7)}\Big] = \delta(\xi) = \delta(x-y).$$

*Замечание* 4.3.
Вторая формула Грина (4.3) была нами доказана только для функций из класса $C^2(G)\bigcap C^1\left(\overline{G}\right)$. Теперь, когда мы ввели $\delta$-функцию и доказали равенство (4.8) $\Delta_x E(x,\ y) = \Delta_y E(x,\ y) = \delta(x-y)$, мы можем распространить эту формулу и на функцию $E(x,\ y)$.
В самом деле, если формально подставить в (4.3)

$$\int\limits_G (v\Delta u - u\Delta v)\ dy = \int\limits_S \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\ dS \tag{4.3}$$

вместо $v$ функцию $E(x,\ y)$, получим:

$$\int\limits_G \left(E(x,\ y)\Delta u - u\,\underbrace{\Delta_y E(x,\ y)}_{=\delta(x-y)}\right) dy = \int\limits_S \left(E(x,\ \xi)\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\,\frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}}\right) dS_\xi$$

$$\Rightarrow \int\limits_G E(x,\ y)\Delta u(y)\,dy - u(x) = \int\limits_S \left(E(x,\ \xi)\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\,\frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}}\right)\ dS_\xi,\ \ -$$

Основную формулу Грина (4.4). То есть формальное применение второй формулы Грина к функции $E$ дает нам справедливое равенство[1]. И мы будем этим пользоваться в дальнейшем.

## 5. Функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Рассмотрим в $n$-мерной области $D$ пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $S = \partial D$ задачу Дирихле для уравнения Лапласа:
*Найти функцию* $u(x,\ t) \in C^2(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right)$, *удовлетворяющую условиям*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0, & x \in D, \\ u(x)\Big|_{x\in S} = \varphi(x), & x \in S, \end{cases} \tag{5.1}$$

[1]Вообще, формулы Грина справедливы для некоторых классов обобщенных функций. Но чтобы строго обосновать их, надо сначала ввести класс функций, с которым мы будем работать, потом определить, как понимается производная обобщенной функции (и любой дифференциальный оператор), доказать, что обобщенные функции нашего класса имеют сужение на границу $S$ области $D$, которое также принадлежит приемлемому классу (хотя бы, чтобы можно было интегрировать по поверхности). Это очень большая работа, не входящая в наш курс. Целью приведенных здесь формальных решений задач с использованием аппарата обобщенных функций является не сколько-нибудь строгое его изложение, а лишь иллюстрация этой возможности как таковой.

*где* $\varphi(x) \in C(S)$ *– заданная, непрерывная на* $S$ *функция.*
Рассмотрим фундаментальное решение уравнения Лапласа

$$E(x,\ \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi - x|, & \text{при}\ \ n = 2; \\ -\ \frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ |\xi - x|^{n-2}}, & \text{при}\ \ n \geqslant 3. \end{cases} \tag{3.20}$$

**Опр. 5.1. Функцией Грина** $G(x,\ \xi)$ **задачи Дирихле для уравнения Лапласа** называется функция $G(x,\ \xi),\quad x \neq \xi \in \overline{D}$, обладающая сойствами:

1) Она имеет вид
$$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi),$$
где $E(x,\ \xi)$ – Фундаментальное решение (3.20) уравнения Лапласа, а функция $g(x,\ \xi)$ гармонична в $D$ как по $x$, так и по $\xi$:
$$\Delta_x g(x,\ \xi) = \Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0, \qquad x, \xi \in D.$$

2)
$$G(x,\ \xi)\Big|_{x \in S} = 0, \qquad G(x,\ \xi)\Big|_{\xi \in S} = 0.$$

**Утверждение 5.1** (свойства функции Грина).

*Пусть* $G(x,\ \xi)$ *– функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в* $D$*.*

*Тогда* $1^o$ $\quad G(x,\ \xi) \leqslant 0, \qquad x \neq \xi \in D;$

$2^o$ $\quad \Delta_x G(x,\ \xi) = \Delta_\xi G(\xi,\ x) = 0, \qquad x \neq \xi \in D;$

$3^o$ $\quad G(x,\ \xi) = G(\xi,\ x), \qquad x \neq \xi \in \overline{D}.$

**Теорема 5.1** (представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина).

*Пусть* $G(x,\ \xi)$ *– функция Грина задачи Дирихле* (5.1).

*Тогда решение задачи* (5.1) *можно представить в виде:*

$$u(x) = \int\limits_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\ \varphi(\xi) dS_\xi, \tag{5.2}$$

*где* $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_\xi}$ *– производная по внешней нормали к поверхности* $S$ *в точке* $\xi \in S$*, а* $dS_\xi$ *– элемент площади поверхности* $S$ *в точке* $\xi$*.*

## № 227. Функция Грина шара

*Проверить, что функция*

$$G(x,\ y) = E(x,\ y) - E\left(|x|y,\ \frac{x}{|x|}\right)$$

*представляет собой функцию Грина задачи Дирихле в шаре* $|x| < 1$.

Проверим выполнение требований определения 5.1. В нашем случае в роли функции $g(x,\ y)$ выступает

$$g(x,\ y) = -E\left(|x|y,\ \frac{x}{|x|}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ \ln\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right|, & \text{при}\ \ n = 2; \\ \frac{1}{\omega_n\ (n-2)\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right|^{n-2}}, & \text{при}\ \ n \geqslant 3. \end{cases}$$

### Требование гармоничности $g(x,\ y)$

#### Гармоничность по $y$

При $n = 2$ функция

$$g(x,\ y) = -E\left(|x|y,\ \frac{x}{|x|}\right) = -\frac{1}{2\pi}\ \ln\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right| = \left[z = \frac{x}{|x|^2}\right] = \\ = -\frac{1}{2\pi}\ (\ln|z-y| + \ln|x|)\,.$$

Так как $\ln|z-y|$ – гармоническая по $y$, то и $g(x,\ y)$ тоже гармонична по $y$.
При $n \geqslant 3$ функция

$$g(x,\ y) = -E\left(|x|y,\ \frac{x}{|x|}\right) = \frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ \left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right|^{n-2}} = \left[z = \frac{x}{|x|^2}\right] = \\ = \frac{1}{\omega_n\ (n-2)|x|^{n-2}} \cdot \frac{1}{|z-y|^{n-2}}.$$

Так как $\frac{1}{|z-y|^{n-2}}$ – гармоническая по $y$, то и $g(x,\ y)$ тоже гармонична по $y$.

#### Гармоничность по $x$

Докажем вспомогательное равенство:

$$\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right| = \left|\frac{y}{|y|} - |y|x\right| \tag{i}$$

Оно следует сразу из способа вычисления модуля разности векторов:

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\left(\vec{a},\ \vec{b}\right) + \left|\vec{b}\right|^2},$$

так как для обоих векторов $\frac{x}{|x|} - |x|y$ и $\frac{y}{|y|} - |y|x$ модуль будет равен

$$\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right| = \left|\frac{y}{|y|} - |y|x\right| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - 2(x,\ y) + 1}.$$

Это означает, что функция $g(x,\ y) = g(y,\ x)$ – симметрична. Поэтому

$$\Delta_x g(x,\ y) = \Delta_y g(y,\ x) = \Delta_y g(x,\ y) = 0.$$

## Равенство нулю на границе

Рассмотрим $G(x,\ y)$ при $|x| = 1$:

$$G(x,\ y)\Big|_{|x|=1} = E(x,\ y)\Big|_{|x|=1} - E\left(y,\ \frac{x}{1}\right)\Big|_{|x|=1} = \Big[\text{т.к. } E(a,\ b) = E(b,\ a)\Big] = 0. \tag{ii}$$

При $|y| = 1$ равенство нулю $G(x,\ y)$ следует из симметричности как $E(x,\ y)$, так и $g(x,\ y)$ и равенства (ii).
Таким образом, все требования определения 5.1 выполнены.

### № 221. Симметричность функции Грина.

*Доказать симметричность функции Грина, то есть справедливость равенства:*

$$G(x,\ y) = G(y,\ x).$$

*Доказательство.* Фиксируем произвольным образом пару несовпадающих точек $x \in D$ и $y \in D$ и применим вторую формулу Грина[1]

$$\int\limits_D \Big(v(z)\Delta_z u(z) - u(z)\Delta_z v(z)\Big)\ dz = \int\limits_S \left(v(z)\,\frac{\partial u(z)}{\partial \vec{n}_z} - u(z)\,\frac{\partial v(z)}{\partial \vec{n}_z}\right)\ dS_z \tag{4.3}$$

к функциям $G(x,\ z)$ и $G(y,\ z)$:

$$\int\limits_D \Big(G(x,\ z)\Delta_z G(y,\ z) - G(y,\ z)\Delta_z G(x,\ z)\Big)\ dz =$$

$$= \int\limits_S \left(G(x,\ z)\,\frac{\partial G(y,\ z)}{\partial \vec{n}_z} - G(y,\ z)\,\frac{\partial G(x,\ z)}{\partial \vec{n}_z}\right)\ dS_z. \tag{i}$$

[1] См. замечание 4.3, с. 58.

Интеграл в правой части равен нулю, так как $G(y,\ z)\Big|_{z\in S} = G(x,\ z)\Big|_{z\in S} = 0$:

$$\int\limits_S \left( \underbrace{G(x,\ z)}_{=0} \cdot \frac{\partial G(y,\ z)}{\partial \vec{n}_z} - \underbrace{G(y,\ z)}_{=0} \cdot \frac{\partial G(x,\ z)}{\partial \vec{n}_z} \right) \ dS_z = 0. \qquad \text{(ii)}$$

Рассмотрим первое слагаемое левой части (i).

$$\int\limits_D G(x,\ z)\Delta_z G(y,\ z)\ dz = \Big[\text{в силу результата п. 4.5}\Big] =$$

$$= \int\limits_D G(x,\ z)\ \delta(y-z)\ dz = G(x,\ y). \quad \text{(iii)}$$

Заметим, что мы имеем право пользоваться результатом п. 4.5 о том, что $\Delta_z G(y,\ z) = \delta(y-z)$, поскольку $\int\limits_D G(x,\ z)\Delta_z G(y,\ z)\ dz$ можно разбить на сумму интегралов по областям, одна из которых содержит точку $x$, а вторая – точку $y$. Тогда в первой области (не содержащей $z = y$)

$$\Delta_z G(y,\ z) \equiv 0,$$

а во второй области, не содержащей $z = x$, функция $G(x,\ z)$ бесконечно дифференцируема и там применимо утверждение из п. 4.5.
Аналогично, рассмотрим второе слагаемое левой части (i).

$$-\int\limits_D G(y,\ z)\Delta_z G(x,\ z)\ dz = \Big[\text{в силу результата п. 4.5}\Big] =$$

$$= -\int\limits_D G(y,\ z)\ \delta(x-z)\ dz = -G(y,\ x). \quad \text{(iv)}$$

Объединяя результаты (i) – (iv), получаем

$$G(x,\ y) - G(y,\ x) = 0.$$

□

**№ 219.**

*Для гармонических в области $D$ функций $u(x)$ и $v(x)$ класса $C^2(G)\bigcap C^1\left(\overline{G}\right)$ доказать справедливость равенства:*

$$\int\limits_S \left( v(y)\frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} - u(y)\frac{\partial v(y)}{\partial \vec{n}_y} \right) dS_y = 0.$$

*Доказательство.* Применим вторую формулу Грина

$$\int\limits_D \Big( v(y)\Delta u(y) - u(y)\Delta v(y) \Big)\ dy = \int\limits_S \left( v(y)\ \frac{\partial u(y)}{\partial \vec{n}_y} - u(y)\ \frac{\partial v(y)}{\partial \vec{n}_y} \right)\ dS_y \qquad (4.3)$$

и воспользуемся гармоничностью функций $u(x)$ и $v(x)$, из которой сразу следует равенство нулю интеграла левой части (4.3). $\square$

**№ 226. Решение задачи Дирихле при помощи функции Грина.** *Доказать теорему 5.1:*

**Теорема** 5.1

Пусть $G(x,\ \xi)$ – функция Грина задачи Дирихле (5.1).

Тогда Решение задачи (5.1) можно представить в виде:

$$u(x) = \int\limits_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\, \varphi(\xi) dS_\xi. \tag{5.2}$$

*Доказательство.* Выпишем вторую формулу Грина

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\ dx = \int\limits_S \left(v\,\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\,\frac{\partial v}{\partial \vec{n}}\right)\ dS \tag{4.3}$$

и применим ее к функциям $u$ и $g$:

$$\int\limits_D \left(g(x,\ y)\underbrace{\Delta_x u(x)}_{=0} - u(x)\underbrace{\Delta_x g(x,\ y)}_{=0}\right)\ dx =$$
$$= \int\limits_S \left(g(\xi,\ y)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u(\xi)\,\frac{\partial g(\xi,\ y)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)\ dS_\xi.$$

Отсюда

$$0 = \int\limits_S \left(g(\xi,\ y)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - u(\xi)\,\frac{\partial g(\xi,\ y)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)\ dS_\xi. \tag{i}$$

Теперь вспомним основную формулу Грина:

$$u(x) = \int\limits_S \left(u(\xi)\,\frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - E(x,\ \xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)\ dS_\xi + \int\limits_G E(x,\ y)\,\underbrace{\Delta u(y)}_{=0}\, dy. \tag{4.4}$$

Вычтем равенство (i) из (4.4) и учтем, что $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$u(x) = \int\limits_S \left(u(\xi)\,\frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - G(x,\ \xi)\,\frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\right)\ dS_\xi. \tag{ii}$$

Осталось вспомнить, что в силу краевого условия $u(\xi) = \varphi(\xi)$ при $\xi \in S$, а в силу определения функции Грина $G(x,\ \xi) = 0$ при $\xi \in S$. В итоге

получаем:

$$u(x) = \int\limits_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\, \varphi(\xi) dS_\xi. \tag{5.2}$$

□

**№ 228.**

*Пользуясь функцией Грина, вывести формулу Пуассона*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n} \cdot \varphi(\xi) dS_\xi,$$

*дающую решение задачи Дирихле* (5.1) *в шаре* $D = \{|x| < 1\}$.

*Доказательство.* В номере № 227 мы убедились, что выражение

$$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) - E\left(|x|\xi,\ \frac{x}{|x|}\right) \tag{i}$$

дает функцию Грина задачи (5.1) в шаре. Чтобы применить формулу (5.2), нам надо вспомнить, что

$$E(x,\ \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi - x|, & \text{при}\ \ n = 2; \\ -\frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ |\xi - x|^{n-2}}, & \text{при}\ \ n \geqslant 3, \end{cases} \tag{3.20}$$

и посчитать $\frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi}$ при $|\xi| = 1$.

$$\frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi} = \frac{1}{\omega_n} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\xi_k(\xi_k - x_k)}{|\xi - x|^n} - \frac{|x|\xi_k\left(|x|\xi_k - \frac{x_k}{|x|}\right)}{\left||x|\xi - \frac{x}{|x|}\right|^n} \right\} =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \text{при } |\xi| = 1 \text{ верно равенство } \ |\xi - x| \equiv \left||x|\xi - \frac{x}{|x|}\right|, \text{ так как} \\ \\ \left||x|\xi - \frac{x}{|x|}\right| = \sqrt{|x|^2\ |\xi|^2 - 2(\xi,\ x) + 1} = \sqrt{|x|^2 - 2(\xi,\ x) + 1}, \\ \\ |\xi - x| = \sqrt{|\xi|^2 - 2(\xi,\ x) + |x|^2} = \sqrt{1 - 2(\xi,\ x) + |x|^2}. \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{|\xi - x|^n} \cdot \sum_{k=1}^n \left[ \xi_k(\xi_k - x_k) - |x|\xi_k\left(|x|\xi_k - \frac{x_k}{|x|}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1}{|\xi - x|^n} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\xi_k^2(1 - |x|^2) - \xi_k x_k + \xi_k x_k\right] = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n} \cdot \sum_{k=1}^n \xi_k^2 =$$

$$= \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n} \cdot |\xi|^2 = \frac{1}{\omega_n} \cdot \frac{1-|x|^2}{|\xi - x|^n}.$$

□

## № 232.

*Показать справедливость тождества*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}d\psi=1,$$

*где* $x=(x_1,\ x_2)$ *есть точка круга* $|x|<1$*, а* $\xi=(\cos\psi,\ \sin\psi)$ *– точка окружности* $|\xi|=1$.

*Доказательство.* Воспользуемся формулой Пуассона (номер № 228) решения задачи Дирихле в круге с функциями $u(x)\equiv 1$ и $\varphi(\xi)\equiv 1$[1].

$$1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}\cdot 1\cdot dS_\xi. \tag{i}$$

Теперь осталось использовать параметризацию $\xi=(\cos\psi,\ \sin\psi)$ окружности $|\xi|=1$, чтобы найти $dS_\xi$. Дифференциал дуги, заданной параметрическими равенствами

$$\begin{cases}\xi_1(\psi)=\cos\psi,\\ \xi_2(\psi)=\sin\psi,\end{cases}\qquad \text{при}\quad \psi\in[0,\ 2\pi),$$

вычисляется по формуле:

$$dS_\xi=\sqrt{\big(\xi_1'(\psi)\big)^2+\big(\xi_2'(\psi)\big)^2}\ d\psi=\sqrt{(-\sin\psi)^2+(\cos\psi)^2}\ d\psi=d\psi.$$

Отсюда и получаем требуемую формулу

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}d\psi=1.$$

□

## № I. Дельта-функция и одномерное уравнение колебаний

*Убедиться, что функция*

$$\mathcal{E}(x,\ t)=\frac{\theta(at-|x|)}{2a}\equiv\begin{cases}0, & at\leqslant|x|;\\ \frac{1}{2a}, & at>|x|\end{cases}$$

*является решением одномерного уравнения колебаний*

$$\mathcal{E}_{tt}(x,\ t)-a^2\mathcal{E}_{xx}(x,\ t)=\delta(x,\ t). \tag{5.3}$$

Равенство (5.3) означает, по определению 4.1, что для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x,\ t)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\mathcal{E}_{tt}(x,\ t)-a^2\mathcal{E}_{xx}(x,\ t)\Big)\varphi(x,\ t)\,dx\,dt=\varphi(0,\ 0). \tag{i}$$

[1] Очевидно, функция $u(x)\equiv 1$ явлется решением задачи Дирихле в круге с граничным условием $\varphi(\xi)\equiv 1$.

Изучим интеграл в левой части (i). Так как $\varphi(x,\ t)$ финитна, найдется круг $B_R$ достаточно большого радиуса $R$, вне которого (а в силу непрерывности $\varphi(x,\ t)$, и на границе которого) $\varphi(x,\ t) \equiv 0$. Проинтегрируем по частям дважды по каждой переменной, чтобы перекинуть оператор левой части на функцию $\varphi(x,\ t)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\mathcal{E}_{tt}(x,\ t) - a^2\mathcal{E}_{xx}(x,\ t)\Big)\,\varphi(x,\ t)\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\varphi_{tt}(x,\ t) - a^2\varphi_{xx}(x,\ t)\Big)\,\mathcal{E}(x,\ t)\,dx\,dt. \quad \text{(ii)}$$

При этом мы учли, что интеграл по границе $B_R$, возникающий при интегрировании по частям, равен нулю, так как и сама функция $\varphi(x,\ t)$, и все ее частные производные (любого порядка) на границе шара равны нулю, а функция $\mathcal{E}(x,\ t)$ на ней ограничена.
Теперь воспользуемся определением функции $\mathcal{E}(x,\ t)$ – тем, что она обращается в нуль в части плоскости, где $at < |x|$ и рассмотрим отдельно интеграл от каждого слагаемого в (ii):
**Первое слагаемое:**

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_{tt}(x,\ t)\mathcal{E}(x,\ t)\,dx\,dt = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\frac{|x|}{a}}^{+\infty}\varphi_{tt}(x,\ t)\,dt\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_t(x,\ t)\Big|_{t=\frac{|x|}{a}}^{t=+\infty}\,dx = \Big[\varphi_t(x,\ +\infty) = 0 \text{ в силу финитности } \varphi\Big] =$$

$$= -\,\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_t(x,\ t)\Big|_{t=\frac{|x|}{a}}\,dx =$$

$$= -\,\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi_t(x,\ t)\Big|_{t=\frac{x}{a}}\,dx - \frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi_t(x,\ t)\Big|_{t=\frac{-x}{a}}\,dx.$$

Учтем связь между переменными $x$ и $t$ в полученных интегралах и произведем замену $x = \pm at$:

$$- \frac{1}{2a} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_t(x,\ t)\Big|_{t=\frac{x}{a}}\,dx - \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{0} \varphi_t(x,\ t)\Big|_{t=\frac{-x}{a}}\,dx =$$

$$= - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_t(x,\ t)\Big|_{x=at}\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_t(x,\ t)\Big|_{x=-at}\,dt$$

Итак,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{tt}(x,\ t)\mathcal{E}(x,\ t)\,dx\,dt =$$

$$= - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_t(x,\ t)\Big|_{x=at}\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_t(x,\ t)\Big|_{x=-at}\,dt. \quad \text{(iii)}$$

**<u>Второе слагаемое:</u>**

$$- a^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(x,\ t)\mathcal{E}(x,\ t)\,dx\,dt = \Big[\text{так как } \mathcal{E} \equiv 0 \text{ при } t < 0\Big] =$$

$$= - \frac{a}{2} \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-at}^{at} \varphi_{xx}(x,\ t)\,dx\,dt = - \frac{a}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x,\ t)\Big|_{x=-at}^{x=at}\,dt =$$

$$= - \frac{a}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_x(x,\ t)\Big|_{x=at}\,dt + \frac{a}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_x(x,\ t)\Big|_{x=-at}\,dt.$$

Итак,

$$- a^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{xx}(x,\ t)\mathcal{E}(x,\ t)\,dx\,dt =$$

$$= - \frac{a}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_x(x,\ t)\Big|_{x=at}\,dt + \frac{a}{2} \int\limits_0^{+\infty} \varphi_x(x,\ t)\Big|_{x=-at}\,dt. \quad \text{(iv)}$$

**Вычисление интеграла (ii):**

Сложим равенства (iii) и (iv).

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\varphi_{tt}(x,\ t)-a^2\varphi_{xx}(x,\ t)\Big)\,\mathcal{E}(x,\ t)\,dx\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi_t(x,\ t)\Big|_{x=at}\,dt-\ \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi_t(x,\ t)\Big|_{x=-at}\,dt-$$

$$-\ \frac{a}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi_x(x,\ t)\Big|_{x=at}\,dt+\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi_x(x,\ t)\Big|_{x=-at}\,dt\equiv$$

$$\equiv-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\varphi(x,\ t)\Big|_{x=at}\right)\,dt-\ \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{d}{dt}\left(\varphi(x,\ t)\Big|_{x=-at}\right)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\,\varphi(at,\ t)\Big|_{t=0}+\frac{1}{2}\,\varphi(-at,\ t)\Big|_{t=0}=\frac{\varphi(0,\ 0)}{2}+\frac{\varphi(0,\ 0)}{2}=\varphi(0,\ 0),$$

откуда левая часть (ii) равна

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(\mathcal{E}_{tt}(x,\ t)-a^2\mathcal{E}_{xx}(x,\ t)\Big)\,\varphi(x,\ t)\,dx\,dt=\varphi(0,\ 0),$$

то есть справедливо равенство (i), что и требовалось доказать.

## 6. Метод электростатических изображений (метод отражений)

### 6.1. Физическая интерпретация для $\mathbb{R}^3$

Как мы говорили при обсуждении фундаментального решения и Ньютонова потенциала (опр. 3.3), в трехмерном пространстве функция

$$E_N(x,\ \xi)=-4\pi E(x,\ \xi)=\frac{1}{|x-\xi|}\tag{6.1}$$

описывает потенциал поля в точке $(x_1,\ x_2,\ x_3)$, созданного единичным точечным зарядом, расположенным в точке $(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ (или наоборот, так как переменные $x$ и $\xi$ взаимозаменяемы).

Тогда функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа после умножения на $(-4\pi)$ приобретает смысл потенциала в точке $x$ поля, созданного единичным точечным зарядом, помещенным в точку $\xi$ внутри заземленной проводящей замкнутой поверхности.

Фиксируем две точки: $x$ и $\xi$ в области $D$. В точку $x$ мы поместим единичный положительный заряд, а в точке $\xi$ будем наблюдать результирующий потенциал.

Заряд в точке $x$ индуцирует на заземленной $S$ некоторе распределение зарядов.

Тогда потенциал электростатического поля в точке $\xi \in D$ есть сумма потенциала, созданного единичным зарядом, и потенциала, созданного индуцированными на $S$ зарядами[1]:

$$G(x,\ \xi) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{|x-\xi|} + g(x,\ \xi).$$

При этом функция $g(x,\ y)$, соответствующая потенциалу, созданному индуцированными на $S$ зарядами, является гармонической как по $x \in D$, так и по $y \in D$.

При такой интерпретации, свойство симметричности функции Грина $G(x,\ y) = G(y,\ x)$ является математическим выражением **принципа взаимности** в физике: источник, помещенный в точке $x$ производит в точке $y$ такое же действие, какое производит в точке $x$ такой же источник, помещенный в точке $y$. Заметим, что функцию Грина называют также **функцией точечного источника**.

Таким образом, чтобы научиться решать задачу Дирихле, надо уметь находить функцию $G = E+g$, а поскольку $E$ – известная функция ((3.20),с. 42), вся задача сводится к построению функции $g(x,\ \xi)$. По опеределению функции Грина, от $g$ требуется, чтобы

$$\Delta_x g(x,\ \xi) = \Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0, \qquad x, \xi \in D; \tag{6.2}$$

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}. \tag{6.3}$$

Эти условия, фактически, представляют собой также задачу Дирихле, только уже для функции $g$. Однако эта задача во многих случаях существенно проще исходной, так как в ней граничная функция имеет очень специальный вид, а в исходной задаче она совершенно произвольна. Кроме того, найдя функцию Грина для задачи Дирихле в области $D$, мы сразу по формуле (5.2) получаем решения всех задач Дирихле в этой области.

Наиболее распространенным способом построения функции Грина являеся **метод отражений (электростатических изображений)**. Его идея состоит в том, что функция $g$, представляющая собой поле индуцированных на $S$ зарядов, строится как поле зарядов, расположенных вне области $D$, и таких, чтобы

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}.$$

Ее можно найти, располагая заряды подходящей величины в точках, симметричных относительно $S$ точкам, в которых расположены заряды внутри $D$.

[1]Здесь и далее мы будем заменять громоздкую конструкцию «потенциал, деленный на $(-4\pi)$» на «потенциал». Для вычислений коэффициент $\frac{-1}{4\pi}$ значения не имеет. Мы же ищем функцию Грина, а с ее помощью строим по формуле (5.2) решение задачи Дирихле. Но если необходимо получить именно физический потенциал, надо не забывать умножать получаемые формулы на $(-4\pi)$.

### 6.2. Алгоритм

**Шаг 1)** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20).

**Шаг 2)** Помещаем в точку $\xi \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi^*$ точку, симметричную точке $\xi$ относительно поверхности $S$, и помещаем в $\xi^*$ отрицательный заряд $\big(-q(\xi)\big)$.[1]

**Шаг 3)** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\,\ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) & n = 2, \\ \frac{1}{\omega_n(n-2)q^{n-2}|\xi^*-x|^{n-2}} & n > 2, \end{cases} \tag{6.4}$$

подбирая подходящим образом заряд $q$.[2] Так определенная функция $g$ будет гармонической (то есть удовлетворяющей уравнению Лапласа), поскольку $E$ – гармоническая. Поэтому находить $q$ надо из условия (6.3). При этом удобно считать, что точка $x \in S$, – тогда $q$ находится из краевого условия $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$. (Поскольку в формуле (5.2) интеграл берется по $\xi \in S$, а функции $E$, $g$ и $G$ обладают свойством симметричности, полученная функция $G = E + g$ будет удовлетворять определению функции Грина.)

Очень важно, найдя $q(x,\ \xi,\ \xi^*)$, воспользоваться тем, что $x \in S$ и выполнить преобразования так, чтобы осталась только зависимость $q(\xi)$.

**Шаг 4)** Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi)+g(x,\ \xi)$. (В ответе надо избавиться, по возможности, от выражений, зависящих от $\xi^*$, выразив координаты $\xi^*$ через координаты $\xi$. Это делается потому, что в формуле (5.2) $\xi \in S$, и $\xi^* = \xi$, а не $x \in S$, как на Шаге 3.)

### 6.3. Алгоритм для случая $n = 2$

В этом пункте проведем все построения, которые возможно, в соответствии с общим алгоритмом пункта 6.2 для случая $n = 2$. Здесь $D$ – произвольная область с границей $S$.

**Шаг 1)** Фундаментальное решение уравнения Лапласа для случая $n = 2$ имеет вид:

$$E(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\,\ln|\xi - x|.$$

[1] Если поверхность имеет несколько участков, как например у куба или полушара, надо строить точки $\xi_k^*$, симметричные точке $\xi$ относительно каждого участка границы, затем точки $\xi_{kl}^{**}$, симметричные точкам $\xi_k^*$ относительно каждого участка границы (или его продолжения), и т.д. При этом в точки $\xi_k^*$ помещаются отрицательные заряды $\big(-q_k(\xi)\big)$, в точки $\xi_{kl}^{**}$ – положительные заряды $q_{kl}(\xi)$, и т.д. (см. задачи в пп. 6.5 – 6.5).

[2] Если поверхность имеет несколько участков, то надо искать $g$ в виде суммы слагаемых вида (6.4):

$$g = -\sum_k E(qx,\ q\xi_k^*) + \sum_{k,l} E(qx,\ q\xi_{kl}^{**}) - \dots.$$

.

**Шаг 2)** Помещаем в точку $\xi \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi^*$ точку, симметричную точке $\xi$ относительно поверхности $S$, и помещаем в $\xi^*$ отрицательный заряд $\big(-q(\xi)\big)$.[1]

**Шаг 3)** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = -\frac{1}{2\pi}\ \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\,\Big), \tag{6.5}$$

подбирая подходящим образом заряд $q$.[2]

Найдем $q$ из условия (6.3), считая, что точка $x \in S$:

$$\underbrace{g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}}_{\substack{\| \\ -\frac{1}{2\pi}\ \ln\left(q|\xi^*-x|\right)}} = \underbrace{-E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}}_{\substack{\| \\ -\frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi-x|}}.$$

Отсюда, $\ln\Big(q\,|\xi^* - x|\,\Big) = \ln|\xi - x|$, при $x \in S$, поэтому

$$q = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\bigg|_{x\in S}. \tag{6.6}$$

**Шаг 4)** Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{|\xi - x|}{q\,|\xi^* - x|}. \tag{6.7}$$

Осталось по возможности избавиться от выражений, зависящих от $\xi^*$, выразив координаты $\xi^*$ через координаты $\xi$.

### 6.4. Алгоритм для случая $n = 3$

В этом пункте проведем все построения, которые возможно, в соответствии с общим алгоритмом пункта 6.2 для случая $n = 3$. Здесь $D$ – произвольная область с границей $S$.

**Шаг 1)** Фундаментальное решение уравнения Лапласа для случая $n = 2$ имеет вид:

$$E(x,\ \xi) = -\frac{1}{4\pi\,|\xi - x|}.$$

[1] Если поверхность имеет несколько участков, то точки $\xi_k^*$, симметричные точке $\xi$ относительно каждого участка границы, затем точки $\xi_{kl}^{**}$, симметричные точкам $\xi_k^*$ относительно каждого участка границы (или его продолжения), и т.д. При этом в точки $\xi_k^*$ помещаются отрицательные заряды $\big(-q_k(\xi)\big)$, в точки $\xi_{kl}^{**}$ – положительные заряды $q_{kl}(\xi)$, и т.д.

[2] Если поверхность имеет несколько участков, то надо искать $g$ в виде суммы слагаемых вида (6.4):

$$g = -\frac{1}{2\pi}\sum_k \ln\Big(q_k\,|\xi_k^* - x|\Big) + \frac{1}{2\pi}\sum_{k,l}\ln\Big(q_{kl}\,|\xi_{kl}^{**} - x|\Big) - \ldots = \frac{1}{2\pi}\ln\left[\prod_k \frac{1}{q_k}\frac{1}{|\xi_k^* - x|}\prod_{k,l} q_{kl}\,|\xi_{kl}^{**} - x|\ldots\right].$$

**Шаг 2)** Помещаем в точку $\xi \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi^*$ точку, симметричную точке $\xi$ относительно поверхности $S$, и помещаем в $\xi^*$ отрицательный заряд $\big(-q(\xi)\big)$.[1]

**Шаг 3)** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \frac{1}{4\pi\, q\ |\xi^* - x|}, \tag{6.8}$$

подбирая подходящим образом заряд $q$.[2]

Найдем $q$ из условия (6.3), считая, что точка $x \in S$:

$$\underbrace{g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}}_{\substack{\| \\ \frac{1}{4\pi\, q\, |\xi^* - x|}}} = \underbrace{-E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}}_{\substack{\| \\ \frac{1}{4\pi\ |\xi - x|}}}.$$

Отсюда, $\frac{1}{q\,|\xi^*-x|} = \frac{1}{|\xi-x|}$, при $x \in S$, поэтому

$$q = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\Bigg|_{x\in S}. \tag{6.9}$$

**Шаг 4)** Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{q\ |\xi^* - x|} - \frac{1}{|\xi - x|}\right). \tag{6.10}$$

Осталось по возможности избавиться от выражений, зависящих от $\xi^*$, выразив координаты $\xi^*$ через координаты $\xi$.

### 6.5. Примеры решения задач

#### № I. Функция Грина в полуплоскости

*Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле в полуплоскости $x_2 > 0$ и представить решение $u$ при помощи формулы* (5.2).

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = 0, & x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 > 0; \\ u(x_1,\ 0) = \varphi(x_1), & x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.11}$$

**<u>Шаг 1.</u>** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20).

---

[1] Если поверхность имеет несколько участков, то точки $\xi_k^*$, симметричные точке $\xi$ относительно каждого участка границы, затем точки $\xi_{kl}^{**}$, симметричные точкам $\xi_k^*$ относительно каждого участка границы (или его продолжения), и т.д. При этом в точки $\xi_k^*$ помещаются отрицательные заряды $\big(-q_k(\xi)\big)$, в точки $\xi_{kl}^{**}$ – положительные заряды $q_{kl}(\xi)$, и т.д.

[2] Если поверхность имеет несколько участков, то надо искать $g$ в виде суммы слагаемых вида (6.4):

$$g = -\frac{1}{4\pi}\sum_k \frac{1}{q_k\ |\xi^* - x|} + \frac{1}{4\pi}\sum_{k,l}\frac{1}{q_{kl}\,|\xi_{kl}^{**} - x|} - \ldots.$$

Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (3.20) имеем:

$$E(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \quad (6.12)$$

**<u>Шаг 2.</u>** Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $\xi_2 > 0$, единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi^*$ точку, симметричную точке $\xi$ относительно прямой $S = \{\xi_2 = 0\}$.

$$\xi^* = (\xi_1,\ -\xi_2). \quad (6.13)$$

**<u>Шаг 3.</u>** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$-\,2\pi\cdot g = 2\pi\,E(qx,\ q\xi^*) = \ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big) =$$

$$= \ln q + \frac{1}{2}\ \ln\Big((\xi_1 - x_1)^2 + (-\xi_2 - x_2)^2\Big) = \ln q + \frac{1}{2}\ \ln\Big((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2\Big).$$

Чтобы выполнялось краевое условие, $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$, берем $q$ из формулы (6.6):

$$q(\xi) = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\Bigg|_{x\in S} = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\Bigg|_{x_2=0} \equiv 1.$$

Таким образом,

$$g = -\,\frac{1}{4\pi}\ln\Big((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2\Big) = -\,\frac{1}{2\pi}\ln|\xi^* - x|\,.$$

**<u>Шаг 4.</u>** Строим функцию Грина по формуле (6.7):

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|} = \frac{1}{4\pi}\ \ln\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2}.$$

**<u>Шаг 5.</u>** Чтобы представить $u$ по формуле (5.2), надо найти производную функции Грина по нормали к границе области, в нашем случае, $\left(-\,\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_2}\right)$.

$$-\ \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \xi_2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_2}\left(\ln\Big((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2\Big) - \ln\Big((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2\Big)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\xi_2 + x_2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2} - \frac{\xi_2 - x_2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}\right).$$

Соответственно, на границе $\xi_2 = 0$ получаем:

$$-\,\frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x_2}{(\xi_1 - x_1)^2 + x_2^2}.$$

Таким образом,

**Ответ:** $G(x,\ \xi) = \dfrac{1}{2\pi}\ \ln\dfrac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|} = \dfrac{1}{4\pi}\ \ln\dfrac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 + x_2)^2},$

$$u(x) = \frac{x_2}{\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\xi_1 - x_1)^2 + x_2^2}\cdot\varphi(\xi_1)\ d\xi_1 \qquad - \quad \text{еще одна формула Пуассона.}$$

**№ II. Функция Грина в полупространстве**

*Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле в полупространстве* $x_3 > 0$ *и представить решение* $u$ *при помощи формулы* (5.2).

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, & x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3 > 0; \\ u(x_1,\ x_2,\ 0) = \varphi(x_1,\ x_2), & x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.14}$$

**Шаг 1.** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20).
Для данного двумерного случая $n = 3$, и по формуле (3.20) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\xi - x|}, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}. \tag{6.15}$$

**Шаг 2.** Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$, $\xi_3 > 0$, единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi^*$ точку, симметричную точке $\xi$ относительно плоскости $S = \{\xi_3 = 0\}$.

$$\xi^* = (\xi_1,\ \xi_2,\ -\xi_3). \tag{6.16}$$

**Шаг 3.** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде $g = -E(qx,\ q\xi^*)$:

$$g = \frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{q\,|\xi^* - x|} = \frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{q\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (-\xi_3 - x_3)^2}} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\ \frac{1}{q\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}}.$$

Чтобы выполнялось краевое условие, $g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S}$, берем $q$ из формулы (6.9):

$$q(\xi) = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\Bigg|_{x\in S} = \frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\Bigg|_{x_3=0} \equiv 1.$$

Таким образом,

$$g = \frac{1}{4\pi\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}}.$$

**Шаг 4.** Строим функцию Грина по формуле (6.10):

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{q\ |\xi^* - x|} - \frac{1}{|\xi - x|}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}\right).$$

**Шаг 5.** Чтобы представить $u$ по формуле (5.2), надо найти производную функции Грина по нормали к границе области, в нашем случае, $\left(-\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial \xi_3}\right)$.

$$-\frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \xi_3} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi_3}\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\left(-\frac{\xi_3 - x_3}{\left[(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\xi_3 + x_3}{\left[(\xi_1 + x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Соответственно, на границе $\xi_3 = 0$ получаем:

$$-\frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \xi_3} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x_3}{\left[(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + x_3^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом,

**<u>Ответ:</u>**

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 + x_3)^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}}\right),$$

$$u(x) = \frac{x_3}{2\pi} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left[(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + x_3^2\right]^{\frac{3}{2}}} \cdot \varphi(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \qquad -$$

еще одна формула Пуассона.

**№ III. Функция Грина в круге.** *Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле в круге* $|x - x^0| < R$.

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & |x - x^0| < R; \\ u(x_1,\ x_2) = \varphi(x_1,\ x_2), & |x - x^0| = R. \end{cases} \tag{6.17}$$

**<u>Шаг 1.</u>** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20).
Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (3.20) имеем:

$$E(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{6.18}$$

**<u>Шаг 2.</u>** Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $(\xi_1 - x_1^0)^2 + (\xi_2 - x_1^0)^2 < R^2$, единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi^*$ точку, симметричную точке $\xi$ относительно окружности

$$S = \{|x - x^0| = R\},$$

то есть точку, лежащую на луче $[x^0,\ \xi)$ на таком расстоянии $|\xi^* - x^0|$ от центра окружности, чтобы $|\xi - x^0| \cdot |\xi^* - x^0| = R^2$. Или в векторном виде:

$$\overrightarrow{x^0\xi^*} = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\overrightarrow{x^0\xi},$$

откуда

$$\xi^* - x^0 = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\left(\xi - x^0\right). \tag{6.19}$$

**<u>Шаг 3.</u>** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$g = -\frac{1}{2\pi}\,E(qx,\ q\xi^*) = -\frac{1}{2\pi}\,\ln\Big(q\,|\xi^* - x|\Big), \tag{6.20}$$

где заряд $q$, по формуле (6.6), равен

$$q = \left.\frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\right|_{x\in S}. \tag{6.6}$$

**Избавляемся от зависимости $q$ от всех переменных, кроме $\xi$:** положим $x \in S$, то есть $|x - x^0| = R$ (рис. 1). Тогда треугольники $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ подобны, так как угол при вершине $x^0$ у них общий, а прилегающие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{\left|\xi - x^0\right|}{\left|x - x^0\right|} = \frac{\left|x - x^0\right|}{\left|\xi^* - x^0\right|}$$

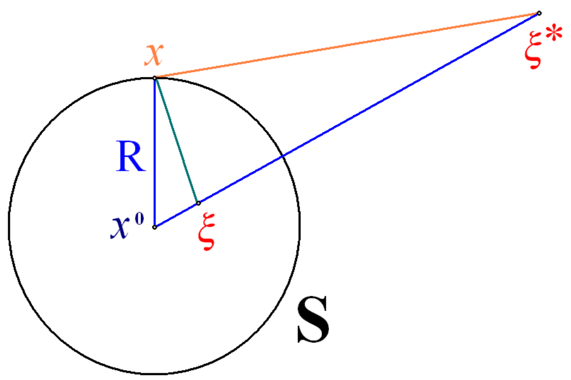



Рис.1. Симметричные точки и подобные треугольники

в силу свойства симметричных точек $\xi$ и $\xi^*$:

$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2.$$

Из подобия треугольников $\Delta x^0\xi x$ и $\Delta x^0 x\xi^*$ получаем

$$q = \left.\frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\right|_{x\in S} = \frac{\left|\xi - x^0\right|}{R}. \tag{6.21}$$

Подставим $q$ в (6.20)

$$g(x,\ \xi) = -\frac{1}{2\pi}\ ln\frac{\left|\xi - x^0\right| \cdot |\xi^* - x|}{R}.$$

<u>**Шаг 4.**</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = -\frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{\left|\xi - x^0\right| \cdot |\xi^* - x|}{R} - \ln|\xi - x|\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{\left|\xi - x^0\right| \cdot |\xi^* - x|}{R\,|\xi - x|}.$$

Чтобы избавиться в ответе от $\xi^*$, заметим, что у нас есть соотношение (6.19), в котором фигурирует разность $\xi^* - x^0$, в то время как здесь нужна разность $\xi^* - x$.

$$\xi^* - x \equiv \overrightarrow{x\xi^*} = \overrightarrow{x^0\xi^*} - \overrightarrow{x^0x} = \Big[\text{в силу (6.19)}\Big] = \frac{R^2}{\left|\xi - x^0\right|^2} \cdot \overrightarrow{x^0\xi} - \overrightarrow{x^0x},$$

откуда

$$\frac{|\xi^* - x|}{R} = R\left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|.$$

Окончательно получаем

**Ответ:** $\quad G(x,\ \xi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R\left|\xi - x^0\right|\cdot\left|\frac{x-x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|}{|\xi - x|} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{|\xi - x|}{R|\xi - x^0|\cdot\left|\frac{x-x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{|\xi - x^0|^2}\right|}.$

**№ IV. Функция Грина в шаре.** *Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле в шаре* $|x - x^0| < R$.

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, & |x - x^0| < R; \\ u(x_1,\ x_2,\ x_3) = \varphi(x), & |x - x^0| = R. \end{cases} \tag{6.22}$$

**Шаг 1.** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20). Для данного двумерного случая $n = 3$, и по формуле (3.20) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\frac{1}{4\pi\,|\xi - x|}, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2}.$$

**Шаг 2.** Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2)$, $\ (\xi_1 - x_1^0)^2 + (\xi_2 - x_1^0)^2 < R^2$, единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi^*$ точку, симметричную точке $\xi$ относительно сферы

$$S = \{|x - x^0| = R\},$$

то есть точку, лежащую на луче $[x^0,\ \xi)$ на таком расстоянии $|\xi^* - x^0|$ от центра окружности, чтобы $|\xi - x^0|\cdot|\xi^* - x^0| = R^2$. Или в векторном виде:

$$\overrightarrow{x^0\xi^*} = \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\overrightarrow{x^0\xi},$$

откуда

$$\xi^* = x^0 + \frac{R^2}{|\xi - x^0|^2}\,\left(\xi - x^0\right). \tag{6.23}$$

**Шаг 3.** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$g = -E(qx,\ q\xi^*) = \frac{1}{4\pi\ q\,|\xi^* - x|}, \tag{6.24}$$

где заряд $q$, по формуле (6.9), равен

$$q = \left.\frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\right|_{x\in S}.$$

**Избавляемся от зависимости $q$ от всех переменных, кроме $\xi$:** положим $x \in S$, то есть $|x - x^0| = R$ (см. рис. 1). Тогда треугольники $\Delta x^0\xi x$ и

$\Delta x^0 x \xi^*$ подобны, так как угол при вершине $x^0$ у них общий, а прилегающие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{\left|\xi - x^0\right|}{\left|x - x^0\right|} = \frac{\left|x - x^0\right|}{\left|\xi^* - x^0\right|}$$

в силу свойства симметричных точек $\xi$ и $\xi^*$:

$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2.$$

Из подобия треугольников $\Delta x^0 \xi x$ и $\Delta x^0 x \xi^*$ получаем

$$q = \left.\frac{|\xi - x|}{|\xi^* - x|}\right|_{x \in S} = \frac{\left|\xi - x^0\right|}{R}. \tag{6.25}$$

Подставим $q$ в (6.24)

$$g(x,\ \xi) = \frac{R}{4\pi\ \left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x\right|}.$$

<u>**Шаг 4.**</u> Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{R}{4\pi\ \left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x\right|} - \frac{1}{4\pi\ |\xi - x|}.$$

Чтобы избавиться в ответе от $\xi^*$, еще раз воспользуемся симметричностью точек $\xi$ и $\xi^*$

$$\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\xi^* - x^0\right| = R^2$$

и векторным соотношением

$$\xi^* - x \equiv \overrightarrow{x\xi^*} = \overrightarrow{x^0\xi^*} - \overrightarrow{x^0 x} = \frac{R^2}{\left|\xi - x^0\right|^2} \cdot \overrightarrow{x^0\xi} - \overrightarrow{x^0 x},$$

откуда

$$\frac{|\xi^* - x|}{R} = R\left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{\left|\xi - x^0\right|^2}\right|.$$

Окончательно получаем:

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{R\left|\xi - x^0\right| \cdot \left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{\left|\xi - x^0\right|^2}\right|} - \frac{1}{|\xi - x|}\right).$$

Заметим, что для шара единичного радиуса $R = 1$ с центром в $x^0 = 0$ эта формула совпадает с формулой, проверенной нами в № 227 (с. 60). В самом деле,

$$R\left|\xi - x^0\right| \cdot \left.\left|\frac{x - x^0}{R^2} - \frac{\xi - x^0}{\left|\xi - x^0\right|^2}\right|\right|_{\substack{R = 1 \\ x^0 = 0}} = |\xi| \cdot \left|x - \frac{\xi}{|\xi|^2}\right| = \left|x|\xi| - \frac{\xi}{|\xi|}\right|,$$

откуда при $R = 1$ и $x^0 = 0$,

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{R\,|\xi - x^0|\cdot\left|\frac{x-x^0}{R^2} - \frac{\xi-x^0}{|\xi-x^0|^2}\right|} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\left|x|\xi| - \frac{\xi}{|\xi|}\right|} \equiv -E\left(|x|\xi|,\ \frac{\xi}{|\xi|}\right) =$$

$$= \Big[\text{в силу симметричности функции Грина}\Big] = -E\left(\xi|x|,\ \frac{x}{|x|}\right),$$

и для функции Грина справедливо представление № 227:

$$G(x,\ y) = E(x,\ y) - E\left(|x|y,\ \frac{x}{|x|}\right).$$

**Ответ:** $\quad G(x,\ \xi) = \frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{1}{R|\xi-x^0|\cdot\left|\frac{x-x^0}{R^2} - \frac{\xi-x^0}{|\xi-x^0|^2}\right|} - \frac{1}{|\xi-x|}\right).$

## № V. Функция Грина в четверть-плоскости

*Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле в четверть-плоскости $D = \{x_1 > 0,\ \ x_2 > 0\}$.*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & x_1 > 0,\ \ x_2 > 0; \\ u(x_1,\ x_2) = \varphi(x_1,\ x_2), & x_1 = 0,\ x_2 > 0 \quad \text{и} \quad x_1 > 0,\ \ x_2 = 0. \end{cases} \tag{6.26}$$

**Шаг 1.** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20).
Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (3.20) имеем:

$$E(x,\ \xi) = -\ln|\xi - x|, \tag{6.27}$$

$$|\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}.$$

**Шаг 2.** Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi_1^*,\ \ \xi_2^*$ точки, симметричные точке $\xi$ относительно прямых $\{\xi_1 = 0\}$ и $\{\xi_2 = 0\}$, а через $\xi^{**}$ – точку, симметричную точкам $\xi_1^*,\ \xi_1^*$ относительно прямых $\{\xi_2 = 0\}$ и $\{\xi_1 = 0\}$ соответственно (рис. 2).

$$\xi_1^* = (-\xi_1,\ \xi_2),$$
$$\xi_2^* = (\xi_1,\ -\xi_2),$$
$$\xi^{**} = (-\xi_1,\ -\xi_2).$$

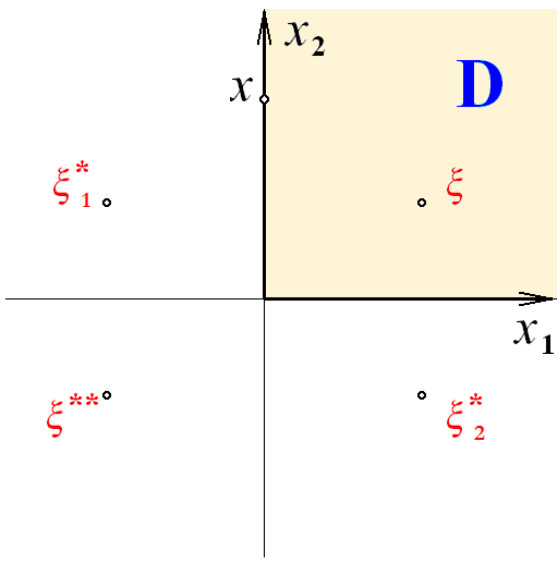



Рис.2. Отражения точки $\xi$ от границ угла

**Шаг 3.** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$g = -E(q_1 x,\ q_1 \xi_1^*) - E(q_2 x,\ q_2 \xi_2^*) + \\ + E(q_3 x,\ q_3 \xi^{**}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \ln \frac{q_3}{q_1 q_2} + \ln \frac{|\xi^{**} - x|}{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|} \right).$$

Чтобы выполнялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x \in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x \in S},$$

то есть

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \left( \ln \frac{q_3}{q_1 q_2} + \ln \frac{|\xi^{**} - x|}{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|} \right)\Bigg|_{x \in S} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\xi - x|}\Bigg|_{x \in S},$$

или, проще,

$$\frac{q_3}{q_1 q_2} = \ln \frac{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|}{|\xi - x| \cdot |\xi^{**} - x|}\Bigg|_{x \in S} \equiv \ln 1 = 0,$$

достаточно взять $q_1 = q_2 = q_3 = 1$.
Таким образом,

$$g = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{|\xi^{**} - x|}{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|}.$$

**Шаг 4.** Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \ln |\xi - x| + \ln \frac{|\xi^{**} - x|}{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{|\xi^{**} - x| \cdot |\xi - x|}{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x \in S} = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{|\xi^{**} - x| \cdot |\xi - x|}{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|} = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln(1 \cdot 1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет $\xi_1^*,\ \xi_2^*,\ \xi^{**}$, не станем (это громоздко, но несложно).

**Ответ:** $G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \ln \frac{|\xi^{**} - x| \cdot |\xi - x|}{|\xi_1^* - x| \cdot |\xi_2^* - x|}$.

### № VI. Функция Грина в полукруге

*Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле в полукруге* $D = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant R,\ \ x_2 > 0\}$.

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & |x| < R, \quad x_2 > 0; \\ u(x_1,\ x_2) = \varphi(x_1,\ x_2), & \begin{array}{l} x_1 \in [-R,\ R],\ \ x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = R,\ \ x_2 > 0. \end{array} \end{cases} \tag{6.28}$$

**Шаг 1.** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20).
Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (3.20) имеем:

$$E(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \ln |\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{6.29}$$

**Шаг 2.** Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд. Обозначаем через $\xi_1^*$ – точку, симметричную точке $\xi$ относительно окружности, через $\xi_1^*$ – точку, симметричную точке $\xi$, относительно прямой $\{\xi_2 = 0\}$, а через $\xi^{**}$ – точку, симметричную точке $\xi_1^*$ относительно прямой $\{\xi_2 = 0\}$, а точке $\xi_1^*$ относительно окружности (рис. 3).

$$\xi_1^* = \frac{R^2}{|\xi|^2}\,\xi, \quad \xi_2^* = (\xi_1,\ -\xi_2),$$

$$\xi^{**} = \frac{R^2}{|\xi|^2}\,\xi_2^*.$$

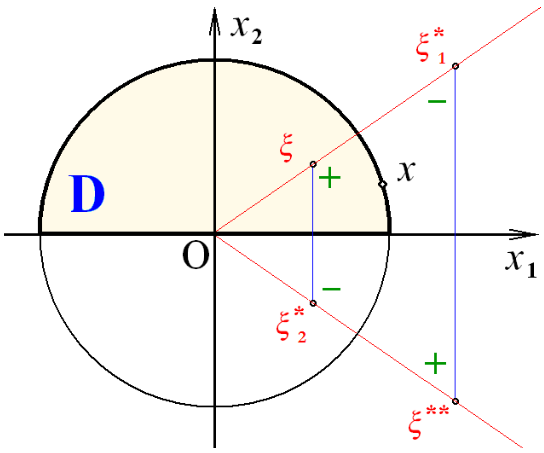


Рис.3. Отражения точки $\xi$ от границ полукруга

**Шаг 3.** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$g = -E(q_1 x,\ q_1\xi_1^*) - E(q_2 x,\ q_2\xi_2^*) + E(q_3 x,\ q_3\xi^{**}) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{q_3}{q_1 q_2} + \ln\frac{|\xi^{**} - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_2^* - x|}\right).$$

Чтобы выполнялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{1}{|\xi - x|}\Bigg|_{x\in S},$$

возьмем заряд внутри полной окружности $q_2 = 1$, а симметричные ему и заряду в точке $\xi$ относительно окружности $q_1 = q_3 = \dfrac{|\xi|}{R}$ (по аналогии с формулой (6.21), с. 77). Тогда заведомо будет выпоняться равенство

$$\ln\frac{q_3}{q_1 q_2} = \ln\frac{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_2^* - x|}{|\xi - x|\cdot|\xi^{**} - x|}\Bigg|_{x\in S} \equiv \ln 1 = 0,$$

из которого следует выполнение краевого условия.
Таким образом,

$$g = \frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{|\xi^{**} - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_2^* - x|}.$$

**Шаг 4.** Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln|\xi - x| + \ln\frac{|\xi^{**} - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_2^* - x|}\right) = \frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{|\xi^{**} - x|\cdot|\xi - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_2^* - x|}.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет $\xi_1^*$, $\xi_2^*$, $\xi^{**}$, не станем (это несложно, но громоздко).
Заметим, что, хотя вид ответа точно такой же, что и в задаче V, функция $G$ здесь иная, поскольку совершенно иначе вычисляются координаты точек $\xi_1^*$ и $\xi^{**}$.

**Ответ:** $G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \ln \frac{|\xi^{**}-x|\cdot|\xi-x|}{|\xi_1^*-x|\cdot|\xi_2^*-x|}$.

## № VII. Функция Грина в четверти круга

*Методом отражений найти функцию Грина задачи Дирихле в четверти круга*
$D = \{x_1^2 + x_2^2 \leqslant R,\ \ x_{1,2} > 0\}$.

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, & |x| < R, \quad x_2 > 0; \\ u(x_1,\ x_2) = \varphi(x_1,\ x_2), & (x_1,\ x_2) \in S. \end{cases} \tag{6.30}$$

**Шаг 1.** Строим фундаментальное решение уравнения Лапласа по формуле (3.20).
Для данного двумерного случая $n = 2$, и по формуле (3.20) имеем:

$$E(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi - x|\,, \qquad |\xi - x| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}. \tag{6.31}$$

**Шаг 2.** Помещаем в точку $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in D$ единичный положительный заряд.

Строим точки $\xi_1^*$, $\xi_2^*$, $\xi_3^*$ – точки, симметричные точке $\xi$ относительно сторон четверти круга. Далее строим точки $\xi_4^*$, $\xi_5^*$, $\xi_6^*$, $\xi_7^*$, симметричные построенным точкам относительно продолжений сторон четверти круга (то есть относительно окружности и прямых $\{\xi_1 = 0\}$, $\{\xi_2 = 0\}$) (рис. 4).

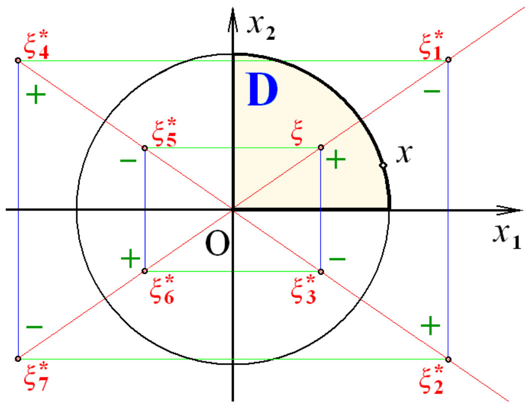



Рис.4. Отражения точки $\xi$ от границ четверти круга

При этом, в «первые отражения» $\xi_1^*$, $\xi_2^*$, $\xi_3^*$ помещаем отрицательные заряды $(-q_1)$, $(-q_2)$, $(-q_3)$, во «вторые отражения» $\xi_4^*$, $\xi_5^*$, $\xi_6^*$ – положительные заряды $q_4$, $q_5$, $q_6$, а в «третье отражение» $\xi_7^*$ – отрицательный заряд $(-q_7)$.

**Шаг 3.** Ищем решение задачи (6.2) – (6.3) в виде

$$\begin{aligned} g = &-E(q_1 x,\ q_1\xi_1^*) + E(q_2 x,\ q_2\xi_2^*) - E(q_3 x,\ q_3\xi_3^*) + \\ &+ E(q_4 x,\ q_4\xi_4^*) - E(q_5 x,\ q_5\xi_5^*) + E(q_6 x,\ q_6\xi_6^*) - E(q_7 x,\ q_7\xi_7^*) = \\ &= \frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{q_2 q_4 q_6}{q_1 q_3 q_5 q_7} + \frac{1}{2\pi}\ \ln\frac{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}. \end{aligned}$$

Чтобы выполнялось краевое условие

$$g(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = -E(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \frac{1}{2\pi}\ \ln \frac{1}{|\xi - x|}\Bigg|_{x\in S},$$

возьмем заряды внутри полной окружности $q_3 = q_5 = q_6 = 1$, а симметричные им и заряду в точке $\xi$ относительно окружности $q_1 = q_2 = q_4 = q_7 = \dfrac{|\xi|}{R}$ (по аналогии с формулой (6.21), с. 77). Таким образом, $\ln \frac{q_2 q_4 q_6}{q_1 q_3 q_5 q_7} = 0$ и

$$g = \frac{1}{2\pi}\ \ln \frac{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}.$$

**Шаг 4.** Строим функцию Грина по формуле $G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi)$.

$$G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \left(\ln|\xi - x| + \ln \frac{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ \ln \frac{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|\cdot|\xi - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}.$$

Здесь легко заметить, что выбор $q_1,\ \ldots,\ q_7$ был удачен: в самом деле, тогда, как и требует определение функции Грина,

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = \frac{1}{2\pi}\ \ln \frac{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|\cdot|\xi - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}\Bigg|_{x\in S} = \ln(1) = 0.$$

Приводить полученную функцию Грина к виду, где нет $\xi_1^*,\ \ldots,\ \xi_7^*$, не станем (это не очень сложно, но очень громоздко).

**Ответ:** $\quad G(x,\ \xi) = \frac{1}{2\pi}\ \ln \frac{|\xi_2^* - x|\cdot|\xi_4^* - x|\cdot|\xi_6^* - x|\cdot|\xi - x|}{|\xi_1^* - x|\cdot|\xi_3^* - x|\cdot|\xi_5^* - x|\cdot|\xi_7^* - x|}.$

## 7. Введение в теорию потенциала

### 7.1. Объемный потенциал. Определение и свойства

Вспомним, что мы называем **фундаментальным решением уравнения Лапласа в $n$-мерном пространстве** функцию:

$$E(x,\ \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi - x|, & \text{при } n = 2; \\ -\frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ |\xi - x|^{n-2}}, & \text{при } n \geqslant 3. \end{cases} \tag{7.1}$$

Теперь мы можем дать определение объемного потенциала.

**Опр. 7.1. Объемным потенциалом (потенциалом объемных масс)** с плотностью $\mu(\xi)$ в ограниченной области $D$ называется функция:

$$u(x) = \int\limits_D E(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi. \tag{7.2}$$

**Опр. 7.2. Ньютоновым объемным потенциалом** с плотностью $\mu(\xi)$ в ограниченной области $D$ мы будем называть функцию:

$$u_N(x) = \int\limits_D E_N(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi, \tag{7.3}$$

где

$$E_N(x,\ \xi) = -\,\omega_n\, E(x,\ \xi)\ - \tag{7.4}$$

обычный Ньютонов потенциал (см. опр. 3.3, с. 41).

*Замечание* 7.1 (физический смысл).
С учетом физического смысла Ньютонова потенциала (см. с. 41) Ньютонов объемный потенциал означает

- в 3-мерном случае – потенциал электрического поля, созданного заряженным телом $D$ с плотностью зарядов $\mu(\xi)$, либо гравитационного поля, созданного телом $D$ с плотностью масс $\mu(\xi)$;
- в 2-мерном случае – потенциал электрического поля, созданного заряженным бесконечным вдоль оси $\xi_3$ цилиндром с сечением $D$ с плотностью зарядов $\mu(\xi_1,\ \xi_2)$ (не зависящей от координаты $\xi_3$), либо гравитационного поля, созданного таким цилиндром с плотностью масс $\mu(\xi_1,\ \xi_2)$.

**Утверждение 7.1** (свойства объемного потенциала)**.**
*Пусть* $D \in \mathbb{R}^n$ *– ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Функция* $u(x)$ *задается фомулой* (7.2)*, где* $\mu(\xi) \in C^1(D) \bigcap C\left(\overline{D}\right)$.

*Тогда:* ***1.***

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = \begin{cases} \infty, & n = 2, \quad \text{при} \quad \mu(\xi): \ \int\limits_D \mu(y)dy \neq 0; \\ 0, & n = 2, \quad \text{при} \quad \mu(\xi): \ \int\limits_D \mu(y)dy = 0; \\ 0, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

**2.** *Функция* $u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ *и равенство* (7.2) *можно дифференцировать по* $x$ *(1 раз), беря производную в правой части под знаком интеграла. Вторые производные потенциала* $u(x)$ *при переходе через границу терпят разрыв*

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right|_{\substack{x\in D\\ x\to x^0\in S}} - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right|_{\substack{x\in \mathbb{R}^n\setminus\overline{D}\\ x\to x^0\in S}} = \frac{\mu(x^0)}{n}. \tag{7.5}$$

*В важном частном случае, когда* $u = u(r)$*, формула* (7.5) *принимает вид*

$$\left.\frac{d^2 u}{dr^2}\right|_{\substack{x\in D\\ x\to x^0\in S}} - \left.\frac{d^2 u}{dr^2}\right|_{\substack{x\in \mathbb{R}^n\setminus\overline{D}\\ x\to x^0\in S}} = \mu(x^0). \tag{7.6}$$

<u>**3.**</u> *Функция $u(x)$ является решением уравнения Пуассона*

$$\Delta u(x) = \begin{cases} \mu(x), & x \in D; \\ 0, & x \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{7.7}$$

<u>**4.**</u> *Функция*

$$v(x) = \int\limits_D G(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi, \tag{7.8}$$

*(где $G(x,\ \xi)$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в $D$) является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона*

$$\begin{cases} \Delta v(x) = \mu(x), & x \in D; \\ v(x)\Big|_{x\in\partial D} = 0, & x \in S = \partial D. \end{cases} \tag{7.9}$$

<u>**5.**</u> *Если плотность $\mu$ зависит только от $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, то объемный потенциал $u(x)$ также есть функция только $r$:*

$$u = u(r).$$

*Доказательство.*

**1.** При $x \notin \overline{D}$ функция $E(x,\ \xi)$ непрерывна по $\xi$ на $\overline{D}$. По теореме о среднем, найдется $\xi^* \in D$ такая, что

$$u(x) = \int\limits_D E(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi = E(x,\ \xi^*)\int\limits_D \mu(\xi)d\xi =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ \ln|\xi^* - x| \cdot \int\limits_D \mu(\xi)d\xi, & \text{при}\ \ n = 2; \\ -\ \frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ |\xi^*-x|^{n-2}} \cdot \int\limits_D \mu(\xi)d\xi, & \text{при}\ \ n \geqslant 3. \end{cases}$$

В силу ограниченности области $D$, при $|x| \to \infty$ и произвольной $\xi^* \in D$ выражение $|x - \xi^*|$ стремится к $\infty$. Поэтому в двумерном случае в пределе

- при $\int\limits_D \mu(y)dy \neq 0$ из-за $\ln|\xi^* - x| \to \infty$ получим $\infty$,
- при $\int\limits_D \mu(y)dy = 0$ получим 0,

а в трех- и более мерном случае – из-за $\frac{1}{\omega_n\ (n-2)\ |\xi^*-x|^{n-2}} \to 0$ имеем нуль (так как интеграл от ограниченной $\mu$ ограничен).

**2.** Не вдаваясь в подробности, скажем, что факт $u(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ следует из общей теории несобственных интегралов. (Интересующемуся читателю порекомендуем почитать, например, §1.1, пункт 4 книги [4].)

В свою очередь, факт скачка вторых производных доказывается так: вычисляется 2-я производная внутри $D$ путем вырезания маленького шарика вокруг точки $x$ и устремления диаметра этого шарика к нулю, в результате чего получается

$$\left.\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2}\right|_{x\in D} = v.p.\int\limits_D \mu(y)\frac{\partial^2 E(x,\ y)}{\partial x_k^2}\,dy + \frac{\mu(x)}{n}, \qquad x\in D. \tag{i}$$

Затем вычисляется 2-я производная вне $D$, там у $E$ нет особенностей, поэтому дифференцировать можно по параметру под знаком интеграла:

$$\left.\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k^2}\right|_{x\in R^n\setminus\overline{D}} = \int\limits_D \mu(y)\frac{\partial^2 E(x,\ y)}{\partial x_k^2}\,dy, \qquad x\in \mathbb{R}^n\setminus\overline{D}. \tag{ii}$$

Требуемая формула (7.5) получается, если в двух последних равенствах устремить $x\to x^0\in S$ и вычесть (ii) из (i). (Подробный вывод формулы (i) в случае $n=3$ приведен, например, в книге [9], с. 363 – 366.)
Формула (7.6) получается для $u=u(r)$ из равенства

$$\Delta u(r) = u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) \equiv \sum_{k=1}^n u_{x_k x_k},$$

откуда внутри тела получаем

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = \mu(x),$$

а вне тела

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = 0.$$

Устремляя теперь $x\to x^0\in S$, получим в силу (7.5):

$$\left.u''(r)\right|_{\substack{x\in D\\ x\to x^0\in S}} + \left.\frac{n-1}{r}u'(r)\right|_{\substack{x\in D\\ x\to x^0\in S}} -$$

$$- \left.u''(r)\right|_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{D}\\ x\to x^0\in S}} - \left.\frac{n-1}{r}u'(r)\right|_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{D}\\ x\to x^0\in S}} = \mu(x^0).$$

Осталось вспомнить, что первая производная $u'(r)$ непрерывна в $\mathbb{R}^n$, и мы получаем

$$\left.u''(r)\right|_{\substack{x\in D\\ x\to x^0\in S}} - \left.u''(r)\right|_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{D}\\ x\to x^0\in S}} = \mu(x^0).$$

**3.** Требуемые равенства сразу следуют из формул (i) и (ii), если их просуммировать по $k$ от 1 до $n$. Но мы выведем их иначе, чтобы еще раз проиллюстрировать применение аппарата теории обощенных функций и пользу доказанного нами в № I Семинара К 6 – 3 равенства

$$\Delta E(x,\ \xi) = \delta(x-\xi), \qquad\qquad n \geqslant 2. \tag{7.10}$$

Применим к равенству (7.2) оператор Лапласа:

$$\Delta_x u(x) = \Delta_x \int\limits_D E(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi = \int\limits_D \Delta_x E(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi =$$

$$= \Big[\text{в силу (7.10)}\Big] = \int\limits_D \delta(x-\xi)\mu(\xi)d\xi = \mu(x).$$

(Вопрос о правомерности дифференцирования несобственного при $x \in D$ интеграла по параметру, как требующий объемного дополнительного исследования, мы рассматривать не станем. И заметим, что именно в этом месте нам потребовалась непрерывная дифференцируемость $\mu(\xi)$. Для функций $\mu(\xi) \in C\left(\overline{D}\right)$ равенство $\Delta u(x) = \mu(x),\ \ x \in D$ может быть неверно.) Заметим, что полученная формула дает нам ответ сразу и при $x \in D$, и при $x \notin \overline{D}$, так как там плотность

$$\mu(x) \equiv 0, \qquad\qquad x \notin \overline{D}.$$

**4.** Вспомним, что

**Функцией Грина** $G(x,\ \xi)$ **задачи Дирихле для уравнения Лапласа** называется функция $G(x,\ \xi),\quad x \neq \xi \in \overline{D}$, обладающая свойствами:

1) Она имеет вид

$$G(x,\ \xi) = E(x,\ \xi) + g(x,\ \xi),$$

где $E(x,\ \xi)$ – Фундаментальное решение уравнения Лапласа, а функция $g(x,\ \xi)$ гармонична в $D$ как по $x$, так и по $\xi$:

$$\Delta_x g(x,\ \xi) = \Delta_\xi g(x,\ \xi) = 0, \qquad x, \xi \in D.$$

2) $$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = 0, \qquad G(x,\ \xi)\Big|_{\xi\in S} = 0.$$

Аналогично пункту 2, применим к равенству (7.8) оператор Лапласа:

$$\Delta_x v(x) = \Delta_x \int\limits_D G(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi \equiv \Delta_x \int\limits_D \left(E(x,\ \xi) + g(x\ \xi)\right)\mu(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_D \Delta_x E(x,\ \xi)\mu(\xi)d\xi + \int\limits_D \underbrace{\Delta_x g(x,\ \xi)}_{=0}\mu(\xi)d\xi =$$

$$= \Big[\text{в силу (7.10)}\Big] = \int\limits_D \delta(x-\xi)\mu(\xi)d\xi + 0 = \mu(x).$$

Поэтому функция $v(x)$ есть решение того же уравнения Пуассона $\Delta v(x) = 0$. А граничное условие $v(x)\Big|_{x\in\partial D} = 0$ сразу следует из пункта 2 определения функции Грина:

$$G(x,\ \xi)\Big|_{x\in S} = 0, \qquad G(x,\ \xi)\Big|_{\xi\in S} = 0.$$

**5.** См. № I, с. 99. □

Вспомним, что в силу теоремы 5.1, с. 59, решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in D, \\ u(x)\Big|_{x\in S} = \varphi(x), & x \in S \end{cases}$$

представляется в виде:

$$u(x) = \int\limits_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \nu_\xi}\varphi(\xi)dS_\xi. \tag{5.2}$$

Объединив этот результат с только что доказанными равенствами (7.9), получаем:

**Утверждение 7.2** (решение I-ой краевой задачи для уравнения Лапласа)**.**

*Пусть* $D \in \mathbb{R}^n$ *– ограниченная область с кусочно-гладкой границей. Функция* $G(x,\ \xi)$ *– функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в* $D$*.*
*Тогда функция*

$$u(x) = \int\limits_D G(x,\ \xi)f(\xi)d\xi + \int\limits_S \frac{\partial G(x,\ \xi)}{\partial \nu_\xi}\varphi(\xi)dS_\xi \tag{7.11}$$

*является решением I-ой краевой задачи для уравнения Пуассона*

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in D; \\ u(x)\Big|_{x\in\partial D} = \varphi(x), & x \in S = \partial D. \end{cases} \tag{7.12}$$

### 7.2. Примеры решения задач

**№ 260$^M$.**
*Показать справедливость равенств*

$$\int\limits_S \frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \vec{n}_x}\, ds_x = \begin{cases} 1, & y \in D; \\ 0, & y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}, \end{cases} \tag{7.13}$$

*где $D$ – любая ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $S$.*

**1.** Рассмотрим $y \in D$. По основной формуле Грина

$$u(x) = \int\limits_S \left( u\, \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi} - E(x,\ \xi)\, \frac{\partial u(\xi)}{\partial \vec{n}_\xi} \right)\, dS_\xi + \int\limits_D E(x,\ y)\, \Delta u(y)\, dy, \tag{7.14}$$

взяв $u(x) \equiv 1$, немедленно получаем:

$$1 = \int\limits_S \frac{\partial E(x,\ \xi)}{\partial \vec{n}_\xi}\, dS_\xi.$$

В силу симметричности функции Грина, и переименовав $x$ в $y$, а $\xi$ в $x$, получим требуемое равенство при $y \in D$.

**2.** Рассмотрим $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$. По второй формуле Грина

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\ dx = \int\limits_S \left( v\, \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} - u\, \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} \right)\, dS, \tag{7.15}$$

примененной к $u \equiv 1$ и $v(x,\ y) = E(x,\ y)$, в силу гармоничности $E(x,\ y)$ всюду, кроме точек $x = y$, получим:

$$\int\limits_D \left( v\, \underbrace{\Delta(1)}_{=0}\ -\ \underbrace{\Delta_x E(x,\ y)}_{=0} \right)\, dx = \int\limits_S \left( E(\xi,\ y)\, \underbrace{\frac{\partial(1)}{\partial \vec{n}}}_{=0}\ -\ \frac{\partial E(\xi,\ y)}{\partial \vec{n}} \right)\, dS,$$

откуда $\int\limits_S \frac{\partial E(x,\, y)}{\partial \vec{n}_x}\, ds_x = 0$ при $y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{D}$.

**№ 261. Формула Гаусса.**
*Для потенциала $u(x)$ объемных масс, распределенных по области $D \subset \mathbb{R}^n$ с плотностью $\mu(x)$, доказать справедливость формулы Гаусса*

$$\int\limits_S \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}_x}\, dS_x = \int\limits_{D \bigcap G} \mu(y) dy, \tag{7.16}$$

*где $G$ – любая ограниченная область $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $S$.*

Подставим в $\int\limits_S \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}_x} \quad ds_x$ функцию объемного потенциала $u(x) = \int\limits_D E(x,\ y)\mu(y)dy$:

$$\int\limits_S \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}_x}\, dS_x = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \int\limits_D E(x,\ y)\mu(y)dy\, dS_x =$$

$$= \int\limits_S \int\limits_D \frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \vec{n}_x}\, \mu(y)dy\, dS_x = \int\limits_D \mu(y)dy \int\limits_S \frac{\partial E(x,\ y)}{\partial \vec{n}_x}\, dS_x =$$

$$= \Big[\text{в силу формулы (7.13)}\Big] = \int\limits_{D\bigcap G} \mu(y)dy.$$

*Замечание* 7.2.
При совпадающих областях $D = G$ формула Гаусса принимает вид формулы Гаусса – Остроградского:

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}_x}\, dS_x = \int\limits_D \Delta u(y)dy.$$

Однако у нее более широкая область применимости, ведь области $D$ и $G$ могут располагаться друг относительно друга практически произвольным образом.

**№ 268$^M$.**

*Показать, что функция*

$$u(x,\ y,\ z) = \begin{cases} \frac{r^2}{6} - \frac{R^2}{2}, & r \leqslant R, \\ -\frac{R^3}{3r}, & r \geqslant R, \end{cases} \qquad (7.17)$$

*где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, является потенциалом $u(x,\ y,\ z)$ объемных масс, распределенных по шару $r < R$ с плотностью $\mu = 1$:*

*а) решая уравнение Пуассона $\Delta u = \mu$,* *б) применяя формулу Гаусса.*

**а)** Воспользуемся свойством 5 объемного потенциала. Поскольку данная нам функция $\mu$ есть функция только радиуса $r$, то и искомый потенциал будет функцией от $r$:

$$u = u(r).$$

А так как оператор Лапласа в этом случае и для $n = 3$ имеет вид

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r^2}\left(r^2\, u_r\right)_r,$$

то общее решение ОДУ

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(r^2\, u'(r)\right)' = 0, \qquad\qquad r > R,$$

как мы убедились при выводе фундаментального решения (с. 41),

$$u = \frac{c_1}{r} + c_2, \qquad\qquad r > R. \tag{i}$$

Теперь найдем общее решение внутри шара:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(r^2\, u'(r)\right)' = 1, \qquad\qquad r < R.$$

Домножаем на $r^2$ и интегрируем первый раз:

$$\left(r^2\, u'(r)\right)' = r^2, \qquad \Longrightarrow \qquad r^2\, u'(r) = \frac{r^3}{3} + c_3,$$

откуда $u'(r) = \frac{r}{3} + \frac{c_3}{r^2}$ и, наконец,

$$u = \frac{r^2}{6} \, - \, \frac{c_3}{r} + c_4, \qquad\qquad r < R. \tag{ii}$$

Осталось найти значения констант, для которых выполяняются свойства 2 – 3 объемного потенциала, то есть

1) $u(r) \to 0$ при $r \to \infty$,
2) $u(r)$ была непрерывна при $r = R$ и ограничена при $r \leqslant R$ (это следует из непрерывности $u$ в $\overline{D}$),
3) $u'(r)$ была непрерывна при $r = R$,

1) Требование $u(r) \equiv \frac{c_1}{r} + c_2 \to 0$ при $r \to \infty$ сразу дает нам

$$c_2 = 0. \tag{iv}$$

2) Непрерывность $u(r)$ при $r = R$ означает (с учетом (iv))

$$\frac{R^2}{6} \, - \, \frac{c_3}{R} + c_4 = \frac{c_1}{R},$$

откуда получаем уравнение

$$c_1 + c_3 - Rc_4 = \frac{R^3}{6}.$$

А условие ограниченности в шаре сразу дает

$$c_3 = 0, \tag{v}$$

откуда

$$c_1 - Rc_4 = \frac{R^3}{6}. \tag{vi}$$

3) Непрерывность $u'(r)$ при $r = R$ дает нам (с учетом $c_3 = 0$)

$$\frac{R}{3} = -\frac{c_1}{R^2},$$

откуда

$$c_1 = -\frac{R^3}{3}. \tag{vii}$$

Из уравнений (iv) – (vii) получаем:

$$c_1 = -\frac{R^3}{3}, \qquad c_2 = 0, \qquad c_3 = 0, \qquad c_4 = -\frac{R^2}{2}.$$

В результате получаем требуемое выражение для $u(r)$

$$u(x,\ y,\ z) = \begin{cases} \frac{r^2}{6} - \frac{R^2}{2}, & r \leqslant R, \\ \\ -\frac{R^3}{3r}, & r \geqslant R, \end{cases} \tag{7.17}$$

Заметим, что скачок второй производной для найденного потенциала

$$u''(R-0) - u''(R+0) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 = \mu(R),$$

как и должно быть в соответствии с формулой скачка (7.6).

<u>**б)**</u> Пусть объемным потенциалом для заданной плотности $\mu(r)$ является некоторая функция $v(r)$. Рассмотрим шар $B_\rho$ радиуса $\rho$ с центром в 0. Применим к нему Формулу Гаусса:

$$\int\limits_S \frac{\partial v(x)}{\partial \vec{n}_x}\, dS_x = \int\limits_{D\bigcap G} \mu(y) dy,$$

с совпадающими областями $G = D = B_\rho$ и $S = S_\rho = \partial B_\rho$, учитывая, что $\frac{\partial v(x)}{\partial \vec{n}_x} \equiv v'(r)$:

$$\underbrace{\int\limits_{S_\rho} v'(\rho) ds}_{=v'(\rho)\cdot 4\pi\rho^2} = \int\limits_{B_\rho} \mu(r) dx. \tag{i}$$

Так как

$$\mu(r) = \begin{cases} 1, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

из (i) получаем

$$4\pi\rho^2 v'(\rho) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho^3}{3}, & \rho \leqslant R, \\ \\ \frac{4\pi R^3}{3}, & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

Поделим на $4\pi\rho^2$:

$$v'(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{3}, & \rho \leqslant R, \\ \frac{R^3}{3\rho^2}, & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$v(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho^2}{6} + c_1, & \rho \leqslant R, \\ -\frac{R^3}{3\rho} + c_2, & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

Из условия непрерывности объемного потенциала (свойство 2) находим первое уравнение для констант $c_1$ и $c_2$:

$$v(R-0) - v(R+0) = \frac{R^2}{6} + c_1 - \left(-\frac{R^2}{3} + c_2\right) = 0, \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad c_1 = c_2 - \frac{R^2}{2}. \tag{ii}$$

Наконец, из условия $v(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$ получаем, что $c_2 = 0$, и из (ii) сразу вытекает

$$c_1 = -\frac{R^2}{2}.$$

Таким образом, объемный потенциал, соответствующий заданной плотности $\mu$, имеет вид

$$v(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho^2}{6} - \frac{R^2}{2}, & \rho \leqslant R, \\ -\frac{R^3}{3\rho}, & \rho \geqslant R, \end{cases}$$

то есть совпадает с $u$ из равенства (7.17).

### 7.3. Теоремы Ньютона

Из полученного в № 268 результата легко получаются известные 1-я и 2-я теоремы Ньютона.

**Теорема 7.1** (первая теорема Ньютона).
*Потенциал (гравитационного поля) вне шара однородной плотности равен потенциалу точки с той же массой.*

*Доказательство.* Пусть плотность шара постоянна и равна $\mu_0$. Тогда все выкладки, проделанные при решении № $268^M$, остаются в силе, если их умножить на $\mu_0$. Тогда потенциал вне шара будет равен

$$-\frac{R^3\mu_0}{3r} = -\frac{M}{4\pi r}, \qquad r \geqslant R,$$

массе шара, деленной на $-4\pi r$. Как видно, он зависит **только от массы** и не зависит от радиуса. Устремляя радиус $R$ к нулю, получаем доказываемое утверждение. $\square$

**Теорема 7.2** (вторая теорема Ньютона).
*Потенциал (гравитационного поля) внутри однородного шарового слоя равен константе.*

*Доказательство.* Рассмотрим 2 шара с постоянной плотностью $\mu_0$ радиусов $R_1$ и $R_2 > R_1$. Тогда все выкладки, проделанные при решении № $268^M$, остаются в силе, если их умножить на $\mu_0$, и потенциал внутри шара $B_{R_1}$ радиуса $R_1$ будет равен

$$\left(\frac{r^2}{6} - \frac{R_1^2}{2}\right)\mu_0, \qquad r \leqslant R_1,$$

а внутри шара $B_{R_2}$ радиуса $R_2$ –

$$\left(\frac{r^2}{6} - \frac{R_2^2}{2}\right)\mu_0, \qquad r \leqslant R_2.$$

Вычитая из первого равенства второе при $r < R_1$, находим потенциал внутри шарового слоя однородной плотности $\mu = \mu_0$:

$$\frac{(R_2^2 - R_1^2)\mu_0}{2} \equiv \text{const}\,, \qquad r < R_1,$$

что и доказывает утверждение. $\square$

*Замечание* 7.3.
Доказав вторую теорему, Ньютон поставил вопрос: *внутри каких однородных тел, полученных как разность двух подобных тел (помимо шарового слоя), потенциал равен постоянной?*
Ему удалось доказать (уже весьма нетривиальным образом), что этим свойством обладает эллиплический слой, то есть разность двух подобных однородных эллипсоидов с общим центром и фокальной прямой.
Гораздо позже было доказано обратное утверждение: ни в каких однородных телах типа слоя, кроме эллиптического слоя, потенциал не может быть постоянным.

**№ 267.**
*Показать, что потенциал $u(x,\ y)$ объемных масс, распределенных по кругу $r^2 = x^2 + y^2 < R^2$ с плотностью $\mu = 1$, дается формулой*

$$u(x,\ y) = \begin{cases} \frac{r^2}{4} - \ \frac{R^2}{4}, & r \leqslant R, \\ \frac{R^2}{2}\ \ln\frac{r}{R}, & r \geqslant R: \end{cases} \tag{7.18}$$

*а) решая уравнение Пуассона $\Delta u = \mu$, б) применяя формулу Гаусса.*

**а)** Воспользуемся свойством 5 объемного потенциала. Поскольку данная нам функция $\mu$ есть функция только радиуса $r$, то и искомый потенциал будет функцией от $r$:

$$u = u(r).$$

А так как оператор Лапласа в этом случае и для $n = 2$ имеет вид

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r}\,(r\ u_r)_r\,,$$

то общее решение ОДУ

$$\Delta u = \frac{1}{r}\,(r\ u'(r))' = 0, \qquad r > R,$$

как мы убедились при выводе фундаментального решения (с. 40),

$$u = c_1 \ln r + c_2, \qquad r > R. \tag{i}$$

Теперь найдем общее решение внутри круга:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\,(r\ u'(r))' = 1, \qquad r < R.$$

Домножаем на $r$ и интегрируем первый раз:

$$(r\ u'(r))' = r, \qquad \Longrightarrow \qquad r\ u'(r) = \frac{r^2}{2} + c_3,$$

откуда $u'(r) = \frac{r}{2} + \frac{c_3}{r}$ и, наконец,

$$u = \frac{r^2}{4}\ + c_3 \ln r + c_4, \qquad r < R. \tag{ii}$$

Осталось найти значения констант, для которых выполняются свойства 2 – 3 объемного потенциала, то есть

1) $u(r) \to +\infty$ при $r \to \infty$ (так как интеграл от $\mu$ по кругу не равен нулю),

2) $u(r)$ была непрерывна при $r = R$ и ограничена при $r \leqslant R$ (это следует из непрерывности $u$ в $\overline{D}$),

3) $u'(r)$ была непрерывна при $r = R$.

1) Требование $u(r) \equiv c_1 \ln r + c_2 \to +\infty$ при $r \to \infty$ не дает нам никакой информации, кроме

$$c_1 \neq 0. \tag{iv}$$

2) Непрерывность $u(r)$ при $r = R$ означает

$$\frac{R^2}{4} + c_3 \ln R + c_4 = c_1 \ln R + c_2,$$

откуда получаем уравнение

$$(c_1 - c_3) \ln R + c_2 - c_4 = \frac{R^2}{4}.$$

А условие ограниченности в круге сразу дает

$$c_3 = 0, \tag{v}$$

откуда

$$c_1 \ln R + c_2 - c_4 = \frac{R^2}{4}. \tag{vi}$$

3) Непрерывность $u'(r)$ при $r = R$ дает нам (с учетом $c_3 = 0$)

$$\frac{R}{2} = \frac{c_1}{R},$$

откуда

$$c_1 = \frac{R^2}{2}. \tag{vii}$$

Из уравнений (v) – (vii) получаем:

$$c_1 = \frac{R^2}{2}, \qquad c_2 - c_4 = -\frac{R^2}{2} \ln R + \frac{R^2}{4}, \qquad c_3 = 0.$$

В результате получаем выражение для $u(r)$

$$u(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{4} + c_4, & r \leqslant R, \\ \frac{R^2}{2} \ln r + c_4 - \frac{R^2}{2} \ln R + \frac{R^2}{4}, & r \geqslant R. \end{cases} \tag{viii}$$

Выбор $c_4$ можно осуществить из соображений размерности: выражение $\frac{r^2}{4} + c_4$ должно состоять из слагаемых одной размерности, как и выражение $\frac{R^2}{2} \ln r + c_4 - \frac{R^2}{2} \ln R + \frac{R^2}{4}$. Этому условию удовлетворяет только единственное значение:

$$c_4 = -\frac{R^2}{4}.$$

При таком выборе $c_4$ потенциал (viii) совпадает с (7.18).

Заметим, что скачок второй производной для найденного потенциала

$$u''(R-0) - u''(R+0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \mu(R),$$

как и должно быть в соответствии с формулой скачка (7.6) (и это условие не дает нам никакой информации про значение $c_4$.

б) Пусть объемным потенциалом для заданной плотности $\mu(r)$ является некоторая функция $v(r)$. Рассмотрим круг $B_\rho$ радиуса $\rho$ с центром в 0. Применим к нему Формулу Гаусса (7.16):

$$\int\limits_S \frac{\partial v(x)}{\partial \vec{n}_x}\, dS_x = \int\limits_{D\bigcap G} \mu(y)dy,$$

с совпадающими областями $G = D = B_\rho$ и $S = S_\rho = \partial B_\rho$, учитывая, что $\frac{\partial v(x)}{\partial \vec{n}_x} \equiv v'(r)$:

$$\underbrace{\int\limits_{S_\rho} v'(\rho)ds}_{=v'(\rho)\cdot 4\pi\rho^2} = \int\limits_{B_\rho} \mu(r)dx. \tag{i}$$

Так как

$$\mu(r) = \begin{cases} 1, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

из (i) получаем

$$2\pi\rho v'(\rho) = \begin{cases} \pi\rho^2, & \rho \leqslant R, \\ \pi R^2, & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

Поделим на $2\pi\rho$:

$$v'(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{2}, & \rho \leqslant R, \\ \frac{R^2}{2\rho}, & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$v(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho^2}{4} + c_1, & \rho \leqslant R, \\ \frac{R^2}{2}\ \ln\rho + c_2, & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

Из условия непрерывности объемного потенциала (свойство 2) находим первое уравнение для констант $c_1$ и $c_2$:

$$v(R-0) - v(R+0) = \frac{R^2}{4} + c_1 - \left(\frac{R^2}{2}\ \ln R + c_2\right) = 0, \qquad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \qquad c_1 = c_2 - \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{2}\ \ln R. \tag{ii}$$

Наконец, из соображений размерности вытекает

$$c_1 = -\frac{R^2}{4}, \qquad c_2 = -\frac{R^2}{2}\ \ln R.$$

Таким образом, объемный потенциал, соответствующий заданной плотности $\mu$, имеет вид

$$v(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho^2}{4} - \frac{R^2}{4}, & \rho \leqslant R, \\ \frac{R^2}{2}\ \ln\frac{\rho}{R}, & \rho \geqslant R. \end{cases}$$

то есть совпадает с $u$ из равенства (7.18).

**№ I.** *Показать, что если плотность $\mu\,(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ зависит от $x$ только через $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, и ограниченная область $D$ сферически симметрична, то есть переходит в себя при любых поворотах вокруг начала координат, то объемный потенциал $u(x)$ также есть функция только $r$:*

$$u = u(r).$$

*Доказательство.* В первую очередь заметим, что сферически симметричная область может представлять собой только:

- шар с центром в нуле,
- шаровой слой с центром в нуле,
- объединение шара и шаровых слоев[1] с центром в нуле.

В любом случае ограниченная область $D$ содержится в некотором шаре.

Пусть $B_R$ – шар с центром в нуле, содержащий область $D$, и пусть функция $u(x)$

$$u(x) = \int\limits_{B_R} E(|x-z|)\mu(z)dz \tag{i}$$

является объемным потенциалом для заданной плотности $\mu(r)$.

Обозначим через $A$ матрицу произвольного поворота системы координат:

$$z = Ay.$$

Тогда якобиан перехода

$$\frac{D(z)}{D(y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial z_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \det A.$$

[1] Есть еще сферы, но они являются не областями в $\mathbb{R}^n$, а поверхностями.

Из линейной алгебры известно, что линейный оператор, переводящий ортонормированный базис в ортонормированный базис, имеет **ортогональную матрицу**, то есть такую, для которой справедливо равенство

$$A^T = A^{-1}, \qquad \text{или} \qquad AA^T = A^TA = E,$$

где $E$ – единичная матрица. Поэтому

$$\det A = \det A^T = \det A^{-1} = \pm 1.$$

(Строго говоря, определитель $\det A$ может быть в нашем случае равен только $+1$, так как поворот сохраняет ориентацию системы координат. Однако, нам это не очень важно, поскольку при замене переменных под знаком интеграла якобиан появляется только под знаком модуля.)
Итак, якобиан перехода

$$\left|\frac{D(z)}{D(y)}\right| = |\det A| = 1. \tag{ii}$$

Нам понадобится еще одно вспомогательное равенство[1]:

$$|Ax - Az| = |A(x-z)| = \|A\| \cdot |x-z| = |x-z|. \tag{iii}$$

Подействуем на точку $x$ в равенстве (i) оператором поворота $A$:

$$u(Ax) = \int\limits_{B_R} E\left(|Ax - z|\right)\, \mu(z)\, dz = \Big[\text{сделаем замену } z = Ay\Big] =$$

$$= \int\limits_{A^{-1}(B_R)} E\left(|Ax - Ay|\right)\, \mu(Ay)\, \left|\frac{Dz}{Dy}\right| dy =$$

$$= \Big[\text{в силу (ii), (iii) и сферической симметричности } B_R\Big] =$$

$$= \int\limits_{B_R} E\left(|x-y|\right)\, \mu(Ay)\, dy = \Big[|Ay| = |y| \;\Rightarrow\; \mu(Ay) = \mu(y)\Big] =$$

$$= \int\limits_{B_R} E\left(|x-y|\right)\, \mu(y)\, dy = u(x).$$

Итак, если точка $Ax$ получена в результате произвольного поворота системы координат из точки $x$, то есть если $|Ax| = |x|$, то

$$u(Ax) = u(x).$$

$\square$

[1] Норма оператора $A$ равна единице, поскольку поворот переводит единичную сферу $S_1$ в себя, а по определению

$$\|A\| = \sup_{x \in S_1} \|Ax\| = \Big[\text{в нашем случае}\Big] = \sup_{x \in S_1} 1 = 1.$$

**№ 263.**
*Найти плотность $\mu$ масс, распределенных по области $D$, если известно, что объемный потенциал $u(x)$ этих масс в $D$*

$$u(x) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2 - 1. \tag{7.19}$$

Поскольку данная функция $u(x,\ y,\ z) = r^4 - 1$ есть функция только от $r$ в 3-мерном пространстве, то

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r = u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r = 12r^2 + \frac{2}{r}\cdot 4r^3 = 20r^2.$$

**Ответ:** $\mu(x,\ y,\ z) = 20\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$.

**№ 270.**
*Потенциал $u(x,\ y)$ объемных масс, распределенных по кругу $r^2 = x^2 + y^2 < 1$, задается внутри круга формулой*

$$u(x,\ y) = \frac{1}{16}\left(r^4 - 1\right). \tag{7.20}$$

*Найти массу $M$ в круговом кольце $K = \left\{\frac{1}{4} < x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\right\}$.*

**1. Нахождение $\mu$.** Поскольку данная функция

$$u(x,\ y) = u(r) = \frac{1}{16}\left(r^4 - 1\right),$$

зависит только от полярного радиуса, то

$$\Delta u(r) = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \frac{1}{16}\left(12r^2 + \frac{4r^3}{r}\right) = r^2.$$

Итак, функция $\mu$ имеет вид:

$$\mu(x,\ y) = \begin{cases} r^2, & r < 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

**2. Нахождение $M$.** Масса фигуры равна интегралу от ее плотности по площади.

$$M = \int\limits_K r^2\,dxdy = \Big[\text{в полярных координатах}\Big] = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} r^2\cdot r\,dr =$$

$$= 2\pi\cdot\left.\frac{r^4}{4}\right|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{4}\cdot\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{256}\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{15}{256} = \frac{15\pi}{512}.$$

**Ответ:** $M = \frac{15\pi}{512}$.

**№ 269.**
*Потенциал* $u(x,\ \ y)$ *объемных масс, распределенных по кругу* $r^2 = x^2 + y^2 < 1$*, задается внутри круга формулой*

$$u(x,\ y) = \frac{x}{8}\left(r^2 - 2\right). \tag{7.21}$$

*Найти плотность масс* $\mu$ *и значение потенциала* $u(x,\ y)$ *при* $r > 1$.

**1. Нахождение $\mu$.** Поскольку данная функция

$$u(x,\ y) = u(r,\ \varphi) = \frac{r\cos\varphi}{8}\left(r^2 - 2\right),$$

а в полярных координатах оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}, \tag{7.22}$$

то для $u = \frac{\cos\varphi}{8}\left(r^3 - 2r\right)$ имеем:

$$\Delta u(r,\ \varphi) = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}\cdot u_{\varphi\varphi} = \frac{3r\cos\varphi}{4} + \frac{\cos\varphi}{8r}\cdot(3r^2 - 2) - \frac{\cos\varphi}{8r^2}\cdot(r^3 - 2r) =$$
$$= \frac{3r\cos\varphi}{4} + \frac{2r\cos\varphi}{8} = r\cos\varphi = x.$$

Итак, функция $\mu$ имеет вид:

$$\mu(x,\ y) = \begin{cases} x, & r < 1, \\ 0, & r > 1. \end{cases}$$

**2. Нахождение $u$.** По формуле (7.2), определяющей объемный потенциал,

$$u(x,\ y) = \\ = \int\limits_D E(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\mu(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \tag{7.23}$$

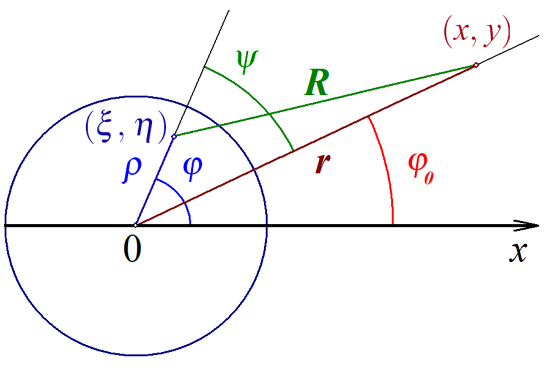


Рис.5. Расположение точек $(x,\ y)$ и $(\xi,\ \eta)$.

А так как в двумерном случае

$$E(x, y; \xi, \eta) = \ln\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$$

нам нужно вычислить по кругу $0 \leqslant \rho < 1$, где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, следующий интеграл:

$$u(x,\ y) = \int\limits_D E(x, y;\ \xi, \eta)\mu(\xi,\ \eta)d\xi d\eta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\rho<1} \ln\underbrace{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}_{R}\cdot\underbrace{\xi}_{\rho\cos\varphi}d\xi d\eta =$$

$$= \Big[\text{в полярных координатах } (\rho,\ \varphi)\Big] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1 \ln R(r,\ \varphi)\rho^2 d\rho. \tag{i}$$

Мы обозначили (рис. 5) через $R$ выражение $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, равное длине вектора разности $\vec{r}-\vec{\rho}$, откуда

$$R^2 = r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0) = r^2+\rho^2-2r\rho\cos\psi.$$

Поэтому

$$\ln R = \ln r + \frac{1}{2}\,\ln\left[1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\cdot\frac{\rho}{r}\cdot\cos\psi\right]. \tag{ii}$$

Обозначим, чтобы упростить запись, дробь $\frac{\rho}{r}$ через $t$ и убедимся, что $\ln(1+t^2-2t\cos\psi)$ раскладывается в ряд[1]:

$$\ln(1+t^2-2t\cos\psi) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\cos(n\psi)}{n}, \qquad |t|<1. \tag{iii}$$

В самом деле, продифференцируем (iii):

$$\frac{2(t-\cos\psi)}{1+t^2-2t\cos\psi} = -2\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\cos(n\psi) = -2\sum_{k=0}^{\infty}t^k\cos((k+1)\psi). \tag{iv}$$

Ряд в правой части, разложив $\cos((k{+}1)\psi)$ по формуле Эйлера, представим в виде суммы двух бесконечно убывающих (по модулю)) геометрических прогрессий:

$$\sum_{k=0}^{\infty}t^k\cos((k+1)\psi) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}t^k\left(e^{i(k+1)\psi}+e^{-i(k+1)\psi}\right) =$$

$$= \frac{e^{i\psi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}t^k e^{ik\psi} + \frac{e^{-i\psi}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}t^k e^{-ik\psi} = \frac{e^{i\psi}}{2}\cdot\frac{1}{1-te^{i\psi}} + \frac{e^{-i\psi}}{2}\cdot\frac{1}{1-te^{-i\psi}} =$$

$$= \frac{e^{i\psi}-t+e^{-i\psi}-t}{2\left(1-te^{i\psi}\right)\left(1-te^{-i\psi}\right)} = \frac{\cos\psi - t}{1+t^2-2t\cos\psi}.$$

Итак, (iv) обосновано, так как оно получается домножением последнего полученного равенства на $(-2)$. При этом заметим, что ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty}t^k e^{ik\psi}$ и

---

[1] Заметим, что этот ряд – ряд Фурье по косинусам, и его коэффициенты можно было бы получить по стандартным формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\prime} i\ln(1+t^2-2t\cos\psi)\cdot\cos n\psi\, d\psi.$$

Эти интегралы надо сначала взять по частям, чтобы избавиться от логарифма, а затем, например, сделать замену $w=e^{i\psi}$, которая сведет задачу к интегрированию рациональной дроби.

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} t^k e^{-ik\psi}$ сходятся при всех $|t| < 1$ (даже для комплексных $t$), причем их сходимость равномерна в любой замкнутой подобласти этого круга, поэтому их можно интегрировать почленно.

Поскольку производные левой и правой частей (iii) равны, то чтобы убедиться, что (iii) верно, нам достаточно проверить, что оно выполняется при $t = 0$. А это действительно так:

$$\ln(1 + 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot \cos\psi) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n \cos(n\psi)}{n} = 0.$$

Теперь вернемся к интегралу правой части (i).

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^1 \ln R(r,\ \varphi) \rho^2 d\rho = \Big[\text{в силу (ii) и (iii)}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2 \left[ 2\ln r - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n \cos(n\psi)}{n\, r^n} \right] d\rho =$$

$$= \frac{2\ln r}{2\pi} \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi}_{=0} \int\limits_0^1 \rho^2 d\rho - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, r^n} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \cos(n\psi) d\varphi \int\limits_0^1 \rho^{n+2}\, d\rho =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, r^n} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi + n\psi) - \cos(n\psi - \varphi)}{2}\, d\varphi \cdot \left. \frac{\rho^{n+3}}{n+3} \right|_0^1 = \Big[\psi = \varphi - \varphi_0\Big] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)\, r^n} \int\limits_0^{2\pi} \Big( \cos\big[(n+1)\varphi - \varphi_0\big] - \cos\big[(n-1)\varphi - \varphi_0\big] \Big)\, d\varphi.$$

Наконец, так как интеграл от косинуса по целому числу периодов равен нулю, то при всех $n$, кроме $n = 1$, слагаемые ряда обращаются в нуль. Получаем, что весь ряд вырождается в первое слагаемое:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi \int\limits_0^1 \ln R(r,\ \varphi) \rho^2 d\rho =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{4\, r} \int\limits_0^{2\pi} \Bigg( \underbrace{\cos\big[2\varphi - \varphi_0\big]}_{\text{даст нуль}} - \cos\varphi_0 \Bigg)\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi_0}{8r} = -\frac{x}{8r^2}. \quad \text{(v)}$$

Отсюда и из (i), наконец, получаем

$$u(x,\ y) = -\,\frac{x}{8r^2}, \qquad r > 1.$$

Заметим, что например при $\varphi_0 = 0$, то есть в точке $(x,\ 0)$, когда $r = x$, мы можем легко проверить непрерывную дифференцируемость нашего объемного потенциала при переходе через $r = 1$:

$$u(1-0,\ 0) = \frac{1}{8}\left(1^2 - 2\right) = -\,\frac{1}{8}, \qquad u(1+0,\ 0) = -\,\frac{1}{8\cdot 1^2} = -\,\frac{1}{8}$$

$$u_r(1-0,\ 0) = \frac{1}{8}\left(3\cdot 1^2 - 2\right) = \frac{1}{8}, \qquad u_r(1+0,\ 0) = \frac{1}{8\cdot 1^2} = \frac{1}{8}.$$

**Ответ:**

$$\mu(x,\ y) = \begin{cases} x, & r < 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \qquad u(x,\ y) = \begin{cases} \frac{x}{8}\left(r^2 - 2\right), & r \leqslant 1, \\ -\,\frac{x}{8r^2}, & r \geqslant 1. \end{cases}$$

*Замечание* 7.4.
Полученный в № 269 ответ вполне согласуется со свойствами объемного потенциала (утв. 7.1, с. 85). В частности, $u(x,\ y) \to 0$ при $r \to \infty$ (хотя $n = 2$), соответствует п. 1. утв. 7.1, поскольку

$$\int\limits_{r<1} \mu(x,\ y)\,dxdy = 0.$$

# 8. Задача для уравнения теплопроводности в шаре. Сферически симметричный случай

## 8.1. Постановка 1-й, 2-й и 3-й краевых задач в шаре

Введем обозначения:
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
$B_R = \left\{(x,y,z):\quad r^2 < R^2\right\}$ – открытый шар радиуса $R$;
$\Gamma_R \equiv \partial B = \left\{(x,y,z):\quad r^2 = R^2\right\}$ – сфера радиуса $R$;
$\overline{B}_R \equiv B_R \bigcup \Gamma_R = \left\{(x,y,z):\quad r^2 \leqslant R^2\right\}$ – замкнутый шар радиуса $R$;
$\Omega_T = B_R \times (0,\ T) = \left\{(x,y,z;\,t):\quad r^2 < R^2;\ \ t \in (0,\ T)\right\}$ – открытый цилиндр;
$\Omega_T^* = B_R \times (0,\ T] = \left\{(x,y,z;\,t):\quad r^2 < R^2;\ \ t \in (0,\ T]\right\}$ – открытый цилиндр с «верхней крышкой»;
$\overline{\Omega}_T = \overline{B}_R \times [0,\ T] = \left\{(x,y,z;\,t):\quad r^2 \leqslant R^2;\ \ t \in [0,\ T]\right\}$ – замкнутый цилиндр.

**1-я краевая задача.**

*Найти функцию* $u(x,\ y,\ z,\ t)$ *в классе* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T) \bigcap C(\overline{\Omega}_T)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega^*_T; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ u(x,\ y,\ z,\ t)\Big|_{r=R} = \mu(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{8.1}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C(\overline{B})$, $\mu \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

**2-я краевая задача.**

*Найти функцию* $u(x,\ y,\ z,\ t)$ *в классе* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T) \bigcap C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega^*_T; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x,\ y,\ z,\ t)\big|_{r=R} = \nu(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{8.2}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C^1(\overline{B})$, $\nu \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

**3-я краевая задача.**

*Найти функцию* $u(x,\ y,\ z,\ t)$ *в классе* $u \in C^{2,1}_{x,t}(\Omega^*_T) \bigcap C^{1,0}_{x,t}(\overline{\Omega}_T)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega^*_T; \\ u(x,\ y,\ z,\ 0) = f(x,\ y,\ z), & \text{в } \ B_R; \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x,\ y,\ z,\ t) + hu(x,\ y,\ z,\ t)\big|_{r=R} = \varkappa(x,\ y,\ z,\ t) & 0 < t < T, \end{cases} \tag{8.3}$$

где $a > 0$ – заданное число, $f \in C^1(\overline{B})$, $\varkappa \in C(\Gamma_R)$ – заданные функции.

### 8.2. Сферические координаты

При решении задач в шаре удобно использовать сферические координаты $(r,\ \theta,\ \varphi)$:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \tag{8.4}$$

Заданная таким образом тройка $(r,\ \theta,\ \varphi)$ является правой (рис. 6). Обозначим через $\tilde{u}(r,\ \theta,\ \varphi;\ t)$ сложную функцию

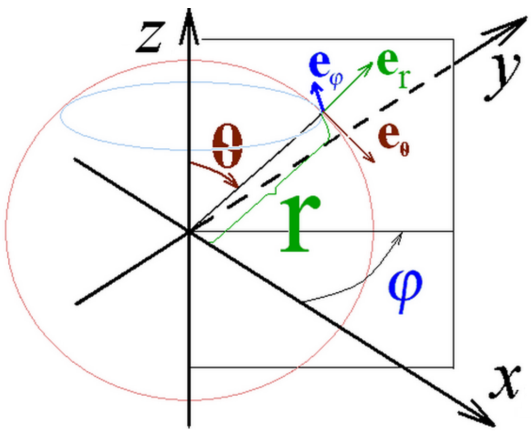



Рис.6. Сферические координаты

$$\tilde{u}(r,\ \theta,\ \varphi;\ t) = u\big(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta;\ t\big). \tag{8.5}$$

**Всюду ниже будем полагать выполненными условия:**

$$f \equiv \tilde{f}(r), \qquad \mu \equiv \mathrm{const}\,, \qquad \nu \equiv \mathrm{const}\,, \qquad \varkappa \equiv \mathrm{const}\,. \tag{8.6}$$

Из них сразу следует, что и решение $\tilde{u}$ задачи (8.1), (8.2) или (8.3) зависит только от $r$:

$$\Longrightarrow \qquad \tilde{u} = \tilde{u}(r).$$

**Оператор Лапласа в сферических координатах**

Оператор Лапласа, имеющий в декартовых координатах $(x,\ y,\ z)$ вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z},$$

в сферических координатах (8.4) примет вид:

$$\Delta\tilde{u} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cdot\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\varphi^2}. \tag{8.7}$$

С учетом, что $\tilde{u} = \tilde{u}(r)$, то есть $\tilde{u}$ не зависит от $\theta$ и $\varphi$, при выполнении (8.6) получаем:

$$\Delta\tilde{u} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}\right). \tag{8.8}$$

#### 8.3. 1-я краевая задача в сферических координатах

Рассмотрим задачу (8.1) в сферических координатах при выполнении условий (8.6) и $\mu \equiv 0$:
*Найти функцию $u(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = \frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = f(r), & 0 \leqslant r < R; \\ u(R,\,t) = 0. \end{cases} \tag{8.9}$$

Поскольку

$$\frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2a^2}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} \equiv \frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big(ru\Big),$$

то уравнение $u_t = \frac{a^2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)$ преобразуется к виду

$$\Big(ru\Big)_t = a^2\Big(ru\Big)_{rr}.$$

Тогда естественно сделать замену:

$$v(r) = ru. \tag{8.10}$$

Для функции $v$ уравнение примет, таким образом, вид

$$v_t(r,\,t) = a^2 v_{rr}(r,\,t),$$

а начальное условие $u(r,\,0) = f(r)$ перепишется как

$$v(r,\ 0) = rf(r).$$

Итак, первая краевая задача при сделанных предположениях после замены $u$ на новую неизвестную функцию $v(r,\ t)$ окончательно принимает вид: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике} \\ & 0 < r < R,\ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\,0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ v(R,\,t) = 0, \quad v(0,\,t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.11}$$

Почему вдруг добавилось новое условие $v(0,\,t) = 0$?

С одной стороны, оно следует из равенства $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$, если $u(r,\,t)$ ограничена в окрестности $r = 0$. А поскольку мы ищем только ограниченные решения $u(x,\,y,\,z,\,t)$, и даже непрерывные, то появление условия $v(0,\,t) = 0$ вполне оправдано.

С другой стороны, без этого условия задача (8.11) оказалась бы некорректно поставленной, а с условием $v(0,\,t) = 0$ она является знакомой нам по прошлому семестру начально-краевой задачей для одномерного уравнения теплопроводности.

### 8.4. Примеры решения задач

**№ 705.**

*Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = f(r), & \text{в } \ B_R; \\ u(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.12}$$

**Шаг 1. Замена неизвестной функции**

Повторяя действия из пункта 8.3, для новой неизвестной функции

$$v(r,\ t) = ru(r,\ t)$$

получаем задачу: *Найти функцию $v(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R,\ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\,0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ v(R,\,t) = 0, & \text{при } 0 < t < T; \\ v(0,\,t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.13}$$

**Шаг 2. Будем искать решение уравнения $v_t = a^2 v_{rr}$ с краевыми условиями
$v(0,t) = v(R,t) = 0$ в виде**

$$V(r,t) = \mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t).$$

Сразу заметим, что краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(r)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(R) = 0. \tag{8.14}$$

Подставим $V(r,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(r)\mathbf{T}'(t) = a^2\mathbf{X}''(r)\mathbf{T}(t)$$

Предположив, что $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(r)}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(r)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{8.15}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(l) = 0, \tag{8.16}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2\mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{8.17}$$

Задача (8.15)–(8.16) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (8.15) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r) + c_2\cos(\sqrt{\lambda}\,r) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{8.18}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\,r} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\,r} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{8.19}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1r + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{8.20}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1\sin(\sqrt{\lambda}\,r)$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $\sqrt{\lambda}\,R = \pi n$ откуда имеем бесконечное множество собственных чисел задачи Штурма–Лиувилля:

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.21}$$

  Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.22}$$

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, так как задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел.
- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1r$. Поэтому из второго краевого условия $\mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 = 0$, т.е. задача Штурма–Лиувилля не имеет собственного числа, равного нулю.

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{R}\right)^2, \quad \mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

задачи (8.15), (8.16). Стало быть, рассматривать задачу (8.17) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + \frac{\pi^2 a^2 n^2}{R^2}\mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{8.23}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$\mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}, \tag{8.24}$$

где $A_n$ – произвольные постоянные.

**<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу** (8.13)**.**

Будем искать решение задачи (8.13) в виде $v(r,\, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n r}{R} A_n e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}. \tag{8.25}$$

Из условий задачи мы еще не использовали только начальные условия $v(r,\, 0) = rf(r)$. Для функции $v(r,\, t)$ искомого вида (8.25) они означают:

$$rf(r) = v(r,\, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{8.26}$$

Пусть функция $rf(r)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по синусам:

$$rf(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\frac{\pi n r}{R}, \tag{8.27}$$

с коэффициентами

$$\alpha_n = \frac{2}{R}(rf, \mathbf{X}_n) = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r)\sin\frac{\pi n r}{R}dr. \tag{8.28}$$

Таким образом, для коэффициентов $A_n$ из представления (8.26) решения $v(r,\, t)$, имеем:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2}{R}\int\limits_0^R rf(r)\sin\frac{\pi n r}{R}dr. \tag{8.29}$$

Все, что нам осталось сделать – это подставить в формулу (8.25) найденные коэффициенты $A_n$ из (8.29). Получим:

$$v(r,\, t) = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^R \rho f(\rho)\sin\frac{\pi n \rho}{R}d\rho\right)\, e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}.$$

Отсюда, вспоминая о замене $v(r,\ t) = ru(r,\ t)$, получаем

**<u>Ответ:</u>** $u(r,\ t) = \frac{2}{rR} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left( \int\limits_0^R \rho f(\rho) \sin\frac{\pi n\rho}{R} d\rho \right) \ e^{-\frac{(\pi na)^2}{R^2}t} \sin\frac{\pi nr}{R}.$

**№ 706.**

*Найти ограниченную функцию $u(r,\ t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\ 0) = f(r), & 0 \leqslant r < R; \\ u_r(R,\ t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{8.30}$$

**<u>Шаг 1.</u> Замена неизвестной функции**

Действуя аналогично пункту 8.3, для новой неизвестной функции

$$v(r,\ t) = ru(r,\ t)$$

получаем задачу: *Найти функцию $v(r,\ t)$ из условий*

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{rr}, & \text{в прямоугольнике } \ 0 < r < R, \ \ 0 < t \leqslant T; \\ v(r,\ 0) = rf(r), & \text{на интервале } 0 < r < R; \\ Rv_r(R,\ t) - v(R,\ t) = 0, & \text{при } 0 < t < T; \\ v(0,\ t) = 0, & \text{при } 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.31}$$

Заметим, что условие $u_r(R,\ t) = 0$ означает для $v(r,\ t) = ru(r,\ t)$, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)_{r=R} = \left.\frac{rv_r - v}{r^2}\right|_{r=R} = \frac{Rv_r(R,\ t) - v(R,\ t)}{R^2} = 0,$$

откуда и взялось краевое условие 3-го рода в задаче для $v$.

**<u>Шаг 2.</u> Будем искать решение уравнения $v_t = a^2 v_{rr}$ с краевыми условиями**
$v(0,t) = Rv_r(R,\ t) - v(R,\ t) = 0$ **в виде**

$$V(r,t) = \mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t).$$

Краевые условия означают для функции $\mathbf{X}(r)$ следующее:

$$\mathbf{X}(0) = 0, \qquad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0. \tag{8.32}$$

Подставим $V(r,t)$ в уравнение, получим:

$$\mathbf{X}(r)\mathbf{T}'(t) = a^2 \mathbf{X}''(r)\mathbf{T}(t).$$

Предположив, что $\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$, поделим это равенство на $a^2\mathbf{X}(r)\mathbf{T}(t) \neq 0$:

$$-\frac{\mathbf{X}''(r)}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \lambda.$$

Отсюда для функции $\mathbf{X}(r)$ имеем задачу

$$\mathbf{X}''(r) + \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{8.33}$$

$$\mathbf{X}(0) = 0, \quad R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0, \tag{8.34}$$

а для функции $\mathbf{T}(t)$ – уравнение:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda a^2 \mathbf{T}(t) = 0, \qquad t > 0. \tag{8.35}$$

Задача (8.33)–(8.34) есть задача Штурма–Лиувилля. Общее решение уравнения (8.33) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}\, r) \qquad \text{при } \lambda > 0; \tag{8.36}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, r} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, r} \qquad \text{при } \lambda < 0; \tag{8.37}$$

$$\mathbf{X}(r) = c_1 r + c_2 \qquad \text{при } \lambda = 0; \tag{8.38}$$

- При $\lambda > 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что

$$c_2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}(r) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}\, r) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'(r) = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что либо $c_1 = 0$ (а нам неинтересны тривиальные решения), либо выполняется соотношение:

$$\sqrt{\lambda}\, R \cos(\sqrt{\lambda}\, R) - \sin(\sqrt{\lambda}\, R) = 0,$$

откуда

$$\sqrt{\lambda}\, R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda}\, R). \tag{8.39}$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений (рис. 7):

$$\lambda_n: \quad \sqrt{\lambda_n}\, R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{8.40}$$

Им соответствует бесконечное множество собственных функций:

$$\mathbf{X}_n(r) = \sin\left(\sqrt{\lambda_n} r\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{8.41}$$

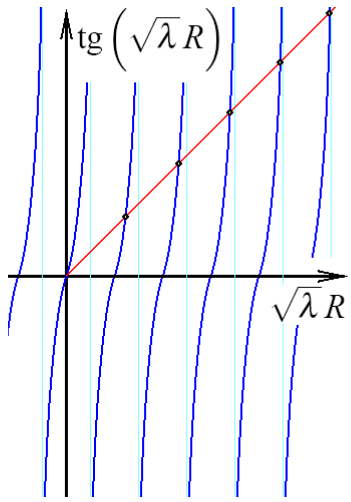



Рис.7. Геометрическое решение уравнения (8.39)

- При $\lambda < 0$ нетривиальных решений нет, так как задача Штурма–Лиувилля не может иметь отрицательных собственных чисел.

- При $\lambda = 0$ имеем из краевого условия $\mathbf{X}(0) = 0$, что $c_2 = 0$, $\Rightarrow$ $\mathbf{X}(r) = c_1 r$. Поэтому из второго краевого условия $R\mathbf{X}'(R) - \mathbf{X}(R) = 0$ получаем, что $c_1 R - c_1 R = 0$ – верное при всех $c_1$ тождество. Поэтому задача Штурма–Лиувилля имеет собственное число, равное нулю, и соответствующую ему собственную функцию

$$\mathbf{X}_0(r) = r, \qquad n = 0. \tag{8.42}$$

Итак, мы имеем бесконечное множество нетривиальных решений

$$\lambda_0 = 0, \qquad \lambda_n: \quad \sqrt{\lambda_n}\, R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\, R), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\left\{\mathbf{X}_n(r)\right\} = \left\{r, \ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right)\right\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

задачи (8.33), (8.34). Стало быть, рассматривать задачу (8.35) имеет смысл только при $\lambda = \lambda_n$, и мы получаем семейство задач:

$$\mathbf{T}_n'(t) + a^2\lambda_n \mathbf{T}_n(t) = 0, \qquad\qquad t > 0, \quad n \geqslant 0. \tag{8.43}$$

Решение этого линейного однородного уравнения первого порядка имеет вид:

$$\Big\{\mathbf{T}_n(t)\Big\} = \Big\{A_0, \ \ \mathbf{T}_n(t) = A_n e^{-\,a^2\lambda_n\, t}\Big\}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{8.44}$$

где $A_n$ – произвольные постоянные.

**<u>Шаг 3.</u> Решаем задачу** (8.31)

Будем искать решение задачи (8.31) в виде $v(r,\, t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(t)$, т.е.

$$v(r,\, t) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) A_n e^{-\,a^2\lambda_n\, t}. \tag{8.45}$$

Из условий задачи мы еще не использовали только начальные условия $v(r,\, 0) = rf(r)$. Для функции $v(r,\, t)$ искомого вида (8.45) они означают:

$$rf(r) = v(r,\, 0) = A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{X}_n(r)\mathbf{T}_n(0) =$$

$$= A_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right).$$

Пусть функция $rf(r)$, входящая в начальное условие, разлагается в ряд Фурье по собственным функция задачи Штурма–Лиувилля:

$$rf(r) = \alpha_0 r + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right), \tag{8.46}$$

Выясним, какими должны быть коэффициенты $\alpha_n \equiv A_n$. Для этого домножим (8.46) на $\mathbf{X}_m = \sin\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right)$ скалярно в смысле $L_2[0, R]$ и учтем, что система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля является ортогональной в смысле этого скалярного произведения (это проверяется элементарным интегрированием):

$$(rf, \mathbf{X}_m) = \alpha_m \int\limits_0^R \sin^2\left(\sqrt{\lambda_m}\, r\right) dr = \frac{\alpha_m}{2}\int\limits_0^R \left(1 - \cos\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right)\right) dr =$$

$$= \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{1}{2\sqrt{\lambda_m}} \sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, r\right)\Bigg|_{r=0}^{r=R}\right) = \frac{\alpha_m}{2}\left(R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\, R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}}\right),$$

откуда, пользуясь тождествами $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получаем:

$$R - \frac{\sin\left(2\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{2\sqrt{\lambda_m}} = \left[\sqrt{\lambda_m} = \frac{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,R)}{R}\right] =$$

$$= R - \frac{R\sin\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)\cos\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)}{\operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_m}\,R)} =$$

$$= R - R\cos^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right) = \left[\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right] =$$

$$= R - \frac{R}{1+\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right)} = \left[\operatorname{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_m}\,R\right) = \lambda_m\,R^2\right] = R - \frac{R}{1+\lambda_m\,R^2} =$$

$$= \frac{\lambda_m\,R^3}{1+\lambda_m\,R^2}.$$

В итоге для коэффициентов $\alpha_n \equiv A_n$, $\quad n \in \mathbb{N}$, получаем равенство:

$$A_n = \alpha_n = \frac{2\left(1+\lambda_n\,R^2\right)}{\lambda_m\,R^3}(rf, \mathbf{X}_n) = \frac{2\left(1+\lambda_n\,R^2\right)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R rf(r)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)dr. \tag{8.47}$$

Осталось найти $A_0$. Аналогично, $(rf, \mathbf{X}_0) = \alpha_0 \int\limits_0^R r^2 dr = \alpha_0\,\frac{R^3}{3}$, откуда

$$A_0 = \alpha_0 = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R r^2 f(r)\,dr. \tag{8.48}$$

Подставим в формулу (8.45) найденные коэффициенты $A_n$ из (8.47) и (8.48).

$$v(r,\,t) = \left(\frac{3}{R^3}\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\,d\rho\right) r +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(1+\lambda_n\,R^2\right)}{\lambda_n\,R^3}\int\limits_0^R \rho f(\rho)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}. \tag{8.49}$$

Вспомним, что $v(r,\,t) = ru(r,\,t)$, и поделим (8.49) на $r$:

<u>Ответ:</u> $\qquad u(r,t) = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\,d\rho +$

$$+ \frac{2}{rR^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\lambda_n\,R^2}{\lambda_n}\int\limits_0^R \rho f(\rho)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}.$$

**№ 708(а).**

*Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\, 0) = T, & \text{в } \ B_R; \\ u(R,\, t) = P, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.50}$$

**<u>Шаг 1.</u> Избавление от неоднородности в граничном условии**

Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\, t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\, t)$ задачи (8.50) в виде

$$u(r,\, t) = v(r,\, t) + w(r,\, t),$$

где функция $w(r,\, t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2 \Delta w \equiv a^2 \left( w_{rr} + \frac{2}{r} w_r \right), & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ w(R,\, t) = P, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.51}$$

В данном случае краевое условие очень простое, и условия (8.51) выполняются, очевидно, для функции простейшего вида:

$$w(r,\, t) = P. \tag{8.52}$$

Тогда $v(r,\, t) = u - w \equiv u - P$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \Delta v, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ v(r,\, 0) = T - P, & \text{в } \ B_R; \\ v(R,\, t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.53}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи** (8.53)

Задача (8.53) есть частный случай уже решенной нами в номере 705 задачи (8.12) с функцией

$$f(r) = T - P.$$

Воспользуемся результатом номера 705:

$$v(r,\, t) = \frac{2}{rR} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int\limits_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\pi n \rho}{R} d\rho \right) \, e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2} t} \sin \frac{\pi n r}{R}.$$

Чтобы получить ответ к нашей задаче, нам осталось только посчитать интегралы:

$$\int\limits_0^R \rho f(\rho) \sin \frac{\pi n \rho}{R} d\rho = \int\limits_0^R \rho \, (T - P) \sin \frac{\pi n \rho}{R} d\rho = (T - P) \int\limits_0^R \rho \sin \frac{\pi n \rho}{R} d\rho =$$

$$= \left[\text{по частям}\right] = -(T-P)\,\frac{R}{\pi n}\left(\rho\cos\frac{\pi n\rho}{R}\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int\limits_0^R \cos\frac{\pi n\rho}{R}d\rho\right) =$$

$$= (P-T)\,\frac{R}{\pi n}\left((-1)^n R - \ \frac{R}{\pi n}\sin\frac{\pi n\rho}{R}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=R}\right) = \frac{(-1)^n R^2}{\pi n}\,(P-T)\,.$$

Таким образом,

$$v(r,\,t) = \frac{2}{rR}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n R^2}{\pi n}\,(P-T)\right)\ e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R} =$$

$$= \frac{2R\,(P-T)}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}.$$

Поэтому, для функции $u(r,\,t) = v(r,\,t) + P$, получаем

Ответ: $u(r,t) = P + \frac{2R(P-T)}{\pi r}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\ e^{-\frac{(\pi n a)^2}{R^2}t}\sin\frac{\pi n r}{R}$.

**№ 708(б).**

*Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\Delta u, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ u(r,\,0) = T, & \text{в } \ B_R; \\ k\,\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = q, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.54}$$

**Шаг 1. Избавление от неоднородности в граничном условии**

Помня, что $\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}u_r$, нужно подобрать функцию $w(r,\,t)$ (желательно простого вида), которая удовлетворяла бы и уравнению и неоднородному краевому условию. То есть будем искать решение $u(r,\,t)$ задачи (8.54) в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r,\,t),$$

где функция $w(r,\,t)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} w_t = a^2\Delta w \equiv a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right), & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ k\,\frac{\partial w}{\partial r}\Big|_{r=R} = q, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.55}$$

Из-за того, что граничное условие – второго рода, $w$ должна содержать хотя бы $r$ в первой степени. Но поскольку в уравнении есть слагаемое $\frac{2}{r}w_r$, которое для функции вида $\alpha r$ превратится в $\frac{2\alpha}{r}$, то просто полином первой степени от $r$ удовлетворить уравнению не сможет.

В этом случае надо искать $w$ в виде

$$w(r,\,t) = \alpha r^2 + \eta(t), \tag{8.56}$$

где $\eta(t)$ подбирается так, чтобы выполнялось уравнение $w_t = a^2\Delta w$.

Подставим искомую функцию $w$ вида (8.56) в граничное условие:

$$k\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=R} = 2k\alpha R = q \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \frac{q}{2kR}.$$

Тогда

$$w(r,\,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \eta(t).$$

Подставим эту функцию в уравнение $w_t = a^2\Delta w = a^2\left(w_{rr} + \frac{2}{r}w_r\right)$:

$$\eta\,'(t) = a^2\left(\frac{2q}{2kR} + \frac{2}{r}\cdot\frac{2q}{2kR}r\right) = \frac{3qa^2}{kR} \qquad \Longrightarrow \qquad \eta(t) = \frac{3qa^2}{kR}t + c$$

Константу $c$ возьмем равной нулю, нам ведь не нужно искать все решения (8.55), а достаточно найти самое простое. Итак:

$$w(r,\,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \frac{3qa^2}{kR}t. \tag{8.57}$$

Тогда $v(r,\,t) = u - w$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} v_t = a^2\Delta v, & \text{в } \ \Omega_T^*; \\ v(r,\,0) = T - w(r,\,0) = T - \frac{q}{2kR}r^2 = f(r), & \text{в } \ B_R; \\ v(R,\,t) = 0, & 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.58}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи** (8.58)

Задача (8.58) есть частный случай уже решенной нами в номере 706 задачи (8.30) с функцией

$$f(r) = T - \frac{q}{2kR}r^2.$$

Воспользуемся результатом номера 706:

$$v(r,\,t) = \frac{3}{R^3}\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)\,d\rho +$$

$$+\frac{2}{rR^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\lambda_n\,R^2}{\lambda_n}\int\limits_0^R \rho f(\rho)\,\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)d\rho\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,r\right)e^{-\,a^2\lambda_n\,t}, \tag{8.59}$$

где $\lambda_n$ положительные корни уравнения

$$\sqrt{\lambda_n}\,R = \operatorname{tg}(\sqrt{\lambda_n}\,R), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{8.60}$$

Чтобы получить ответ к нашей задаче, нам осталось только посчитать интегралы:

**а)** $$\int\limits_0^R \rho^2 f(\rho)d\rho = \int\limits_0^R \rho^2\left(T - \frac{q}{2kR}\rho^2\right)d\rho = \frac{TR^3}{3} - \frac{qR^5}{10kR} = \frac{TR^3}{3} - \frac{qR^4}{10k}$$

б) $$\int\limits_0^R \rho f(\rho)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho = \int\limits_0^R \rho\left(T\ -\ \frac{q}{2kR}\rho^2\right)\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho =$$
$$= -\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right),$$

поскольку

$$\int\limits_0^R \rho\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho = \Big[\text{по частям}\Big] =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\rho\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - \int\limits_0^R \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R}\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R\sqrt{\lambda_n} - \operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)\right)\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = \Big[\text{в силу (8.60)}\Big] = 0$$

и

$$\int\limits_0^R \rho^3\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho = \Big[2\text{ раза по частям}\Big] =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(\rho^3\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} - 3\int\limits_0^R \rho^2\ \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - \frac{3}{\sqrt{\lambda_n}}\left[\rho^2\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right)\Big|_{\rho=0}^{\rho=R} -\right.\right.$$
$$\left.\left. -\ 2\underbrace{\int\limits_0^R \rho\ \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,\rho\right) d\rho}_{=0}\right]\right) =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{\lambda_n}}\left(R^3\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right) - 3R^2\,\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,R\right)}{\sqrt{\lambda_n}}\right) =$$

$$= \left[ \text{в силу (8.60)}, \ \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}{\sqrt{\lambda_n}} = R\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda_n}}\, R^3 \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right).$$

Итак, коэффициенты $A_n$ равны

$$A_n = \frac{1+\lambda_n\, R^2}{\lambda_n} \int\limits_0^R \rho f(\rho)\, \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, \rho\right) d\rho =$$

$$= \frac{1+\lambda_n\, R^2}{\lambda_n} \cdot \left( -\frac{qR^2}{k\sqrt{\lambda_n}}\, \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)\right) =$$

$$= \left[ \text{в силу (8.60)}, \ 1+\lambda_n\, R^2 = 1+\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \right] =$$

$$= \frac{-qR^2}{k\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\, \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)}.$$

Подставив найденные интегралы в (8.59), получаем:

$$v(r,\, t) = \frac{3}{R^3}\left( \frac{TR^3}{3} - \frac{qR^4}{10k} \right) +$$

$$+ \frac{2}{rR^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{-qR^2}{k\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\, \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \right) \sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) e^{-\, a^2\lambda_n\, t} =$$

$$= T - \frac{3qR}{10k} - \frac{2q}{krR} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) e^{-\, a^2\lambda_n\, t}}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\, \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \right).$$

Поэтому, для функции $u(r,\, t) = v(r,\, t) + w(r,\, t) = v(r,\, t) + \frac{q}{2kR}r^2 + \frac{3qa^2}{kR}t$, получаем

<u>Ответ:</u> $u(r,t) = \frac{q}{2kR}r^2 + \frac{3qa^2}{kR}t + T - \frac{3qR}{10k} - \frac{2q}{krR} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\, r\right) e^{-\, a^2\lambda_n\, t}}{\lambda_n\sqrt{\lambda_n}\, \cos\left(\sqrt{\lambda_n}\, R\right)} \right).$

## 9. Применение цилиндрических функций

Уравнение Бесселя на промежутке $(0,\ 1)$

$$x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right)\mathbf{Z}(x) = 0. \tag{9.1}$$

Всякое решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией.

**Опр. 9.1.** Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{9.2}$$

называется **функцией Бесселя порядка** $\nu$ и является на промежутке $(0,\ 1)$ решением уравнения (9.1).

Есть и другие цилиндрические функции.

**Опр. 9.2. Функции Неймана**:

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)}\left[J_\nu(x)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)\right], \qquad \nu \notin \mathbb{Z}; \tag{9.3}$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\right]_{\nu=n}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{9.4}$$

**Функции Ханкеля I-го рода и II-го рода**:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \tag{9.5}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \tag{9.6}$$

**Модифицированные функции Бесселя и Ханкеля:**

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu(ix), \qquad K_\nu(x) = e^{\frac{\pi i}{2}\nu} H_\nu^{(1)}(ix). \tag{9.7}$$

**Теорема 9.1.**
*Фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения Бесселя (9.1) образует каждая из пар функций:*

$$\{J_\nu(x),\ N_\nu(x)\}, \qquad \left\{H_\nu^{(1)}(x),\ H_\nu^{(2)}(x)\right\}$$

$$\text{и, в случае, когда } \nu \notin \mathbb{Z} \quad \{J_\nu(x),\ J_{-\nu}(x)\}$$

$$\bigl(\text{при } n \in \mathbb{Z} \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n\bigr).$$

**Следствие 9.1.**
*Общее решение уравнения Бесселя (9.1) задается каждой из формул*

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) = c_3 H_\nu^{(1)}(x) + c_4 H_\nu^{(2)}(x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_5 J_\nu(x) + c_6 J_{-\nu}(x) \qquad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

### 9.1. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций

Для функций Бесселя и Неймана имеют место следующие рекуррентные формулы:

$$\mathbf{Z}_\nu'(x) = \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}\mathbf{Z}_\nu(x), \qquad \mathbf{Z}_\nu'(x) = -\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}\mathbf{Z}_\nu(x). \tag{9.8}$$

Их можно также переписать в виде:

$$\left[x^\nu \mathbf{Z}_\nu\right]'(x) = x^\nu \mathbf{Z}_{\nu-1}(x), \qquad \left[x^{-\nu}\mathbf{Z}_\nu\right]'(x) = -x^{-\nu}\mathbf{Z}_{\nu+1}(x). \tag{9.9}$$

Если из второй формулы (9.8) вычесть первую, получим еще одно соотношение:

$$\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) \ - \ \frac{2\nu}{x}\mathbf{Z}_\nu(x) + \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) = 0. \tag{9.10}$$

Для функций Бесселя и Неймана с целочисленным порядком $\nu = n \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\mathbf{Z}_{-n}(x) = (-1)^n \mathbf{Z}_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{9.11}$$

Кроме приведенных формул, нам также понадобится соотношение, из которого, в частности, следует часть утверждений теоремы 9.1.

**Утверждение 9.1** (Вронскиан функций Бесселя и Неймана)**.**

$$W\left[J_\nu,\ N_\nu\right](x) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J_\nu'(x) & N_\nu'(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x}. \tag{9.12}$$

### 9.2. Интегральные формулы для цилиндрических функций

Имеют место следующие интегральные формулы:

**Интегралы Ломмеля**:

$$\int\limits_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)dt =$$

$$= \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\Big(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x)J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\Big), \quad \alpha \neq \beta, \quad (9.13)$$

$$\int\limits_0^x t\Big(J_\nu(\alpha t)\Big)^2 dt =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big(\alpha J'_\nu(\alpha x)\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\Big(J_\nu(\alpha x)\Big)^2, \qquad \nu > -1. \quad (9.14)$$

Имеют место и более общие формулы:

$$\int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}(\mu_m r)dr = \frac{r\left(\mu_k\mathbf{Z}(\mu_m r)\mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m\mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}'(\mu_m r)\right)\Big|_a^b}{\mu_m^2-\mu_k^2}; \quad (9.15)$$

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu r)dr =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b} + r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b}\right], \quad (9.16)$$

где $\mathbf{Z}(x)$ – произвольные решения уравнения Бесселя

$$(x\mathbf{Z}')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)\mathbf{Z} = 0.$$

### 9.3. Поведение функций Бесселя и Неймана

**Теорема 9.2** (Поведение в окрестности нуля)**.**

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & \nu < 0, \ \nu \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \nu < 0, \ \nu \in \mathbb{Z}; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0; \end{cases} \qquad N_\nu(+0) = \infty, \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

*Доказательство.* См. с. 296. □

**Опр. 9.3.** Через $M$ мы будем обозначать следующий класс функций:

$$u(r) \in C^2(0,\ R]; \qquad \frac{L_\nu(u)}{\sqrt{r}} \in L_2(0,\ R).$$

**Опр. 9.4. Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на** $[0,\ R]$ мы будем называть задачу:
*Найти числа* $\lambda$ *и функции* $0 \not\equiv u(r) \in M$ из условий:

$$\begin{cases} -(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u = \lambda r u, & r \in (0,\ R), \quad \nu \geqslant 0; \\ \big|u(+0)\big| < \infty; \\ \alpha u(R) + \beta u'(R) = 0, & \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{cases} \tag{9.17}$$

При этом функции $u \not\equiv 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа $\lambda$ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.

**Теорема 9.3.**

**Утв.1.** *Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1.*

**Утв.2.** *Число* $\lambda = 0$ *есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда* $\nu = \alpha = 0$, *и ему соответствует собственная функция* $u(r) \equiv const$.

**Теорема 9.4.** *Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где* $\mu_k^{(\nu)}$ *– положительные корни уравнения*

$$\alpha R\, J_\nu(\mu) + \beta \mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

Теперь приведем теорему, которая является аналогом теоремы Стеклова о разложимости функций в ряд Фурье по системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

**Теорема 9.5.**

**Утв. 1.** *В случае* $|\alpha + |\nu| > 0$*, функция* $\sqrt{r}\,\varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\,R)$

$$\sqrt{r}\,\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\nu} \sqrt{r}\, J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{\nu} r}{R}\right), \tag{9.18}$$

$$\alpha_k^{\nu} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[J'_{\nu}\left(\mu_k^{\nu}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{[\mu_k^{\nu}]^2}\right) J_{\nu}^2\left(\mu_k^{\nu}\right)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_{\nu}\left(\frac{\mu_k^{\nu} r}{R}\right) dr,$$

*где* $\mu_k^{(\nu)}$ *– положительные корни уравнения*

$$\alpha R\, J_{\nu}(\mu) + \beta\mu J'_{\nu}(\mu) = 0.$$

**Утв. 2.** *В случае* $\alpha = \nu = 0$*, функция* $\sqrt{r}\,\varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\,R)$

$$\sqrt{r}\,\varphi(r) = \alpha_0^0 \sqrt{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \sqrt{r}\, J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{9.19}$$

$$\alpha_0^0 = \frac{2}{R^2} \int\limits_0^R r\varphi(r) dr,$$

$$\alpha_k^0 = \frac{2}{\underbrace{\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}_{=0} + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

*где* $\mu_k$ *– положительные корни уравнения* $J_1(\mu) = 0$.

Заметим, что в формуле (9.18) можно (и нужно) сократить на $\sqrt{r}$. Зачем же его писать? Это делается для того, чтобы разлагаемая функция, даже если она будет неограничена в окрестности нуля, попал в нужный класс, то есть в класс функций, для которых справедлив аналог теоремы Стеклова, и ряд (9.18) сходился равномерно даже в окрестности нуля.

**Теорема 9.6** (аналог теоремы В.А. Стеклова)**.**

*Пусть* $\{\mathbf{Z}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортогональная система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.*

*Тогда* $\forall f(x) \in C^2[a,\, b]$, *удовлетворяющей краевым условиям,* $\exists \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{Z}_k(x),$$

*причем последний ряд сходится к* $f(x)$ *абсолютно и равномерно на* $[a,\, b]$, *а для* $c_k$ *верно представление*

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{Z}_k)}{\|\mathbf{Z}_k\|^2} = \frac{\int\limits_a^b x f(x) \mathbf{Z}_k(x) dx}{\int\limits_a^b x \mathbf{Z}_k^2(x) dx}.$$

**Теорема 9.7.**

*Пусть функция* $\mathbf{Z}(x)$ *есть решение на промежутке* $x \in (a,\, b)$ *уравнения*

$$x^2 \mathbf{Z}'' + x\mathbf{Z}' + \left(x^2 - \nu^2\right) \mathbf{Z} = 0.$$

$\mu_k$ *– положительные решения уравнения*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 J_\nu\left(\mu\, a\right) + \beta_1 \mu J_\nu'\left(\mu\, a\right) & \alpha_1 N_\nu\left(\mu\, a\right) + \beta_1 \mu N_\nu'\left(\mu\, a\right) \\ \alpha_2 J_\nu\left(\mu\, b\right) + \beta_2 \mu J_\nu'\left(\mu\, b\right) & \alpha_2 N_\nu\left(\mu\, b\right) + \beta_2 \mu N_\nu'\left(\mu\, b\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{9.20}$$

*Тогда:* ***1)*** *Каждая из функций* $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$, $\quad k = \overline{1,\, \infty}$ *является решением задачи Штурма–Лиувилля*

$$\begin{cases} -\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' + \frac{\nu^2}{r}\mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r \mathbf{X}_k(r), & a < r < b; \\ \alpha_1 \mathbf{X}_k(a) + \beta_1 \mathbf{X}_k'(a) = 0, \\ \alpha_2 \mathbf{X}_k(b) + \beta_2 \mathbf{X}_k'(b) = 0. \end{cases} \tag{9.21}$$

*При этом функция* $\mathbf{X}_k(r)$ *имеет вид*

$$\mathbf{X}_k(r) = \left(\alpha_1 N_\nu\left(\mu_k\, a\right) + \beta_1 \mu_k N_\nu'\left(\mu_k\, a\right)\right) J_\nu(\mu_k r) -$$

$$- \left(\alpha_1 J_\nu\left(\mu_k\, a\right) + \beta_1 \mu_k J_\nu'\left(\mu_k\, a\right)\right) N_\nu(\mu_k r).$$

**2)** $\qquad \|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int\limits_a^b r\mathbf{Z}^2(\mu r)dr =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu r)\Bigg|_{r=a}^{r=b} + r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu r)\Bigg|_{r=a}^{r=b}\right].$$

**3)** $$\Big(\mathbf{Z}(\mu_k r),\ \mathbf{Z}(\mu_m r)\Big) = 0, \qquad k \neq m.$$

### 9.6. Примеры решения задач

**№ 769.**

*Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ u_t(r,\,0) = \psi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\,t)| < \infty, \quad u(R,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.22}$$

Заметим, что в правой части уравнения стоит оператор Лапласа в полярных координатах для случая $u \equiv u(r,\,t)$, поскольку в координатах $(r,\ \theta)$ он имеет вид:

$$\Delta u(r,\,\theta;\,t) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \tag{9.23}$$

Поэтому данная задача имеет физический смысл «найти поперечные колебания круглой мембраны, вызванные начальным отклонением $\varphi(r)$ и начальной скоростью $\psi(r)$».

**<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.22) в виде

$$u(r;\,t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t), \tag{9.24}$$

то, подставив (9.24) в уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k''(t) = a^2 \sum_{k=\ldots}^{\infty} \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists\lambda_k\in\mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t) = 0, \qquad (9.25)$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k\mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \qquad (9.26)$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.22).

Условие $|u(0,\,t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \qquad (9.27)$$

а условие $u(R,\,t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \qquad (9.28)$$

**Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \qquad (9.29)$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.29) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где* $\mu_k^{(\nu)}$ *– корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.29) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k^{(0)} \text{ – корни уравнения} \qquad J_0(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.30}$$

**<u>Шаг 3.</u> Разложение функций $\varphi$ и $\psi$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функции $\sqrt{r}\ \varphi(r)$ и $\sqrt{r}\ \psi(r)$ разлагаются в ряд Фурье

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \tag{9.31}$$

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \tag{9.32}$$

$$\varphi_k = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}\right)\underbrace{J_0^2\left(\mu_k^{(0)}\right)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr,$$

короче,

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr,$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr.$$

Упростим вид этих выражений, применив рекуррентную формулу (9.8), с. 121:

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

У нас $\nu = 0$, поэтому

$$J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right) = J_{-1}\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

А в силу соотношения (9.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

получаем

$$J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right) = -J_1\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

Поэтому

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr, \tag{9.33}$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr. \tag{9.34}$$

**Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.24), с. 126, подставить в начальные условия

$$u(r,\,0) = \varphi(r), \qquad u_t(r,\,0) = \psi(r),$$

заменив функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ рядами (9.31) и (9.32), получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если ряды в левых и правых частях окажутся равны почленно, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \mathbf{X}_k(r)\varphi_k, \\ \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k'(0) = \mathbf{X}_k(r)\psi_k. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \qquad \mathbf{T}_k'(0) = \psi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.25), с. 127, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k''(t) + a^2\lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0, \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k, \\ \mathbf{T}_k'(0) = \psi_k. \end{cases} \tag{9.35}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{T}_k''(t) + a^2\lambda_k \mathbf{T}_k(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_k(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, at\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, at\right).$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$c_2 = \varphi_k,$$

а из начального условия $\mathbf{T}_k'(0) = \psi_k$ получаем, что

$$c_1 = \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Таким образом, решение задачи (9.35) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, at\right) + \varphi_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, at\right),$$

где $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулами (9.33) – (9.34). Вспоминая, что $\sqrt{\lambda_k} = \frac{\mu_k^{(0)}}{R}$, запишем

**Ответ:**

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right)\left(\frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right) + \varphi_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right)\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулами (9.33) – (9.34).

### № 770.

*Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f(r,\, t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ u_t(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\, t)| < \infty, \quad u(R,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.36}$$

Заметим, что в правой части уравнения стоит оператор Лапласа в полярных координатах для случая $u \equiv u(r,\, t)$, поскольку в координатах $(r,\ \theta)$ он имеет вид:

$$\Delta u(r,\, \theta;\, t) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \tag{9.37}$$

Поэтому данная задача имеет физический смысл «найти поперечные колебания круглой мембраны, вызванные силой $f(r, t)$».

**<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.36) в виде

$$u(r;\, t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t), \tag{9.38}$$

и предположить, что для $f(r, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r;\, t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \tag{9.39}$$

то, подставив (9.38) и (9.39) в уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + f$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}''_k(t) = a^2 \sum_{k=\ldots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}''_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_k(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}''_k(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}''_k(t) + a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \tag{9.40}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k\mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \tag{9.41}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.36).

Условие $|u(0,\, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.42}$$

а условие $u(R,\, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.43}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.44}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.44) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.44) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \\ \text{где } \mu_k^{(0)} \ - \text{ корни уравнения} \qquad J_0(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.45}$$

**<u>Шаг 3.</u> Разложение функции $f(r,\, t)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\ f(r,\, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0(\mu_k^{(0)} r), \tag{9.46}$$

$$f_k(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}\right)\underbrace{J_0^2\left(\mu_k^{(0)}\right)}_{=0}} \times$$

$$\times \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr = \frac{2}{R^2\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr,$$

короче,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr$$

Упростим вид этого выражения, применив рекуррентную формулу (9.8), с. 121:

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

У нас $\nu = 0$, поэтому

$$J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right) = J_{-1}\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

А в силу соотношения (9.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

получаем

$$J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right) = -J_1\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

Поэтому

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr. \tag{9.47}$$

**<u>Шаг 4.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.38), с. 131, подставить в начальные условия

$$u(r,\, 0) = 0, \qquad u_t(r,\, 0) = 0,$$

получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если все слагаемые рядов в левых частях окажутся равны нулю, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = 0, \\ \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = 0, \qquad \mathbf{T}_k'(0) = 0.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.40), с. 131, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k''(t) + \frac{a^2\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = 0, \\ \mathbf{T}_k'(0) = 0. \end{cases} \tag{9.48}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}''(t) + \frac{a^2\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c_1 \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right).$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:
Если функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ образуют ФСР линейного однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0,$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

имеет вид

$$y_{\text{оно}} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n,$$

где функции $c_1(x),\ c_2(x),\ \ldots,\ c_n(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \ldots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \ldots + c_n'y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{n-2} + c_2'y_2^{n-2} + \ldots + c_n'y_n^{n-2} = 0 \\ c_1'y_1^{n-1} + c_2'y_2^{n-1} + \ldots + c_n'y_n^{n-1} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае ФСР образуется парой функций $\left\{\sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right),\ \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right)\right\}$, порядок уравнения $n = 2$, и в системе будет всего 2 уравнения:

$$\begin{cases} c_1' \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right) + c_2' \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right) = 0 \\ \frac{a\mu_k^{(0)}}{R}\left(c_1' \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right) - c_2' \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right)\right) = f_k(t). \end{cases}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, например, по правилу Крамера, получим:

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{f_k(t) R \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right)}{a\mu_k^{(0)}}, \\ c_2'(t) = -\dfrac{f_k(t) R \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right)}{a\mu_k^{(0)}}. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \left( \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right) \int\limits_0^t f_k(\tau) \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, a\tau}{R}\right) d\tau - \right.$$

$$\left. - \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right) \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, a\tau}{R}\right) d\tau \right) +$$

$$+ \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right) =$$

$$= \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, a(t-\tau)}{R}\right) d\tau + \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right). \tag{9.49}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_2 = 0,$$

а из начального условия $\mathbf{T}_k'(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_1 = 0.$$

Таким образом, решение задачи (9.48) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, a(t-\tau)}{R}\right) d\tau,$$

где $f_k(t)$ задаются формулой (9.47):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr.$$

**Ответ:**

$$u(r;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) \cdot \frac{R}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\ a(t-\tau)}{R}\right) d\tau,$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ задаются формулой

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\,t) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr.$$

**№ 771 а).**

*Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса $R$, вызванные начальной скоростью*

$$\psi(r) = \begin{cases} U, & 0 \leqslant r < \frac{R}{2}, \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R, \end{cases} \qquad (9.50)$$

*если край мембраны закреплен жестко.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти функцию $u(x,\,y,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ u_t(r,\,0) = \psi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\,t)| < \infty, \quad u(R,\,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \qquad (9.51)$$

где $\psi(r)$ определена в (9.50). Эта задача – частный случай задачи, решенной нами в № 769 (с. 126). Воспользуемся его результатом:

$$u(r;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) \left(\frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\ at}{R}\right) + \varphi_k \cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\ at}{R}\right)\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулами

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr,$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr.$$

В нашем случае $\varphi(r) \equiv 0$ и, значит, $\varphi_k = 0$, а $\psi_k$ надо найти, исходя из вида функции $\psi$.

$$\int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr = \Big[\text{в силу (9.50)}\Big] = U \int\limits_0^{\frac{R}{2}} r J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr =$$

$$= \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right] = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \int\limits_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} x J_0(x)\, dx =$$

$$= \Big[\text{в силу (9.9), с. 121, } xJ_0(x) = [xJ_1(x)]'\Big] =$$

$$= \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \int\limits_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} [xJ_1(x)]'\, dx = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot [xJ_1(x)]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} = \frac{UR^2}{2\mu_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right).$$

Отсюда,

$$\frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}} = \frac{UR}{a\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot \frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}.$$

**<u>Ответ:</u>**

$$u(r;\, t) = \frac{UR}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot \frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) \cdot \sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\, at}{R}\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

### № 771 б).

*Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса $R$, вызванные начальной скоростью*

$$\psi(r) = \begin{cases} U, & 0 \leqslant r < \frac{R}{2}, \\ 0, & \frac{R}{2} < r < R, \end{cases} \tag{9.52}$$

*если край мембраны закреплен упруго.*

Записав эти условия математически, получим задачу:

*Найти функцию $u(x,\,y,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ u_t(r,\,0) = \psi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\,t)| < \infty, \quad u_r(R,\,t) + hu(R,\,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \tag{9.53}$$

где $\psi(r)$ определена в (9.52).

**<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения.**

Если искать решение задачи (9.53) в виде

$$u(r;\,t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t), \tag{9.54}$$

то, подставив (9.54) в уравнение $u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}''_k(t) = a^2 \sum_{k=\ldots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}''_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}''_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}''_k(t) + a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t) = 0, \tag{9.55}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k\mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \tag{9.56}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17), с. (9.17), с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.53).

Условие $|u(0,\, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.57}$$

а условие $u_r(R,\, t) + hu(R,\, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.58}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = h$ и $\beta = 1$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.59}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*

В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.59) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R\, J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля (9.59) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k^{(0)} = \left[\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \\ \text{где } \mu_k^{(0)} > 0 \ - \ \text{корни уравнения} \qquad \mu J_0'(\mu) + hR\, J_0(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.60}$$

**<u>Шаг 3.</u> Разложение функций $\varphi$ и $\psi$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функции $\sqrt{r}\ \varphi(r)$ и $\sqrt{r}\ \psi(r)$ разлагаются в ряд Фурье

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \tag{9.61}$$

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right), \tag{9.62}$$

$$\psi_k = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{\left(\mu_k^{(0)}\right)^2}\right) \underbrace{J_0^2\left(\mu_k^{(0)}\right)}_{=\left[-\frac{\mu_k}{hR} J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}} \times$$

$$\times \frac{1}{R^2} \cdot \int_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2h^2}{(R^2h^2 + \mu_k^2)\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr,$$

короче,

$$\varphi_k = 0, \qquad \psi_k = \frac{2h^2}{(R^2h^2 + \mu_k^2)\left[J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr.$$

Упростим вид этих выражений, применив рекуррентную формулу (9.8), с. 121:

$$J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

У нас $\nu = 0$, поэтому

$$J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right) = J_{-1}\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

А в силу соотношения (9.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

получаем

$$J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right) = -J_1\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

Поэтому

$$\varphi_k = 0, \quad \psi_k = \frac{2h^2}{(R^2h^2 + \mu_k^2)\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2} \cdot \int_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr. \tag{9.63}$$

**<u>Шаг 4.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**
Если искомый вид (9.54), с. 138, подставить в начальные условия

$$u(r,\,0)=\varphi(r),\qquad u_t(r,\,0)=\psi(r),$$

заменив функции $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ рядами (9.61) и (9.62), получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если ряды в левых и правых частях окажутся равны почленно, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0)=\mathbf{X}_k(r)\varphi_k,\\ \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k'(0)=\mathbf{X}_k(r)\psi_k. \end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0)=\varphi_k,\qquad \mathbf{T}_k'(0)=\psi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.55), с. 138, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k''(t)+a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t)=0,\\ \mathbf{T}_k(0)=\varphi_k,\\ \mathbf{T}_k'(0)=\psi_k. \end{cases} \tag{9.64}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{T}_k''(t)+a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t)=0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_k(t)=c_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\;at\right)+c_2\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\;at\right).$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0)=\varphi_k$ получаем, что

$$c_2=\varphi_k,$$

а из начального условия $\mathbf{T}_k'(0)=\psi_k$ получаем, что

$$c_1=\frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}}.$$

Таким образом, решение задачи (9.64) имеет вид

$$\mathbf{T}_k(t)=\frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}}\cdot\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\;at\right)+\varphi_k\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\;at\right),$$

где $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулой (9.63):

$$\varphi_k=0,\qquad\qquad \psi_k=\frac{2h^2}{(R^2h^2+\mu_k^2)\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr.$$

Найдем $\psi_k$, пользуясь условием (9.52).

$$\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr = \Big[\text{в силу (9.52)}\Big] = U\int\limits_0^{\frac{R}{2}} rJ_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr =$$

$$= \left[x = \frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right] = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}\int\limits_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} xJ_0\left(x\right)dx =$$

$$= \Big[\text{в силу (9.9), с. 121, } \ xJ_0(x) = [xJ_1(x)]'\Big] =$$

$$= \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}\int\limits_0^{\frac{\mu_k^{(0)}}{2}}[xJ_1(x)]'\,dx = \frac{UR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}\cdot[xJ_1(x)]\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\mu_k^{(0)}}{2}} = \frac{UR^2}{2\mu_k^{(0)}}\cdot J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right).$$

Отсюда, вспоминая, что $\sqrt{\lambda_k} = \frac{\mu_k^{(0)}}{R}$, запишем

$$\frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} = \frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}} = \frac{Uh^2R^3}{a\left(R^2h^2+\mu_k^2\right)\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}\cdot\frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)}{\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}.$$

Таким образом, $u(r;\,t) =$

$$= \frac{Uh^2R^3}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)}{\left(R^2h^2+\mu_k^2\right)\left[\mu_k^{(0)}\right]^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)\cdot\sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hR\,J_0(\mu) = 0$.
Можно немного упростить этот ответ, воспользовавшись рекуррентными формулами (9.9) и (9.11), с. 121:

$$\left[x^\nu J_\nu\right]'(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x), \qquad\qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

В самом деле, из того, что $\mu_k^{(0)}$ – корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hR\,J_0(\mu) = 0$, следует, что

$$\left(\frac{hR}{\mu_k^{(0)}}\right)^2 = \left(-\frac{J_0'\left(\mu_k^{(0)}\right)}{J_0\left(\mu_k^{(0)}\right)}\right)^2,$$

а из

$$J_0'(x) = J_{-1}(x) = -J_1(x)$$

получаем:

$$\left(\frac{hR}{\mu_k^{(0)}}\right)^2 = \left(\frac{J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}{J_0\left(\mu_k^{(0)}\right)}\right)^2,$$

и ответ принимает вид:
**Ответ:**

$$u(r;\, t) = \frac{UR}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{2}\right)}{(R^2h^2+\mu_k^2)\left[J_0\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)\cdot\sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu) + hR\, J_0(\mu) = 0$.

### № 772 а).

*Однородная круглая мембрана радиуса $R$ с жестко закрепленным краем совершает поперечные колебания, вызванные начальным отклонением*

$$\varphi(r) = A(R^2 - r^2). \tag{9.65}$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти функцию $u(x,\, y,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = \varphi(r) = A(R^2 - r^2), & 0 \leqslant r < R; \\ u_t(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\, t)| < \infty, \quad u(R,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.66}$$

Эта задача – частный случай задачи, решенной нами в № 769 (с. 126). Воспользуемся его результатом:

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)\left(\frac{R\psi_k}{a\mu_k^{(0)}}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right) + \varphi_k\cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right)\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулами

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr,$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr.$$

В нашем случае $\psi(r) \equiv 0$ и, значит, $\psi_k = 0$, а $\varphi_k$ надо найти, исходя из вида функции

$\varphi = A(R^2 - r^2)$. Найдем сначала интегралы $\int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr$ и $\int\limits_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr$.

$$\int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right] = \frac{R^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} x J_0(x)\, dx =$$

$$= \left[\text{в силу (9.9), с. 121,}\ \ x J_0(x) = [x J_1(x)]'\right] = \frac{R^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} [x J_1(x)]'\, dx =$$

$$= \frac{R^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot [x J_1(x)] \Big|_{x=0}^{x=\mu_k^{(0)}} = \frac{R^2}{\mu_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right). \quad (9.67)$$

$$\int\limits_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k^{(0)} r}{R}\right] = \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} x^3 J_0(x)\, dx =$$

$$= \left[\text{в силу (9.9), с. 121,}\ \ x J_0(x) = [x J_1(x)]';\quad \text{берем по частям}\right] =$$

$$= \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} x^2 \cdot [x J_1(x)]'\, dx =$$

$$= \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \left( x^3 J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k^{(0)}} - 2 \int\limits_0^{\mu_k^{(0)}} x^2 J_1(x) dx \right) =$$

$$= \left[\text{в силу (9.9), с. 121,}\ \ x^2 J_1(x) = \left[x^2 J_2(x)\right]'\right] =$$

$$= \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \left( \left[\mu_k^{(0)}\right]^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - 2 \left[x^2 J_2(x)\right] \Big|_{x=0}^{x=\mu_k^{(0)}} \right) =$$

$$= \frac{R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^4} \left( \left[\mu_k^{(0)}\right]^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - 2 \left[\mu_k^{(0)}\right]^2 J_2\left(\mu_k^{(0)}\right) \right) =$$

$$= \frac{R^4}{\mu_k^{(0)}} \cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - \frac{2R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2} \cdot J_2\left(\mu_k^{(0)}\right). \quad (9.68)$$

Поэтому

$$\int\limits_0^R A(R^2-r^2)\cdot rJ_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr = AR^2\cdot\frac{R^2}{\mu_k^{(0)}}\cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) -$$

$$-A\cdot\left(\frac{R^4}{\mu_k^{(0)}}\cdot J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) - \frac{2R^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}\cdot J_2\left(\mu_k^{(0)}\right)\right) = \frac{2AR^4}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2}\cdot J_2\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

И, наконец,

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)dr = \frac{4AR^2}{\left[\mu_k^{(0)}J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)\right]^2}\cdot J_2\left(\mu_k^{(0)}\right).$$

Осталось упростить это выражение. Воспользуемся рекуррентной формулой (9.10), с. 121:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

При $\nu = 1$ ири $x = \mu_k^{(0)}$ получим

$$J_2\left(\mu_k^{(0)}\right) - \frac{2}{\mu_k^{(0)}}J_1\left(\mu_k^{(0)}\right) + \underbrace{J_0\left(\mu_k^{(0)}\right)}_{=0} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{J_2\left(\mu_k^{(0)}\right)}{J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)} = \frac{2}{\mu_k^{(0)}},$$

откуда

$$\varphi_k = \frac{4AR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^2 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}\cdot\frac{J_2\left(\mu_k^{(0)}\right)}{J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)} = \frac{8AR^2}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}.$$

**Ответ:**

$$u(r;\,t) = 8AR^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\mu_k^{(0)}\right]^3 J_1\left(\mu_k^{(0)}\right)}\cdot J_0\left(\frac{\mu_k^{(0)}r}{R}\right)\cdot\cos\left(\frac{\mu_k^{(0)}\,at}{R}\right),$$

где $\mu_k^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

**№ 774.** *Найти функцию $u(x,\, y,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ u_t(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\, t)| < \infty, \quad u(R,\, t) = U\sin(\omega t), & t > 0, \end{cases} \tag{9.69}$$

где $\omega$ и $U$ – заданные константы.

**<u>Шаг 1.</u> Избавляемся от неоднородности в краевом условии**

Будем искать решение задачи (9.69) в виде

$$u(r,\, t) = v(r,\, t) + w(r,\, t), \tag{9.70}$$

где $w(r,\, t)$ – есть какое-либо решение задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ |w(0,\, t)| < \infty, \quad w(R,\, t) = U\sin(\omega t), & t > 0. \end{cases} \tag{9.71}$$

Поскольку нам нужно какое угодно решение (9.71), естественно искать функцию $w$ наиболее простого вида, например,

$$w(r,\, t) = b(r)\eta(t)$$

($w$ в виде суммы многочлена от $r$ и $\eta(t)$ в данном случае не годится, ибо из краевого условия сразу получится $\eta(t) = U\sin(\omega t)$, и уравнение не будет выполнено).

Для $w(r,\, t)$ искомого вида $b(r)\eta(t)$ выполнены соотношения

$$w_r = b'(r)\eta(t), \qquad w_{tt} = b(r)\eta''(t),$$

$$\frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r \equiv w_{rr} + \frac{1}{r}w_r = \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r}\right)\eta(t).$$

Чтобы выполнялось краевое условие $w(R,\, t) = U\sin(\omega t)$, достаточно взять

$$\eta(t) = U\sin(\omega t), \qquad\qquad b(R) = 1,$$

а подставляя $w = Ub(r)\sin(\omega t)$ в уравнение $w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r$, получаем равенство

$$-Ub(r)\omega^2\sin(\omega t) = a^2\left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r}\right)U\sin(\omega t).$$

То есть функция $b(r)$ должна быть решением задачи Коши

$$\begin{cases} b''(r) + \frac{b'(r)}{r} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 b(r), \\ b(R) = 1. \end{cases} \tag{9.72}$$

Уравнение в этой задаче есть уравнение Бесселя из задачи Штурма–Лиувилля (9.17), с. 123, где $\nu = 0, \quad \lambda = \mu^2 = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0$. Заметим, что (9.72) не есть в чистом виде задача Штурма–Лиувилля (9.17),

поскольку здесь у нас краевое условие неоднородно. Это не позволит нам напрямую применить теорему 9.4. Однако воспользоваться ее результатом мы можем, рассуждая следующим образом.
Предположим, мы знаем решение задачи (9.72). Это решение наверняка удовлетворяет с некоторыми $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ краевому условию $\tilde{\alpha} b(R) + \tilde{\beta} b'(R) = 0$ и, соответственно, всей задаче Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -(rb')' = \lambda rb, & \lambda = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2; \\ |b(+0)| < \infty; \\ \tilde{\alpha} b(R) + \tilde{\beta} b'(R) = 0, & \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta} \geqslant 0, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} > 0. \end{cases} \tag{9.73}$$

Поэтому функция $b(r)$, уже по теореме 9.4, имеет вид

$$b(r) = c \cdot J_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right) = c \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right).$$

Константа $c$, на которую мы умножили $J_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right)$, не мешает выполнению (9.73), зато с ее помощью легко добиться выполнения краевого условия $b(R) = 1$. Действительно,

$$c \cdot J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{1}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Итак,

$$b(r) = \frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}$$

и, наконец,

$$w(r,\, t) = \frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin\left(\omega\, t\right). \tag{9.74}$$

Такая функция $w(r,\, t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(r w_r\right)_r, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ w_t(r,\, 0) = \frac{\omega U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}, & 0 \leqslant r < R; \\ |w(0,\, t)| < \infty, \quad w(R,\, t) = U \sin\left(\omega\, t\right), & t > 0. \end{cases} \tag{9.75}$$

Вычтем из задачи (9.69) задачу (9.75). Получим, что функция $v(r,\, t) = u(r,\, t) - w(r,\, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(r v_r\right)_r, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ v_t(r,\, 0) = -\, \frac{\omega U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}, & 0 \leqslant r < R; \\ |v(0,\, t)| < \infty, \quad v(R,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.76}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи** (9.76)
Эта задача есть частный случай задачи № 769 (с. 126). Воспользуемся результатом:

$$v(r;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\left(\frac{R\psi_k}{a\mu_k}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k\,at}{R}\right) + \varphi_k\cos\left(\frac{\mu_k\,at}{R}\right)\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr,$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr$$

Поскольку начальное отклонение $\varphi(r) \equiv 0$, все коэффициенты

$$\varphi_k = 0, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Нам остается только посчитать $\psi_k$ для функции начальной скорости

$$\psi = -\,\frac{\omega U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Поскольку интеграл

$$\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr$$

есть интеграл Ломмеля (9.13) – (9.14):

$$\int\limits_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)dt = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x)J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\right), \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\int\limits_0^x t\left(J_\nu(\alpha t)\right)^2dt = \frac{x^2}{2}\left(\alpha J'_\nu(\alpha x)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\left(J_\nu(\alpha x)\right)^2, \qquad \nu > -1,$$

имеем два следующих случая.

**Случай отсутствия резонанса: $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$.**

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$- \frac{2\omega U}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot \int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$= -\frac{2\omega U}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \cdot \frac{a^2R^3}{R^2\omega^2 - a^2\mu_k^2} \times$$

$$\times \left(\frac{\omega}{a} J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right) \underbrace{J_0\left(\mu_k\right)}_{=0} - \frac{\mu_k}{R} J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) J_1\left(\mu_k\right)\right) = \frac{2a^2\omega U}{J_1\left(\mu_k\right)} \cdot \frac{\mu_k}{R^2\omega^2 - a^2\mu_k^2}.$$

Тогда

$$\frac{R\psi_k}{a\mu_k} = \frac{2a\omega UR}{J_1\left(\mu_k\right)\cdot\left(R^2\omega^2 - a^2\mu_k^2\right)}$$

и для функции $v(r,\, t)$ имеем представление:

$$v(r;\, t) = 2a\omega UR \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1\left(\mu_k\right)\cdot\left(R^2\omega^2 - a^2\mu_k^2\right)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right), \tag{9.77}$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

**Случай резонанса: $\exists m \in \mathbb{N}: \quad \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$.**

В силу ортогональности функций $J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ и $J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \equiv J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)$ на промежутке $(0,\, R)$ при $k \neq m$,

$$\psi_k = 0, \qquad k \neq m,$$

а при $k = m$ получаем

$$\psi_m = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_m\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_m\right)\right]^2} \cdot \left(\frac{R^2}{2}\left(\frac{\mu_m}{R}\underbrace{J_0'(\mu_m)}_{=-J_1(\mu_m)}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{0^2\cdot R^2}{\mu_m^2}\right)\underbrace{\left(J_0(\mu_m)\right)^2}_{=0}\right) = \frac{\mu_m^2}{R^2}.$$

Тогда

$$\frac{R\psi_k}{a\mu_k} = \begin{cases} 0, & \text{при } \ k \neq m; \\ \frac{\mu_m}{aR}, & \text{при } \ k = m \end{cases}$$

и для функции $v(r,\,t)$ имеем представление:

$$v(r;\,t)=\frac{\mu_m}{aR}\cdot J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)\cdot\sin\left(\frac{\mu_m\,at}{R}\right)=$$
$$=\left[\text{в силу равенства }\ \frac{\mu_m}{R}=\frac{\omega}{a}\right]=\frac{\omega}{a^2}\cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cdot\sin\left(\omega t\right). \quad (9.78)$$

Наконец, для решения

$$u(r,\,t)=v(r,\,t)+w(r,\,t)=v(r,\,t)+\frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}\sin\left(\omega\,t\right)$$

исходной задачи (9.69) получаем

**Ответ:** В случае отсутствия резонанса, то есть если $\frac{\omega}{a}\neq\frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k\in\mathbb{N}$,

$$u(r;\,t)=\frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}\sin\left(\omega\,t\right)+2a\omega UR\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1\left(\mu_k\right)\cdot\left(R^2\omega^2-a^2\mu_k^2\right)}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k\,at}{R}\right).$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.
В случае резонанса, то есть если $\exists m\in\mathbb{N}:\quad\frac{\omega}{a}=\frac{\mu_m}{R}$

$$u(r;\,t)=\frac{U J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}\sin\left(\omega\,t\right)+\frac{\omega}{a^2}\cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cdot\sin\left(\omega t\right)=$$
$$=\left(\frac{U}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}+\frac{\omega}{a^2}\right)\cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)\cdot\sin\left(\omega t\right).$$

**№ 776 а).**

*Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса $R$, вызванные непрерывно распределенной по мембране поперечной силой плотности*

$$q\sin\left(\omega t\right),$$

*действующей с момента $t=0$, если край мембраны закреплен жестко.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти функцию $u(x,\,y,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{q}{\rho}\sin\left(\omega t\right), & 0\leqslant r<R,\quad t>0;\\ u(r,\,0)=0, & 0\leqslant r<R;\\ u_t(r,\,0)=0, & 0\leqslant r<R;\\ |u(0,\,t)|<\infty,\quad u(R,\,t)=0, & t>0.\end{cases}\qquad(9.79)$$

Эта задача – частный случай задачи № 770 (с. 130). Но мы не будем пользоваться ее результатом, поскольку тогда нам пришлось бы вычислять интегралы

$$\int\limits_0^t \sin(\omega\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\, a(t-\tau)}{R}\right)d\tau,$$

в двух случаях – резонансном и не-резонансном, а затем суммировать ряды, иначе получить ответ в том виде, как в задачнике, не удастся.
Самый простой путь решить данную задачу, – это представить ее решение в виде суммы

$$u(r,\,t) = w(t) + v_1(r,\,t) + v_2(r,\,t),$$

где

$$w(r,\,t) = -\,\frac{q}{\rho\omega^2}\sin(\omega t)\,,$$

и функции $v_1(r,\,t)$ и $v_2(r,\,t)$ есть решения задач:

$$\left\{\; w_{tt} = \tfrac{q}{\rho}\sin(\omega t)\,, \qquad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0 \right. \tag{9.80}$$

$$\begin{cases} v_{1\,tt} = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(rv_{1\,r}\right)_r, & 0\leqslant r<R, \quad t>0;\\ v_1(r,\,0) = -w(0) = 0, & 0\leqslant r<R;\\ v_{1\,t}(r,\,0) = -w_t(0) = \frac{q}{\rho\omega}, & 0\leqslant r<R;\\ |v_1(0,\,t)|<\infty, \quad v_1(R,\,t)=0, & t>0. \end{cases} \tag{9.81}$$

$$\begin{cases} v_{2\,tt} = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(rv_{2\,r}\right)_r, & 0\leqslant r<R, \quad t>0;\\ v_2(r,\,0) = 0, & 0\leqslant r<R;\\ v_{2\,t}(r,\,0) = 0, & 0\leqslant r<R;\\ |v_1(0,\,t)|<\infty, \quad v_2(R,\,t) = -w(t) = \frac{q}{\rho\omega^2}\sin(\omega t)\,, & t>0. \end{cases} \tag{9.82}$$

Задача (9.81) есть частный случай задачи из № 769 (с. 126), а (9.82) – частный случай задачи из № 774 (с. 146) при $U = \frac{q}{\rho\omega^2}$. Выпишем результаты:

$$v_1(r;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\left(\frac{R\psi_k}{a\mu_k}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + \varphi_k\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулой

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1(\mu_k)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr,$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1(\mu_k)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

В случае отсутствия резонанса, то есть если $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k\in\mathbb{N}$,

$$v_2(r;\,t) = \frac{qJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\rho\omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}\sin(\omega\, t) + \frac{2aqR}{\rho\omega}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1(\mu_k)\cdot\left(R^2\omega^2 - a^2\mu_k^2\right)}\cdot\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.
В случае резонанса, то есть если $\exists m \in \mathbb{N}: \quad \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$

$$v_2(r;\, t) = \left( \frac{q}{\rho\omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + \frac{\omega}{a^2} \right) \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \sin\left(\omega t\right).$$

Чтобы использовать формулу для $v_1(r,\, t)$, надо найти $\varphi_k$ и $\psi_k$. Поскольку $\varphi(r) = -w(0) = 0$, а $\psi(r) = -w'(0) = \frac{q}{\rho\omega}$,

$$\varphi_k = 0, \qquad k \in \mathbb{N};$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2q}{\rho\omega R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{2q}{\rho\omega\left[\mu_k J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x J_0\left(x\right) dx =$$

$$= \left[\text{в силу (9.9) при } \ \nu = 0\right] = \frac{2q}{\rho\omega\left[\mu_k J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} \left[x J_1\left(x\right)\right]' dx =$$

$$= \frac{2q}{\rho\omega\left[\mu_k J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot x J_1\left(x\right) \Bigg|_{x=0}^{x=\mu_k} = \frac{2q}{\rho\omega\mu_k J_1\left(\mu_k\right)}$$

Поэтому

$$v_1(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \frac{R\psi_k}{a\mu_k} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\ at}{R}\right) = \frac{2qR}{\rho\omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1\left(\mu_k\right)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\ at}{R}\right).$$

Таким образом, для решения

$$u(r,\, t) = w(t) + v_1(r,\, t) + v_2(r,\, t)$$

исходной задачи (9.79) получаем

**<u>Ответ:</u>** В случае отсутствия резонанса, то есть если $\frac{\omega}{a} \neq \frac{\mu_k}{R}$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$,

$$u(r;\, t) = -\frac{q}{\rho\omega^2} \sin\left(\omega t\right) + \frac{2qR}{\rho\omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1\left(\mu_k\right)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\ at}{R}\right) +$$

$$+ \frac{q J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{\rho\omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} \sin\left(\omega\, t\right) + \frac{2aqR}{\rho\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1\left(\mu_k\right) \cdot \left(R^2\omega^2 - a^2\mu_k^2\right)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\ at}{R}\right) =$$

$$= \frac{q}{\rho\omega^2} \sin(\omega t) \left[ \frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] +$$

$$+ \frac{2qR^3\omega}{a\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{J_1(\mu_k) \cdot \mu_k^2 \cdot (R^2\omega^2 - a^2\mu_k^2)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.
В случае резонанса, то есть если $\exists m \in \mathbb{N}: \quad \frac{\omega}{a} = \frac{\mu_m}{R}$

$$u(r;\, t) = -\frac{q}{\rho\omega^2} \sin(\omega t) + \frac{2qR}{\rho\omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) +$$

$$+ \left( \frac{q}{\rho\omega^2 J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + \frac{\omega}{a^2} \right) \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) \cdot \sin(\omega t) =$$

$$= \frac{q}{\rho\omega^2} \sin(\omega t) \left[ \frac{J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + \frac{\rho\omega^3}{qa^2} - 1 \right] + \frac{2qR}{\rho\omega a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \cdot \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

### № 776 б).

*Определить поперечные колебания однородной круглой мембраны радиуса $R$, вызванные непрерывно распределенной по мембране поперечной силой плотности*

$$q \sin(\omega t),$$

*действующей с момента $t = 0$, если край мембраны закреплен упруго.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти функцию $u(x,\, y,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{q}{\rho} \sin(\omega t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ u_t(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\, t)| < \infty, \quad u_r(R,\, t) + hu(R,\, t) = 0, & h > 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{9.83}$$

Для полноты картины, приведем решение данной задачи, аналогичное № 770 (с. 130).

**<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.83) в виде

$$u(r;\, t) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \tag{9.84}$$

и предположить, что для $f(r,\,t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r;\,t)=\sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)f_k(t), \tag{9.85}$$

то, подставив (9.84) и (9.85) в уравнение $u_{tt}=a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+f$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}''_k(t)=a^2\sum_{k=\ldots}^{\infty}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t)+\sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}''_k(t)=\frac{a^2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t)+\mathbf{X}_k(r)f_k(t),\qquad\forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}''_k(t)-f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)}=\frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists\lambda_k\in\mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}''_k(t)-f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)}=\frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}=-\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}''_k(t)+a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t)=f_k(t), \tag{9.86}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)+\lambda_k\mathbf{X}_k(r)=0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right)=-\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \tag{9.87}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu=0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.83).

Условие $|u(0,\,t)|<\infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)|<\infty, \tag{9.88}$$

а условие $u_r(R,\,t)+hu(R,\,t)=0$ – в условие

$$\mathbf{X}'_k(R)+h\mathbf{X}_k(R)=0. \tag{9.89}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля**
Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.90}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.
*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*
В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.90) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:
*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.90) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} \qquad hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.91}$$

**<u>Шаг 3.</u> Разложение функции $f(r,\, t)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**
В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\ f(r,\, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{9.92}$$

$$f_k(t)=\frac{1}{\frac{1}{2}\left[J_0'\left(\mu_k\right)\right]^2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{0^2}{\left(\mu_k\right)^2}\right)\underbrace{J_0^2\left(\mu_k\right)}_{=\left[-\frac{h\mu_k}{R}J_0'(\mu_k)\right]^2}}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\int\limits_0^R rf(r,\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr=$$

$$=\frac{2}{\left(R^2+h^2\mu_k^2\right)\underbrace{\left[J_0'\left(\mu_k\right)\right]^2}_{=\left[-J_1(\mu_k)\right]^2}}\cdot\int\limits_0^R rf(r,\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

Итак,

$$f_k(t)=\frac{2}{\left(R^2+h^2\mu_k^2\right)\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R rf(r,\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr. \tag{9.93}$$

**<u>Шаг 4.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.84), с. 153, подставить в начальные условия

$$u(r,\,0)=0,\qquad u_t(r,\,0)=0,$$

получим, что эти начальные условия будут заведомо выполнены, если все слагаемые рядов в левых частях окажутся равны нулю, то есть будут выполнены соотношения

$$\begin{cases}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0)=0,\\ \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k'(0)=0.\end{cases}$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0)=0,\qquad \mathbf{T}_k'(0)=0.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.86), с. 154, и учитывая, что $\lambda_k=\left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases}\mathbf{T}_k''(t)+\frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t)=f_k(t),\\ \mathbf{T}_k(0)=0,\\ \mathbf{T}_k'(0)=0.\end{cases} \tag{9.94}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}''(t)+\frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t)=0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t)=c_1\sin\left(\frac{\mu_k\;at}{R}\right)+c_2\cos\left(\frac{\mu_k\;at}{R}\right).$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных.

Если функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ образуют ФСР линейного однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$$

имеет вид

$$y_{\text{оНо}} = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \ldots + c_n(x)y_n,$$

где функции $c_1(x),\ c_2(x),\ \ldots,\ c_n(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 + \ldots + c_n'y_n = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' + \ldots + c_n'y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1'y_1^{n-2} + c_2'y_2^{n-2} + \ldots + c_n'y_n^{n-2} = 0 \\ c_1'y_1^{n-1} + c_2'y_2^{n-1} + \ldots + c_n'y_n^{n-1} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае ФСР образуется парой функций $\left\{\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right),\ \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\right\}$, порядок уравнения $n = 2$, и в системе будет всего 2 уравнения:

$$\begin{cases} c_1'\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + c_2'\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) = 0 \\ \frac{a\mu_k}{R}\left(c_1'\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) - c_2'\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\right) = f_k(t). \end{cases}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, например, по правилу Крамера, получим:

$$\begin{cases} c_1'(t) = \dfrac{f_k(t)R\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)}{a\mu_k}, \\[2ex] c_2'(t) = -\dfrac{f_k(t)R\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)}{a\mu_k}. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k}\cdot\left(\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\int\limits_0^t f_k(\tau)\cos\left(\frac{\mu_k\, a\tau}{R}\right)d\tau - \right.$$

$$\left. - \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\, a\tau}{R}\right)d\tau\right) +$$

$$+ \tilde{c}_1\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + \tilde{c}_2\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) = \frac{R}{a\mu_k}\times$$

$$\times\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\, a(t-\tau)}{R}\right)d\tau + \tilde{c}_1\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + \tilde{c}_2\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right).$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_2 = 0,$$

а из начального условия $\mathbf{T}_k'(0) = 0$ получаем, что

$$\tilde{c}_1 = 0.$$

Таким образом, решение задачи (9.94) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R}\right) d\tau,$$

где $f_k(t)$ задаются формулой (9.93):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

**Промежуточный ответ:**

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R}\right) d\tau,$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ задаются формулой

$$f_k(t) = \frac{2}{\left(R^2 + h^2\mu_k^2\right)\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Чтобы получить окончательный ответ, надо найти интегралы

$$\int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$$

$$\text{и} \qquad \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R}\right) d\tau.$$

С учетом вида $f(r,\, t) = \frac{q}{\rho} \sin(\omega t)$, получаем

$$\int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{q}{\rho} \sin(\omega t) \int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] =$$

$$= \frac{qR^2}{\rho\mu_k^2}\sin(\omega t)\int\limits_0^{\mu_k} xJ_0(x)dx = \Big[\text{по формуле (9.9) при }\ \nu = 0\Big] =$$

$$= \frac{qR^2}{\rho\mu_k^2}\sin(\omega t)\int\limits_0^{\mu_k} [xJ_1(x)]'\,dx = \frac{qR^2}{\rho\mu_k^2}\sin(\omega t)\cdot\mu_k J_1(\mu_k) = \frac{qR^2}{\rho\mu_k}J_1(\mu_k)\sin(\omega t)\,.$$

Таким образом,

$$f_k(t) = \frac{2qR^2}{(R^2+h^2\mu_k^2)\,\rho\mu_k\,[J_1(\mu_k)]^2}\cdot J_1(\mu_k)\sin(\omega t)\,, \tag{9.95}$$

и мы теперь можем найти интегралы

$$\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R}\right)d\tau =$$

$$= underset{=}\ c_k\ =\ const\underbrace{\frac{2qR^2}{(R^2+h^2\mu_k^2)\,\rho\mu_k J_1(\mu_k)}}\cdot\int\limits_0^t \sin(\omega\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R}\right)d\tau.$$

**Случай отсутствия резонанса, то есть $\mu_k a \neq R\omega$ ни прикаких $k\in\mathbb{N}$.**
Простейший способ в данном случае связан с операционным исчислением.
Нам понадобится свойство преобразования Лапласа.
Если $f_1 \risingdotseq F_1(p)$ и $f_2 \risingdotseq F_2(p)$, то

$$f_1 * f_2 = \int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p),$$

а также известное соотношение

$$\sin at \risingdotseq \frac{a}{p^2+a^2}, \qquad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} a|\,.$$

Обозначим

$$\alpha = \omega, \qquad \beta = \frac{\mu_k\,a}{R}$$

и искомый интеграл примет вид:

$$\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R}\right)d\tau = c_k\int\limits_0^t \sin(\alpha\tau)\sin(\beta(t-\tau))\,d\tau =$$

$$= c_k\sin(\alpha t) * \sin(\beta t) \risingdotseq c_k\cdot\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\cdot\frac{\beta}{p^2+\beta^2} = \Big[\text{так как }\ \alpha\neq\beta\Big] =$$

$$= \frac{c_k \alpha^2 \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \frac{1}{p^2+\alpha^2} - \frac{1}{p^2+\beta^2} \right) = \frac{c_k \alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \beta \cdot \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2} - \alpha \cdot \frac{\beta}{p^2+\beta^2} \right) \risingdotseq$$

$$\fallingdotseq \frac{c_k \alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \left( \beta \sin(\alpha t) - \alpha \sin(\beta t) \right).$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left( \frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R} \right) d\tau =$$

$$= \frac{2aqR^3\omega}{\rho J_1(\mu_k)\left(R^2 + h^2\mu_k^2\right)\left(a^2\mu_k^2 - R^2\omega^2\right)} \cdot \left( \frac{\mu_k\ a}{R} \sin(\omega t) - \omega \sin\left( \frac{\mu_k\ at}{R} \right) \right).$$

**Случай резонанса, то есть $\exists m \in \mathbb{N}: \quad \mu_m a = R\omega$.**
В этом случае интеграл проще брать обычным образом:

$$\int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left( \frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R} \right) d\tau = c_k \int\limits_0^t \sin(\omega\tau) \sin(\omega(t-\tau))\, d\tau =$$

$$= \frac{c_k}{2} \int\limits_0^t \Big( \cos\big(\omega\left(2\tau - t\right)\big) - \cos(\omega t) \Big)\, d\tau = \frac{c_k}{4\omega} \cdot\ \sin\big(\omega\left(2\tau - t\right)\big)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} -$$

$$- c_k \cdot \frac{t}{2} \cos(\omega t) = c_k \left( \frac{\sin(\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2} \cos(\omega t) \right).$$

Наконец, в силу формулы из промежуточного ответа

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0\left( \frac{\mu_k r}{R} \right) \cdot \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left( \frac{\mu_k\ a(t-\tau)}{R} \right) d\tau,$$

получаем:
**Ответ:** Случай отсутствия резонанса, то есть $\mu_k a \neq R\omega$ ни при каких $k \in \mathbb{N}$.

$$u(r;\, t) = \frac{2aqR^3\omega}{\rho} \sin(\omega t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\mu_k)\left(R^2 + h^2\mu_k^2\right)\left(a^2\mu_k^2 - R^2\omega^2\right)} \cdot J_0\left( \frac{\mu_k r}{R} \right) -$$

$$- \frac{2qR^4\omega^2}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1(\mu_k)\left(R^2 + h^2\mu_k^2\right)\left(a^2\mu_k^2 - R^2\omega^2\right)} \cdot J_0\left( \frac{\mu_k r}{R} \right) \sin\left( \frac{\mu_k\ at}{R} \right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$.
Случай резонанса, то есть $\exists m \in \mathbb{N}: \quad \mu_m a = R\omega$.

$$u(r;\,t) = \frac{2qR^3}{a\rho\mu_m^2 J_1(\mu_m)\left(R^2+h^2\mu_m^2\right)}\left(\frac{\sin(\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2}\cos(\omega t)\right) =$$

$$= \left[\mu_m = \frac{R\omega}{a}\right] = \frac{2qa^3}{\rho R^4\omega^2 J_1\left(\frac{R\omega}{a}\right)\left(a^2+h^2\omega^2\right)}\left(\frac{\sin(\omega t)}{4\omega} - \frac{t}{2}\cos(\omega t)\right).$$

**№ 776 б). Способ, позволяющий найти явное представление вынужденных колебаний.**

*Найти функцию* $u(x,\,y,\,t)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{q}{\rho}\sin(\omega t), & 0\leqslant r<R, \quad t>0;\\ u(r,\,0) = 0, & 0\leqslant r<R;\\ u_t(r,\,0) = 0, & 0\leqslant r<R;\\ |u(0,\,t)|<\infty, \quad u_r(R,\,t)+hu(R,\,t) = 0, & h>0, \quad t>0. \end{cases} \tag{9.96}$$

**<u>Шаг 1.</u> Представление решения в виде суммы вынужденных и свободных колебаний**

Представим решение $u(r,\,t)$ данной задачи в виде суммы

$$u(r,\,t) = w(r,\,t) + v(r,\,t), \tag{9.97}$$

где функция

$$w(t) = b(r)\sin(\omega t),$$

описывающая вынужденные колебания, и функция $v(r,\,t)$, соответствующая свободным колебаниям, есть решения задач:

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(rw_r)_r + \frac{q}{\rho}\sin(\omega t), & 0\leqslant r<R, \quad t>0;\\ |w(0,\,t)|<\infty, \quad w_r(R,\,t)+hw(R,\,t)=0, & h>0, \quad t>0. \end{cases} \tag{9.98}$$

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(rv_r)_r, \quad 0\leqslant r<R, & t>0;\\ v(r,\,0) = -w(r,\,0), & 0\leqslant r<R;\\ v_t(r,\,0) = -w_t(r,\,0), & 0\leqslant r<R;\\ |v(0,\,t)|<\infty, \quad v_r(R,\,t)+hv(R,\,t)=0, & h>0\ t>0. \end{cases} \tag{9.99}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решения задачи для** $w(r,\,t)$

Для $w(r,\,t)$ искомого вида $b(r)\sin(\omega t)$ выполнены соотношения

$$w_r = b'(r)\sin(\omega t), \qquad w_{tt} = -\omega^2 b(r)\sin(\omega t),$$

$$\frac{1}{r}\cdot(rw_r)_r \equiv w_{rr} + \frac{1}{r}w_r = \left(b''(r) + \frac{b'(r)}{r}\right)\sin(\omega t).$$

Подставляя $w = b(r)\sin(\omega t)$ в уравнение $w_{tt} = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(rw_r)_r + \frac{q}{\rho}\sin(\omega t)$, получаем равенство

$$-b(r)\omega^2\sin(\omega t) = a^2\left(b''(r)+\frac{b'(r)}{r}\right)\sin(\omega t) + \frac{q}{\rho}\sin(\omega t).$$

То есть функция $b(r)$ должна быть решением задачи Коши

$$\begin{cases} b''(r) + \frac{b'(r)}{r} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 b(r) - \frac{q}{a^2\rho}, \\ b'(R) + hb(R) = 0. \end{cases} \qquad (9.100)$$

Уравнение в этой задаче есть неонородное уравнение Бесселя. Чтобы свести его к однородному, достаточно найти какое-либо его частное решение. В данном случае его легко найти в виде константы:

$$b_{\text{чНо}} = -\frac{q}{\omega^2\rho}.$$

Поэтому искомая функция имеет вид

$$b(r) = -\frac{q}{\omega^2\rho} + g(r),$$

где $g(r)$ есть какое-либо решение задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} g''(r) + \frac{g'(r)}{r} = -\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 g(r), \\ \\ g'(R) + hg(R) = \frac{qh}{\omega^2\rho} \end{cases} \qquad (9.101)$$

с неоднородным краевым условием.

Уравнение в этой задаче есть уравнение Бесселя из задачи Штурма–Лиувилля (9.17), с. 123, где $\nu = 0$, $\lambda = \mu^2 = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2$, $\alpha = h$, $\beta = 1$. Заметим, что (9.72) не есть в чистом виде задача Штурма–Лиувилля (9.17), поскольку здесь у нас краевое условие неоднородно. Это не позволит нам напрямую применить теорему 9.4. Однако воспользоваться ее результатом мы можем, рассуждая следующим образом:
Предположим, мы знаем решение задачи (9.72). Это решение наверняка удовлетворяет с некоторыми $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ краевому условию $\tilde{\alpha}g(R) + \tilde{\beta}g'(R) = 0$ и, соответственно, всей задаче Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} -(rg')' = \lambda rg, & \lambda = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2; \\ |g(+0)| < \infty; & \\ \tilde{\alpha}g(R) + \tilde{\beta}g'(R) = 0, & \tilde{\alpha},\ \tilde{\beta} \geqslant 0, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} > 0. \end{cases} \qquad (9.102)$$

Поэтому функция $g(r)$, уже по теореме 9.4, имеет вид

$$g(r) = c \cdot J_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right) = c \cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right).$$

Константа $c$, на которую мы умножили $J_0\left(\sqrt{\lambda}\, r\right)$, не мешает выполнению (9.102), зато с ее помощью легко добиться выполнения краевого условия $g'(R) + hg(R) = \frac{qh}{\omega^2\rho}$. Действительно,

$$c \cdot \left( \underbrace{\frac{\omega}{a} J_0'\left(\frac{\omega R}{a}\right)}_{=-J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} + hJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) \right) = \frac{qh}{\omega^2\rho} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{aqh}{\omega^2\rho} \cdot \frac{1}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Итак,

$$g(r)=\frac{aqh}{\omega^2\rho}\cdot\frac{1}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}\cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right),$$

следовательно,

$$b(r)=-\frac{q}{\omega^2\rho}+\frac{aqh}{\omega^2\rho}\cdot\frac{1}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}\cdot J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)=$$

$$=\frac{q}{\omega^2\rho}\left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right]$$

и, наконец, $w(r,\,t)=b(r)\sin(\omega\,t)$ примет вид

$$w(r,\,t)=\frac{q}{\omega^2\rho}\left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right]\sin(\omega\,t)\,. \tag{9.103}$$

Такая функция $w(r,\,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w_{tt}=a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(rw_r)_r\,, & t>0, \quad 0\leqslant r<R;\\ w(r,\,0)=0, & 0\leqslant r<R;\\ w_t(r,\,0)=\frac{q}{\omega\rho}\left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right], & 0\leqslant r<R;\\ |w(0,\,t)|<\infty, \quad w_r(R,\,t)+hw(R,\,t)=0, & t>0. \end{cases} \tag{9.104}$$

**<u>Шаг 3.</u> Решение задачи для $v(r,\,t)$**

**<u>Шаг 3-1.</u> Решение в общем виде**

Решим в общем виде задачу

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(rv_r)_r+f(r,\,t), & 0\leqslant r<R, \quad t>0;\\ v(r,\,0)=\varphi(r), & 0\leqslant r<R;\\ v_t(r,\,0)=\psi(r), & 0\leqslant r<R;\\ |v(0,\,t)|<\infty, & h>0\ t>0;\\ v_r(R,\,t)+hv(R,\,t)=0, & h>0\ t>0. \end{cases} \tag{9.105}$$

**<u>Шаг 3-1-1.</u> Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.105) в виде

$$v(r;\,t)=\sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t), \tag{9.106}$$

и предположить, что для $f(r,\,t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r;\,t)=\sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)f_k(t), \tag{9.107}$$

то, подставив (9.106) и (9.107) в уравнение $v_t=a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(rv_r)_r+f$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k''(t)=a^2\sum_{k=\ldots}^{\infty}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t)+\sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k''(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r)f_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}_k''(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k''(t) + a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \tag{9.108}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k\mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \tag{9.109}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.105).

Условие $|v(0,\, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.110}$$

а условие $v_r(R,\, t) + hv(R,\, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.111}$$

**Шаг 3-1-2. Решение задачи Штурма-Лиувилля**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.112}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля*

*тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*
В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.112) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:
*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.112) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \ \mu_k \ - \ \text{корни уравнения} \qquad hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.113}$$

**<u>Шаг 3-1-3.</u> Разложение функций $f(r,\, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**
В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\ f(r,\, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r,\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{9.114}$$

$$f_k(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\underbrace{\left[J_0'\left(\mu_k\right)\right]^2}_{=\left[-J_1(\mu_k)\right]^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{\left(\mu_k\right)^2}\right) J_0^2\left(\mu_k\right)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \tag{9.115}$$

Аналогично, для функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ справедливы разложения в ряд

$$\varphi(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\qquad \psi(r)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \tag{9.116}$$

с коэффициентами

$$\varphi_k=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr \tag{9.117}$$

$$\psi_k=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr. \tag{9.118}$$

**<u>Шаг 3-1-4.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.106), с. 163, решения $v(r,\,t)$ и разложения (9.116) функций $\varphi(r)$ и $\psi(r)$ подставить в начальные услови

$$v(r,\,0)=\varphi(r),\qquad\qquad v_t(r,\,0)=\psi(r)$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0)=\varphi_k\mathbf{X}_k(r),\qquad\qquad \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}'_k(0)=\psi_k\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0)=\varphi_k,\qquad\qquad \mathbf{T}'_k(0)=\psi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.108), с. 164, и учитывая, что $\lambda_k=\left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{T}''_k(t)+\frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t)=f_k(t),\\ \mathbf{T}_k(0)=\varphi_k,\\ \mathbf{T}'_k(0)=\psi_k.\end{array}\right. \tag{9.119}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t)+\frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t)=0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t)=ce^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Если функции $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ образуют ФСР линейного однородного уравнения

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0,$$

то общее решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

имеет вид

$$y_{\text{оно}} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 + \ldots + c_n(x) y_n,$$

где функции $c_1(x),\ c_2(x),\ \ldots,\ c_n(x)$ находятся из системы

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \ldots + c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \ldots + c_n' y_n' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1' y_1^{n-2} + c_2' y_2^{n-2} + \ldots + c_n' y_n^{n-2} = 0 \\ c_1' y_1^{n-1} + c_2' y_2^{n-1} + \ldots + c_n' y_n^{n-1} = f(x). \end{cases}$$

В нашем случае ФСР образуется парой функций $\left\{\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right),\ \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\right\}$, порядок уравнения $n = 2$, и в системе будет всего 2 уравнения:

$$\begin{cases} c_1' \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + c_2' \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) = 0 \\ \frac{a\mu_k}{R}\left(c_1' \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) - c_2' \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\right) = f_k(t). \end{cases}$$

Решив эту систему линейных алгебраических уравнений, например, по правилу Крамера, получим:

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{f_k(t) R \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)}{a\mu_k}, \\ \\ c_2'(t) = -\frac{f_k(t) R \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)}{a\mu_k}. \end{cases}$$

Отсюда,

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k} \cdot \left( \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) \int\limits_0^t f_k(\tau) \cos\left(\frac{\mu_k\, a\tau}{R}\right) d\tau - \right.$$

$$\left. - \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k\, a\tau}{R}\right) d\tau \right) + \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) =$$

$$= \frac{R}{a\mu_k} \cdot \int\limits_0^t f_k(\tau) \sin\left(\frac{\mu_k\, a(t-\tau)}{R}\right) d\tau +$$

$$+ \tilde{c}_1 \sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + \tilde{c}_2 \cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right).$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k$ получаем, что

$$\tilde{c}_2 = \varphi_k,$$

а из начального условия $\mathbf{T}'_k(0) = \psi_k$ получаем, что

$$\tilde{c}_1 = \frac{R}{a\mu_k}\psi_k.$$

Таким образом, решение задачи (9.119) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \frac{R}{a\mu_k}\cdot\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\, a(t-\tau)}{R}\right)d\tau + \\ + \frac{R\psi_k}{a\mu_k}\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + \varphi_k\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right). \quad (9.120)$$

где $f_k(t)$, $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулами (9.115), (9.117) и (9.118):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R rf(r,\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr,$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

**Ответ в общем виде:**

$$v(r;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{R}{a\mu_k}\cdot\int\limits_0^t f_k(\tau)\sin\left(\frac{\mu_k\, a(t-\tau)}{R}\right)d\tau + \right. \\ \left. + \frac{R\psi_k}{a\mu_k}\sin\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right) + \varphi_k\cos\left(\frac{\mu_k\, at}{R}\right)\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J'_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$, $\varphi_k$ и $\psi_k$ задаются формулами:

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R rf(r,\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2+[J_0(\mu_k)]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr,$$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2+[J_0(\mu_k)]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

**<u>Шаг 3-2.</u> Вычисление решения с данными** $f(r,\,t)$, $\varphi(r)$ **и** $\psi(r)$
Поскольку в задаче (9.99) $f(r,\,t)\equiv 0$ и $\varphi(r) = -w(r,\,0)\equiv 0$, то

$$f_k(t) = 0, \qquad \varphi_k = 0.$$

Найдем $\psi_k$ для функции $\psi(r) = -w_t(r,\,0) = -\frac{q}{\omega\rho}\left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1\right]:$

$$\psi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2+[J_0(\mu_k)]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr =$$

$$= -\frac{ahq}{\omega\rho}\cdot\frac{1}{\left([J_1(\mu_k)]^2+[J_0(\mu_k)]^2\right)\left(ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)\right)}\times$$

$$\times\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr \;-\; \frac{q}{\omega\rho}\cdot\frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2+[J_0(\mu_k)]^2}\cdot\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

Последний интеграл находится стандартным образом:

$$\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr = \frac{R^2}{\mu_k^2}\int\limits_0^{\mu_k}[xJ_1(x)]'\,dx = \frac{R^2 J_1(\mu_k)}{\mu_k}.$$

А для интеграла $\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr$ придется рассмотреть два случая:

**<u>Случай без резонанса</u>** ($a\mu_k \neq \omega R$ **ни при каких** $k\in\mathbb{N}$)
По формуле для интегралов Ломмеля (9.13) при $\alpha\neq\beta$

$$\int\limits_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)dt = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\left(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x)J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\right)$$

получаем:

$$\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr = \frac{aR^2}{\omega^2R^2-\mu^2a^2}\left[\omega RJ_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)J_0\left(\mu_k\right)-\right.$$

$$\left.\mu_k aJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)J_1\left(\mu_k\right)\right] = \left[\text{в силу равенства}\quad hRJ_0\left(\mu_k\right)=\mu_kJ_1\left(\mu_k\right)\right] =$$

$$= \frac{aR^3}{\omega^2R^2-\mu^2a^2}\left[\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)-ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)\right]J_0\left(\mu_k\right).$$

Тогда для $\psi_k$ верна формула

$$\psi_k = -\frac{ahq}{\omega\rho}\cdot\frac{aR^3}{\left(\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2\right)\left(ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)\right)\left(\omega^2R^2-\mu_k^2a^2\right)}\times$$

$$\times\left[\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)-ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)\right]J_0\left(\mu_k\right)-\frac{q}{\omega\rho}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{R^2J_1\left(\mu_k\right)}{\mu_k} =$$

$$= \frac{R^2q}{\omega\rho}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\left[\frac{a^2hRJ_0\left(\mu_k\right)}{\omega^2R^2-\mu_k^2a^2}-\frac{J_1\left(\mu_k\right)}{\mu_k}\right]$$

Упростим это выражение, вновь пользуясь тем, что $\mu_k$ – корни уравнения $\mu J_0'(\mu)+hR\,J_0(\mu)=0$, откуда следует, что

$$\mu_kJ_1(\mu_k)\equiv-\mu_kJ_0'(\mu_k)=hR\,J_0(\mu_k),$$

и, поэтому,

$$\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2 = \left(\frac{h^2R^2}{\mu_k^2}+1\right)J_0^2\left(\mu_k\right) = \left(h^2R^2+\mu_k^2\right)\frac{J_0^2\left(\mu_k\right)}{\mu_k^2}$$

Таким образом, $\psi_k$ имеет представление:

$$\psi_k = \frac{R^2q}{\omega\rho}\cdot\frac{\mu_k^2}{\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\cdot\left[\frac{a^2\overbrace{hRJ_0\left(\mu_k\right)}^{=\mu_kJ_1(\mu_k)}}{\omega^2R^2-\mu_k^2a^2}-\frac{J_1\left(\mu_k\right)}{\mu_k}\right] =$$

$$= \frac{R^2q}{\omega\rho}\cdot\frac{\mu_k^2J_1(\mu_k)}{\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\cdot\left[\frac{a^2\mu_k}{\omega^2R^2-\mu_k^2a^2}-\frac{1}{\mu_k}\right]$$

Итак, фукнция $v(r;\,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{R\psi_k}{a\mu_k}\sin\left(\frac{\mu_k\,at}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_kr}{R}\right)$ принимает вид:

$$v(r;\,t) = \frac{R^3 q}{a\omega\rho}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k^2 J_1(\mu_k)}{\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\times$$
$$\times\left[\frac{a^2\mu_k}{\omega^2R^2-\mu_k^2a^2}\;-\;\frac{1}{\mu_k}\right]\cdot\sin\left(\frac{\mu_k\;at}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\quad(9.121)$$

**Случай резонанса** $(\exists m\in\mathbb{N}:\quad a\mu_m=\omega R)$
По формуле для интегралов Ломмеля (9.14)

$$\int\limits_0^x t\left(J_\nu(\alpha t)\right)^2dt = \frac{x^2}{2}\left(\alpha J_\nu'(\alpha x)\right)^2+\frac{1}{2}\left(x^2\;-\;\frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\left(J_\nu(\alpha x)\right)^2,\qquad \nu>-1,$$

получаем:

$$\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)dr = \int\limits_0^R rJ_0^2\left(\frac{\mu_m r}{R}\right)dr =$$
$$=\frac{1}{2}\left(\mu_m J_0'(\mu_m)\right)^2+\frac{1}{2}\left(R^2\;-\;\frac{0^2}{\alpha^2}\right)\left(J_0(\mu_m)\right)^2=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\mu_m J_1(\mu_m)}_{=hRJ_0(\mu_m)}\right)^2+\frac{R^2}{2}J_0^2(\mu_m)=\frac{R^2}{2}\left(h^2+1\right)J_0^2(\mu_m).$$

Тогда для $\psi_k$ верна формула

$$\psi_k=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\psi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr=$$
$$=\begin{cases}-\frac{ahq}{\omega\rho}\cdot\frac{\left(h^2+1\right)J_0^2(\mu_m)}{\left[J_1(\mu_m)\right]^2+\left[J_0(\mu_m)\right]^2}\;-\;\frac{q}{\omega\rho}\cdot\frac{R^2J_1(\mu_m)}{\mu_m\left(\left[J_1(\mu_m)\right]^2+\left[J_0(\mu_m)\right]^2\right)}, & k=m;\\ 0, & k\neq m\end{cases}$$

или, поскольку с учетом равенств $\left[J_1(\mu_k)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2=\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)\frac{J_0^2(\mu_k)}{\mu_k^2}$ и $\mu_kJ_1(\mu_k)=hRJ_0(\mu_k)$,

$$-\frac{ahq}{\omega\rho}\cdot\frac{\left(h^2+1\right)J_0^2(\mu_m)}{\left[J_1(\mu_m)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_m\right)\right]^2}\;-\;\frac{q}{\omega\rho}\cdot\frac{R^2J_1\left(\mu_m\right)}{\mu_m\left(\left[J_1(\mu_m)\right]^2+\left[J_0\left(\mu_m\right)\right]^2\right)}=$$

$$= -\frac{q}{\omega\rho}\cdot\frac{ah\left(h^2+1\right)\mu_m^2 J_0^2(\mu_m)+R^2\overbrace{\mu_m J_1(\mu_m)}^{=hRJ_0(\mu_m)}}{\left(h^2R^2+\mu_m^2\right)J_0^2\left(\mu_m\right)} =$$

$$= -\frac{hq}{\omega\rho}\cdot\frac{a\left(h^2+1\right)\mu_m^2 J_0(\mu_m)+R^3}{\left(h^2R^2+\mu_m^2\right)J_0\left(\mu_m\right)},$$

то для $\psi_k$ окончательно получаем

$$\psi_k = \begin{cases} -\frac{hq}{\omega\rho}\cdot\frac{a\left(h^2+1\right)\mu_m^2 J_0(\mu_m)+R^3}{\left(h^2R^2+\mu_m^2\right)J_0(\mu_m)}, & k=m; \\ 0, & k\neq m \end{cases}$$

и $v(r;\,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{R\psi_k}{a\mu_k}\sin\left(\frac{\mu_k\,at}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$ принимает вид:

$$v(r;\,t) = -\frac{hqR}{a\omega\rho}\cdot\frac{a\left(h^2+1\right)\mu_m^2 J_0(\mu_m)+R^3}{\mu_m\left(h^2R^2+\mu_m^2\right)\cdot J_0\left(\mu_m\right)}\times$$
$$\times\sin\left(\frac{\mu_m\,at}{R}\right)\cdot J_0\left(\frac{\mu_m r}{R}\right). \quad (9.122)$$

Наконец, для решения

$$u(r,\,t) = w(t)+v(r,\,t)$$

исходной задачи (9.96) в силу (9.97) и (9.103) получаем
**Ответ:**

$$u(r;\,t) = \frac{a^2q}{\omega^2\rho}\left[\frac{ahJ_0\left(\frac{\omega r}{a}\right)}{ahJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)-\omega J_1\left(\frac{\omega R}{a}\right)}-1\right]\sin\left(\omega\,t\right)+v(r,\,t),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $\mu J_0'(\mu)+hR\,J_0(\mu)=0$, а функция $v(r,\,t)$ задается формулой (9.121) в случае без резонанса и формулой (9.122) в случае резонанса.

**№ 777 а).** *Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(ru_r\right)_r+f(r,\,t), & 0\leqslant r<R, \quad t>0; \\ u(r,\,0)=\varphi(r), & 0\leqslant r<R; \\ |u(0,\,t)|<\infty, \quad u_r(R,\,t)+hu(R,\,t)=0, & t>0 \end{cases} \quad (9.123)$$

при $f(r,\,t)\equiv 0$.
**<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения**
Если искать решение задачи (9.123) в виде

$$u(r;\,t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t), \quad (9.124)$$

и предположить, что для $f(r,\,t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r;\,t) = \sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \tag{9.125}$$

то, подставив (9.124) и (9.125) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k'(t) = a^2 \sum_{k=...}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=...}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k'(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}_k'(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}_k'(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k'(t) + a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \tag{9.126}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k\mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \tag{9.127}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.123).

Условие $|u(0,\,t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.128}$$

а условие $u_r(R,\,t) + hu(R,\,t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.129}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля**
Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.130}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.
*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*
В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.130) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:
*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.130) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \ \mu_k \ - \text{ корни уравнения} \qquad hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.131}$$

**<u>Шаг 3.</u> Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**
В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\ f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{9.132}$$

$$f_k(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\underbrace{\left[J_0'(\mu_k)\right]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0(\mu_k)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \tag{9.133}$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \qquad \text{с коэффициентами} \tag{9.134}$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2 + [J_0(\mu_k)]^2} \cdot \int\limits_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \tag{9.135}$$

**<u>Шаг 4.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.124), с. 172, решения $u(r,\, t)$ и разложение (9.134) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r,\, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.126), с. 173, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_k'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{9.136}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = c e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}_k'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t) e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}.$$

Отсюда

$$c(t) = \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оНо}}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau. \tag{9.137}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (9.136) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau, \tag{9.138}$$

где $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.133) и (9.135):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

**Ответ в общем виде:**

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.133) и (9.135):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R rf(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $f(r,\, t) \equiv 0$, то мы получаем
**Ответ:**

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t},$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, а $\varphi_k$ задаются формулой:

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{\left[J_1(\mu_k)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

**№ 777 б).** *Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r,\, t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\, t)| < \infty, \quad u(R,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{9.139}$$

при $\varphi(r) \equiv 0$.
**Шаг 1.** **Предварительные рассуждения**
Если искать решение задачи (9.139) в виде

$$u(r;\, t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \tag{9.140}$$

то, подставив (9.140) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k'(t) = a^2 \sum_{k=\ldots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k'(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \tag{9.141}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k\mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \tag{9.142}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.139).

Условие $|u(0,\, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.143}$$

а условие $u(R,\, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.144}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}'_k(r))' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.145}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.145) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где* $\mu_k^{(\nu)}$ *– корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta \mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.145) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \ \mu_k \ - \text{ корни уравнения} \qquad J_0(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.146}$$

**<u>Шаг 3.</u> Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\ f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{9.147}$$

$$f_k(t) = \frac{1}{\frac{1}{2}\underbrace{[J'_0(\mu_k)]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right)\underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Итак,

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \tag{9.148}$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \qquad \text{с коэффициентами} \tag{9.149}$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{[J_1(\mu_k)]^2} \cdot \int\limits_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \tag{9.150}$$

**<u>Шаг 4.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.140), с. 177, решения $u(r,\, t)$ и разложение (9.149) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r,\, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.141), с. 178, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{9.151}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных.

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t)e^{\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Отсюда

$$c(t) = \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 \tau}d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оно}}(t) = c_1e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 (t-\tau)}d\tau. \tag{9.152}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (9.151) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau, \tag{9.153}$$

где $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.148) и (9.150)

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1(\mu_k)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1(\mu_k)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

**Ответ в общем виде:**

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.148) и (9.150):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1(\mu_k)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2 \left[J_1(\mu_k)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $vp(r) \equiv 0$, то мы получаем

**Ответ:**

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int\limits_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и $f_k(t)$ задаются формулами (9.148):

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2 \left[J_1(\mu_k)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

**№ 777 в).** *Найти ограниченную функцию* $u(r,\,t)$ *из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r - \mathbf{h^2 u} + f_1(r,\,t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\,t)| < \infty, \quad u_r(R,\,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{9.154}$$

при $f(r,\,t) \equiv 0$.

**<u>Шаг 1.</u> Избавление от слагаемого** $-h^2 u(r,\,t)$

Поскольку $-h^2 = const$, от слагаемого $-h^2 u(r,\,t)$ можно избавиться с помощью стандартной замены:

$$v(r,\,t) = u(r,\,t) \cdot e^{h^2 t}.$$

Тогда уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r - h^2 u + f_1(r,\,t)$, домноженное на $e^{h^2 t}$ превратиться в

$$v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r,\,t),$$

где $f(r,\,t) = f_1(r,\,t) \cdot e^{h^2 t}$, и вся задача (9.154) примет вид

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r,\,t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |v(0,\,t)| < \infty, \quad v_r(R,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.155}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи** (9.155)

**<u>Шаг 2-1.</u> Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.154) в виде

$$v(r;\,t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t), \tag{9.156}$$

и предположить, что для $f(r,\,t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r;\,t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \tag{9.157}$$

то, подставив (9.156) и (9.157) в уравнение $v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=\ldots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) \mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) \mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2 \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}_k'(t) - f_k(t)}{a^2 \mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}_k'(t) + a^2 \lambda_k \mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \tag{9.158}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \tag{9.159}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.154).

Условие $|v(0,\, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.160}$$

а условие $v_r(R,\, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) = 0. \tag{9.161}$$

**Шаг 2-2. Решение задачи Штурма-Лиувилля**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\alpha = 0$ и $\beta = 1$:

$$\begin{cases} (r\mathbf{X}_k'(r))' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) = 0. \end{cases} \tag{9.162}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*

В нашем случае $\alpha = 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.162) имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$ и соответствующую собственную функцию $\mathbf{X}_0(r) = 1 \equiv J_0(0)$.

Применим теорему 9.4, с. 123

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где* $\mu_k^{(\nu)}$ *– корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.162) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \mathbf{X}_0(r) = 1 = J_0(0), \\ \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, & \mathbf{X}_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \text{ – корни уравнения} & J'_0(\mu) = 0 \;\Leftrightarrow\; J_1(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.163}$$

**<u>Шаг 2-3.</u> Разложение функций $f(r, t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\ f(r, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r, t) = f_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{9.164}$$

$$\begin{aligned} f_0(t) &= \frac{2}{R^2}\int_0^R r f(r, t)\,dr, \\ f_k(t) &= \frac{2}{[J_0(\mu_k)]^2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\int_0^R r f(r, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr, \end{aligned} \tag{9.165}$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$. Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \qquad \text{с коэффициентами} \tag{9.166}$$

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{R^2}\int_0^R r\varphi(r)\,dr, \qquad \varphi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{[J_0(\mu_k)]^2}\cdot\int_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \tag{9.167}$$

**<u>Шаг 2-4.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.156), с. 182, решения $u(r, t)$ и разложение (9.166) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r, 0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k \mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.158), с. 183, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}_0'(t) = f_0(t), \\ \mathbf{T}_0(0) = \varphi_0. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{T}_k'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{9.168}$$

Решение задачи (9.168) задается, очевидно, формулой

$$\mathbf{T}_0(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t f_0(\tau)d\tau.$$

Общее решение однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных.

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}_k'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t)e^{\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Отсюда

$$c(t) = \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 \tau}d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оНо}}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 (t-\tau)}d\tau. \tag{9.169}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (9.168) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 (t-\tau)}d\tau,$$

где $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.165) и (9.167):

$$f_0(t) = \frac{2}{R^2}\int\limits_0^R rf(r,\,t)dr, \qquad f_k(t) = \frac{2}{\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\int\limits_0^R rf(r,\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr;$$

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{R^2}\int\limits_0^R r\varphi(r)dr, \qquad \varphi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

**Ответ в общем виде для задачи** (9.155)**:**

$$v(r;\,t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t f_0(\tau)d\tau +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_1(\mu)=0$, а $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.165) и (9.167). Поскольку в нашем случае $f(r,\,t)\equiv 0$, а $u(r,\,t) = e^{-h^2t}v(r,\,t)$, то мы получаем

**Ответ:**

$$u(r;\,t) = e^{-h^2t}\left[\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cdot e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 t}\right],$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_1(\mu)=0$, а $\varphi_k$ задаются формулой:

$$\varphi_0(t) = \frac{2}{R^2}\int\limits_0^R r\varphi(r)dr, \qquad \varphi_k = \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

**№ 777 г).** *Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot\left(ru_r\right)_r - h^2u, & 0\leqslant r<R,\quad t>0;\\ u(r,\,0) = T, & 0\leqslant r<R;\\ |u(0,\,t)|<\infty,\quad u(R,\,t)=T, & t>0.\end{cases} \tag{9.170}$$

*Указание:* искать решение в виде $u(r,\,t) = v(r,\,t)e^{-h^2t} + w(r) + T$.

**Шаг 1. Избавление от неоднородности и выбор вида решения**

Во-первых надо избавиться от неоднородности в краевом условии. Поскольку в данной задаче

$$u(r,\,0) = T, \qquad \text{и} \qquad u(R,\,t) = T,$$

то естественно искать функцию $u(r,\,t)$ в виде

$$u(r,\,t) = b(r,\,t) + T.$$

Тогда функция $b(r,\, t)$ будет решением задачи

$$\begin{cases} b_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rb_r)_r - h^2 b - h^2 T, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ b(r,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R; \\ |b(0,\, t)| < \infty, \quad b(R,\, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.171}$$

В принципе, эта задача – почти частный случай уже решенной задачи в № 777 б) (с. 177), и мы можем вопользоваться ее результатом (если сначала стандартной заменой избавимся от слагаемого $(-h^2 b)$). Но нам предлагается явно выделить в решении часть, зависящую только от $r$. Это задание может иметь физический смысл: надо явно выделить стационарное (то есть не меняющееся со временем) распределение температуры в мембране и явно выделить сам процесс изменения температуры.
Поэтому мы представим искомую функцию $b(r,\, t)$ в виде

$$b(r,\, t) = v(r,\, t)e^{-h^2 t} + w(r)$$

и попытаемся найти $w(r)$, являющуюся решением задачи, в которую мы загоним все стационарные входные данные (в данном случае это функция источников тепла $f(r,\, t) \equiv -h^2 T$, не зависящая от времени.

$$\begin{cases} a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r = h^2 w + h^2 T, & 0 \leqslant r < R; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0. \end{cases} \tag{9.172}$$

Здесь легко угадать частное решение неоднородного уравнения $a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw_r)_r = h^2 w + h^2 T$.

$$w_{\text{чно}}(r) = -T.$$

А общее решение соответствующего однородного уравнения

$$-(rw_r)_r = -h^2 rw \equiv \left(\frac{ih}{a}\right)^2 rw,$$

поскольку оно заменой $r = \frac{a}{ih}x, \quad w(r) = \mathbf{Z}(x)$ сводится к

$$-(x\mathbf{Z}')' = x\mathbf{Z},$$

имеет, по следствию 9.1, с. 121, вид:

$$\mathbf{Z}(x) = c_1 J_0(x) + c_2 N_0(x).$$

В силу краевого условия $|w(0)| < \infty$ и теоремы 9.2, с. 122, $c_2 = 0$, и таким образом,

$$w_o(r) = c_1 J_0\left(\frac{ihr}{a}\right).$$

Но по определению 9.2, с. 120,

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu(ix),$$

откуда при $\nu = 0$ получаем, что

$$J_0\left(\frac{ihr}{a}\right) \equiv I_0\left(\frac{hr}{a}\right).$$

Итак, решение однородного уравнения с первым краевым условием имеет вид $w_o(r) = c_1 I_0\left(\frac{hr}{a}\right)$, откуда

$$w(r) = w_o(r) + w_{\text{чно}}(r) = c_1 I_0\left(\frac{hr}{a}\right) - T,$$

и нам осталось только добиться выполнения второго краевого условия $w(R) = 0$, подходящим образом выбрав костанту $c_1$.

$$w(R) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 I_0\left(\frac{hR}{a}\right) = T \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = \frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

Окончательно получаем

$$w(r) = \frac{T I_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} - T.$$

Эта функция есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} w_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r w_r)_r - h^2 w - h^2 T, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ w(r, 0) = \frac{T I_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} - T, & 0 \leqslant r < R; \\ |w(0, t)| < \infty, \quad w(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Поэтому функция

$$z(r, t) = u(r, t) - w(r) - T \equiv u(r, t) - \frac{T I_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)},$$

в свою очередь, является решением задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r z_r)_r - h^2 z, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ z(r, 0) = T - \frac{T I_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leqslant r < R; \\ |z(0, t)| < \infty, \quad z(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Осталось совершить стандартную замену

$$v(r, t) = z(r, t) e^{h^2 t},$$

чтобы избавиться от слагаемого $(-h^2 z)$. Тогда для функции $v(r, t)$ имеем задачу:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r v_r)_r, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r, 0) = T - \frac{T I_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leqslant r < R; \\ |v(0, t)| < \infty, \quad v(R, t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.173}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи** (9.173)
Эта задача – частный случай решенной в общем виде задачи (9.139), с. 177, из № 777 б). Воспользуемся результатом:
**<u>Ответ в общем виде:</u>**

$$v(r;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 t}+\int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2(t-\tau)}d\tau\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$, а $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами:

$$f_k(t)=\frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R rf(r,\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr,$$

$$\varphi_k=\frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

В нашем случае $f(r,\,t)\equiv 0$, поэтому все $f_k(t)\equiv 0$. Осталось найти $\varphi_k$ для функции

$$\varphi=T\,-\,\frac{TI_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

$$\varphi_k=\frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr=\frac{2T}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\int\limits_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr-$$

$$-\,\frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}\cdot\int\limits_0^R rI_0\left(\frac{hr}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr=$$

$$=\frac{2T}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{R^2}{\mu_k^2}\cdot\left[\mu_k J_1(\mu_k)\right]-\frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}\cdot\int\limits_0^R rI_0\left(\frac{hr}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr=$$

$$=\frac{2T}{\mu_k\,J_1\left(\mu_k\right)}\,-\,\frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2}\cdot\frac{T}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)}\cdot\int\limits_0^R rI_0\left(\frac{hr}{a}\right)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

Таким образом,

$$v(r;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 t}\cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

гле $\varphi_k$ вычисляются по формуле

$$\varphi_k = \frac{2T}{\mu_k J_1(\mu_k)} - \frac{2T}{R^2 [J_1(\mu_k)]^2 I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot \int\limits_0^R r I_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \quad (9.174)$$

Вспомнив, что $u(r,\,t) = v(r;\,t)e^{-h^2 t} + w(r) + T \equiv \frac{T I_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} + v(r;\,t)e^{-h^2 t}$, запишем

**Ответ:**

$$u(r,\,t) = \frac{T I_0\left(\frac{hr}{a}\right)}{I_0\left(\frac{hR}{a}\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left[\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 + h^2\right]t} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\varphi_k$ задаются формулой (9.174).

**№ 777 д).** *Найти ограниченную функцию $u(r,\,t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r u_r)_r + f(r,\,t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\,0) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\,t)| < \infty, \quad u(R,\,t) = 0, & t > 0 \end{cases} \quad (9.175)$$

при $\varphi(r) \equiv 0$, а $f(r,\,t) = U e^{-h^2 t}$.

**Шаг 1. Вид решения**

Эта задача – частный случай задачи (9.139), с. 177, при $\varphi(r) \equiv 0$ и $f(r,\,t) = U e^{-h^2 t}$. Однако, воспользовавшись напрямую ее результатом, мы получим ответ

$$u(r;\,t) = 2UR^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-h^2 t} - e^{-\left(\frac{\mu_k a}{R}\right)^2 t}}{(a^2 \mu_k^2 - h^2 R^2)\,\mu_k J_1(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$. А хотелось бы выделить явно часть решения, ведущую себя подобно $f$, то есть фактически найти сумму ряда

$$e^{-h^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(a^2 \mu_k^2 - h^2 R^2)\,\mu_k J_1(\mu_k)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right).$$

Для этого представим решение $u(r,\,t)$ в виде

$$u(r,\,t) = v(r,\,t) + w(r) e^{-h^2 t}$$

и найдем $w(r)$ из решения $z(r,\,t) = w(r) e^{-h^2 t}$ задачи

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (r z_r)_r + U e^{-h^2 t}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ |z(0,\,t)| < \infty, \quad z(R,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (9.176)$$

Перепишем (9.176) подставив $z(r,\,t) = w(r)e^{-h^2t}$:

$$\begin{cases} -h^2 w(r)e^{-h^2t} = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rw')'\, e^{-h^2t} + Ue^{-h^2t}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0. \end{cases} \tag{9.177}$$

И для $w(r)$ после деления на $a^2e^{-h^2t}$ и уножения на $r$ получим:

$$-\left(rw'\right)' = \frac{h^2}{a^2} \cdot rw(r) + \frac{Ur}{a^2}.$$

Частное решение неоднородного уравнения легко угадывается:

$$w_{\text{чно}} = -\,\frac{U}{h^2}.$$

А общее решение однородного, по следствию 9.1, поскольку оно заменой $r = \frac{a}{h}x, \quad w(r) = \mathbf{Z}(x)$ сводится к

$$-\left(x\mathbf{Z}'\right)' = x\mathbf{Z},$$

имеет, по следствию 9.1, с. 121, вид:

$$\mathbf{Z}(x) = c_1 J_0(x) + c_2 N_0(x).$$

В силу краевого условия $|w(0)| < \infty$ и теоремы 9.2, с. 122, $c_2 = 0$, и таким образом,

$$w_o(r) = c_1 J_0\left(\frac{hr}{a}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad w(r) = c_1 J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - \frac{U}{h^2}.$$

Осталось при помощи второго краевого условия $w(R) = 0$ найти $c_1$.

$$w(R) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c_1 J_0\left(\frac{hR}{a}\right) = \frac{U}{h^2} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = \frac{U}{h^2\, J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}.$$

Окончательно получаем

$$w(r) = \frac{U\left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right)}{h^2\, J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}. \tag{9.178}$$

Найденная функция $z(r,\,t) = w(r)e^{-h^2t}$ есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} z_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(rz_r\right)_r + Ue^{-h^2t}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ z(r,\,0) = \frac{U\left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right)}{h^2\, J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leqslant r < R; \\ |z(0,\,t)| < \infty, \quad z(R,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.179}$$

Поэтому функция

$$v(r,\,t) = u(r,\,t) - w(r)e^{-h^2t} \equiv u(r,\,t) - \frac{U\left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right)}{h^2\, J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \cdot e^{-h^2t},$$

в свою очередь, является решением задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r\,, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\,0) = -\,\frac{U\left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right)}{h^2\,J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}, & 0 \leqslant r < R; \\ |v(0,\,t)| < \infty, \quad v(R,\,t) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.180}$$

Эта задача – снова частный случай задачи (9.139), с. 177, при $\varphi(r) = -\,\frac{U\left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right)}{h^2\,J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}$ и $f(r,\,t) \equiv 0$. Воспользуемся результатом:

<u>**Ответ в общем виде:**</u>

$$v(r;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами:

$$f_k(t) = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r f(r,\,t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Поскольку в нашем случае $f(r,\,t) \equiv 0$, то все $f_k = 0$, и нам надо найти $\varphi_k(t)$ при $\varphi(r) = -\,\frac{U\left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right) - J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right)}{h^2\,J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}$:

(Заметим, что этот способ решения данной задачи годится только для случая

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a\mu_k \neq hR,$$

поскольку иначе в знаменателе выражения для $\varphi(r)$ стоял бы нуль.)

$$\varphi_k = \frac{2}{R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{-2U}{h^2 R^2 \left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2\; J_0\left(\frac{hR}{a}\right)} \times$$

$$\times \left( \int\limits_0^R r\,J_0\left(\frac{hr}{a}\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \,-\, J_0\left(\frac{hR}{a}\right) \int\limits_0^R r\,J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \right) =$$

$$= \left[\text{по формулам (9.13) и (9.9) при } x = \tfrac{\mu_k r}{R} \text{ и } \nu = 1\right] =$$

$$= \frac{-2U}{h^2R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2\ J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{a^2R^3}{h^2R^2-a^2\mu_k^2}\left[\frac{h}{a}J_1\left(\frac{hR}{a}\right)\underbrace{J_0\left(\mu_k\right)}_{=0}-\frac{\mu_k}{R}J_0\left(\frac{hR}{a}\right)J_1\left(\mu_k\right)\right]-\right.$$

$$\left.-J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\cdot\frac{R^2}{\mu_k^2}\cdot\int\limits_0^{\mu_k}\left[x\,J_1\left(x\right)\right]'dx\right)=\frac{-2U}{h^2R^2\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2\ J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}\times$$

$$\times\left(-\ \frac{a^2R^2}{h^2R^2-a^2\mu_k^2}\cdot\mu_k\,J_0\left(\frac{hR}{a}\right)J_1\left(\mu_k\right)-\ \frac{R^2}{\mu_k^2}\cdot\mu_k\,J_0\left(\frac{hR}{a}\right)J_1\left(\mu_k\right)\right)=$$

$$=\frac{-2U}{h^2\,J_1\left(\mu_k\right)}\cdot\left(-\frac{a^2}{h^2R^2-a^2\mu_k^2}\ -\ \frac{1}{\mu_k^2}\right)\cdot\mu_k=$$

$$=\frac{2U}{h^2\,J_1\left(\mu_k\right)}\cdot\frac{h^2R^2\mu_k}{\left(h^2R^2-a^2\mu_k^2\right)\mu_k^2}=\frac{-2UR^2}{\left(a^2\mu_k^2-h^2R^2\right)\mu_k\,J_1\left(\mu_k\right)}$$

Итак,

$$v(r;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)=$$

$$=-2UR^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_k}{\left(a^2\mu_k^2-h^2R^2\right)J_1\left(\mu_k\right)}\cdot e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.
<u>**Ответ:**</u>

$$u(r;\,t)=\frac{U\left(J_0\left(\frac{hr}{a}\right)-J_0\left(\frac{hR}{a}\right)\right)}{h^2\,J_0\left(\frac{hR}{a}\right)}\cdot e^{-h^2t}-$$

$$-\,2UR^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(a^2\mu_k^2-h^2R^2\right)\mu_k\,J_1\left(\mu_k\right)}\cdot e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

### № 779. Выделение стационарной части решения.

*В бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса $R$ с момента $t=0$ выделяется тепло постоянной плотностью $Q$. Считая температуру цилиндра при $t=0$ равной нулю, определить распределение температуры в нем при $t>0$, если поверхность цилиндра поддерживается при температуре $T$.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f_1(r,\, t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = \varphi_1(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |u(0,\, t)| < \infty, \quad u(R,\, t) = T, & t > 0 \end{cases} \tag{9.181}$$

при $f_1(r,\, t) = \frac{Q}{c\rho}$, а $\varphi_1(r) \equiv 0$.

**<u>Шаг 0.</u> Избавление от неоднородности в краевом условии**

Поскольку функции в правых частях краевого условия I-го рода и уравнения имеют вид константы, естественно искать решение (9.181) в виде

$$u(r,\, t) = T + w(r) + v(r,\, t),$$

где $w(r)$ – решение задачи:

$$\begin{cases} \underbrace{w_t}_{=0} = a^2 \cdot \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r\right) + \frac{Q}{c\rho}, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ |w(0)| < \infty, \quad w(R) = 0, & t > 0. \end{cases} \tag{9.182}$$

Легко найти частное решение неоднородного уравнения

$$w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) = \, - \, \frac{Q}{a^2 c\rho} \, \equiv \, - \, \frac{Q}{k}, \tag{9.183}$$

($k$ – коэффициент теплопроводности) в виде $w_{\text{чно}} = c_1 r^2$. Подставив его в уравнение получаем, что

$$2c_1 + c_1 \frac{2r}{r} = \, - \, \frac{Q}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = \, - \, \frac{Q}{4k}.$$

Поэтому

$$w_{\text{чно}} = \, - \, \frac{Q}{4k} r^2.$$

Общее же решение однородного уравнения $w_o''(r) + \frac{1}{r} w_o'(r) = 0$ находится так:

$$(\ln w_o'(r))' = \, - \, \frac{1}{r} \equiv \left(\ln \frac{1}{r}\right)',$$

откуда

$$w_o'(r) = \frac{1}{c_2 r} \qquad \Longrightarrow \qquad w_o(r) = \ln r + c_3.$$

Таким образом, общее решение уравнения (9.183) имеет вид

$$w(r) = {}_3 \ln r + c_4 \, - \, \frac{Q}{4k} r^2.$$

Из краевого условия $|w(0)| < \infty$ получаем, что $c_3 = 0$, а из краевого условия $w(R) = 0$ следует, что $c_4 = \frac{QR^2}{4k}$. Таким образом,

$$w(r) = \frac{Q\left(R^2 - r^2\right)}{4k}.$$

Тогда функция $v(r,\, t) = u(r,\, t) - T - w(r)$ будет удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} v_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (rv_r)_r + f(r,\, t), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0; \\ v(r,\, 0) = \varphi(r), & 0 \leqslant r < R; \\ |v(0,\, t)| < \infty, \quad v(R,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{9.184}$$

при $f(r,\, t) \equiv 0$, а $\varphi(r) = -T\ -\ \frac{Q\left(R^2 - r^2\right)}{4k}$.
Именно такую задачу (9.139) мы решили в № 777 б), с. 177. Воспользуемся результатом:

**Ответ в общем виде:**

$$v(r;\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_n e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $\mu_n$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $f_n(t)$ и $\varphi_n$ задаются формулами (9.148):

$$f_n(t) = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r f(r,\, t) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr,$$

$$\varphi_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr.$$

Возьмем интегралы

$$\int\limits_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\, dx =$$

$$= \Big[\text{в силу (9.9), с. 121, при } \ \nu = 1\Big] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x^2 \cdot \Big[x J_1(x)\Big]' dx =$$

$$= \Big[\text{по частям}\Big] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left( x^3 J_1(x) \Bigg|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2\int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\, dx \right) =$$

$$= \Big[\text{в силу (9.9) при } \ \nu = 2\Big] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left( \mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2\int\limits_0^{\mu_k} \Big[x^2 J_2(x)\Big]' dx \right) =$$

$$= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left( \mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2\, x^2 J_2(x) \Bigg|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \Big( \mu_k^3 J_1(\mu_k) \ - 2\mu_k^2 J_2(\mu_k) \Big) =$$

$$= \left[\text{в силу (9.10) при } \ \nu = 1, \quad J_2(\mu_k) \ - \ \frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) + \underbrace{J_0(\mu_k)}_{=0} = 0 \right] =$$

$$= \frac{R^4\left(\mu_k^2 - 4\right)}{\mu_k^3} \ J_1(\mu_k). \quad (9.185)$$

$$\int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x J_0(x)\, dx =$$

$$= \Big[\text{в силу (9.9), с. 121, при } \ \nu = 1\Big] =$$

$$= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} \Big[x J_1(x)\Big]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left( x J_1(x) \Bigg|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k). \quad (9.186)$$

Поэтому для $\varphi(r) = -T \ - \ \frac{Q\left(R^2 - r^2\right)}{4k} = \left(-T \ - \ \frac{QR^2}{4k}\right) + \frac{Q}{4k} \cdot r^2$ получаем

$$\varphi_n = \frac{Q}{4k} \cdot \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int\limits_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr \ - \ \frac{2\left(T + \frac{QR^2}{4k}\right)}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{Q}{4k} \cdot \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^4 \left(\mu_n^2 - 4\right)}{\mu_n^3} \; J_1\left(\mu_n\right) - \frac{2\left(T + \frac{QR^2}{4k}\right)}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^2}{\mu_n} \; J_1\left(\mu_n\right) =$$

$$= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \cdot \frac{R^2 \Big(QR^2(\mu_n^2 - 4 - \mu_n^2) - 4kT\mu_n^2\Big) J_1\left(\mu_n\right)}{4k\mu_n^3} = -\frac{2\left(QR^2 + kT\mu_n^2\right)}{k\mu_n^3 J_1\left(\mu_n\right)}.$$

Таким образом,

$$v(r;\, t) = -\frac{2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{QR^2 + kT\mu_n^2}{\mu_n^3 \cdot J_1\left(\mu_n\right)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n\, a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $\mu_n$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, и, наконец, для функции $u(r,\, t) = T + w(r) + v(r,\, t)$ получаем:

**Ответ:**

$$u(r;\, t) = T + \frac{Q\left(R^2 - r^2\right)}{4k} - \frac{2}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{QR^2 + kT\mu_n^2}{\mu_n^3 \cdot J_1\left(\mu_n\right)} \cdot e^{-\left(\frac{\mu_n\, a}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $\mu_n$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

### № 780 а).

*В начальный момент времени $t = 0$ температура бесконечной однородной трубы $b \leqslant r \leqslant d$ равна $U$. Найти распределение температуры в трубе при $t > 0$ если поверхности трубы поддерживаются при нулевой температуре.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f(r,\, t), & b < r < d, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0) = \varphi(r), & b < r < d; \\ u(b,\, t) = u(d,\, t) = 0, & t > 0 \end{cases} \tag{9.187}$$

при $f(r,\, t) \equiv 0$ и $\varphi(r) = U$.

**Шаг 1. Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.187) в виде

$$u(r;\, t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{T}_k(t), \tag{9.188}$$

и предположить, что для $f(r,\, t)$ справедливо аналогичное представление рядом:

$$f(r;\, t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \tag{9.189}$$

то, подставив (9.188) и (9.189) в уравнение $u_t = a^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + f$, получим:

$$\sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}'_k(t) = a^2 \sum_{k=\dots}^{\infty} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t) + \sum_{k=\dots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) f_k(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}'_k(t) = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\mathbf{T}_k(t) + \mathbf{X}_k(r) f_k(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}'_k(t) - f_k(t)}{a^2\mathbf{T}_k(t)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)}{\mathbf{X}_k(r)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_k(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{T}'_k(t) + a^2\lambda_k\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \tag{9.190}$$

а для функций $\mathbf{X}(r)$ – уравнение:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right) + \lambda_k\mathbf{X}_k(r) = 0,$$

которое мы перепишем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \mathbf{X}_k(r)}{\partial r}\right)\right) = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r). \tag{9.191}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.187).

Условия $u(b, t) = 0$ и $u(d, t) = 0$ превратятся в

$$\mathbf{X}_k(b) = 0, \qquad \mathbf{X}_k(d) = 0. \tag{9.192}$$

**Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя с $\nu = 0$

$$\begin{cases} \left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r), & b < r < d; \\ \mathbf{X}_k(b) = 0, \\ \mathbf{X}_k(d) = 0. \end{cases} \tag{9.193}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.1, с. 121.
*Общее решение уравнения Бесселя* (9.1)

$$x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right)\mathbf{Z}(x) = 0 \tag{9.1}$$

*задается формулой*

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)' = -\lambda_k r\mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{\lambda_k}\, r, \qquad \lambda_k = \mu_k^2 \geqslant 0$$

сводится к уравнению

$$x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + x^2\mathbf{Z}(x) = 0,$$

которое совпадает с (9.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задается формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0\left(\sqrt{\lambda_k}\, r\right) + c_2 N_0\left(\sqrt{\lambda_k}\, r\right) = c_1 J_0\left(\mu_k\, r\right) + c_2 N_0\left(\mu_k\, r\right). \tag{9.194}$$

В силу краевых условий $\mathbf{X}_k(b) = 0, \quad \mathbf{X}_k(b) = 0$ имеем

$$\begin{cases} c_1 J_0\left(\mu_k\, b\right) + c_2 N_0\left(\mu_k\, b\right) = 0, \\ c_1 J_0\left(\mu_k\, d\right) + c_2 N_0\left(\mu_k\, d\right) = 0. \end{cases} \tag{9.195}$$

Если рассматривать (9.195) как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно переменных $c_1$ и $c_2$, то, учитывая, что нас интересуют нетривиальные решения

$$c_1^2 + c_2^2 \neq 0,$$

определитель этой системы должен равняться нулю:

$$\begin{vmatrix} J_0\left(\mu_k\, b\right) & N_0\left(\mu_k\, b\right) \\ J_0\left(\mu_k\, d\right) & N_0\left(\mu_k\, d\right) \end{vmatrix} = J_0\left(\mu_k\, b\right) N_0\left(\mu_k\, d\right) - J_0\left(\mu_k\, d\right) N_0\left(\mu_k\, b\right) = 0. \tag{9.196}$$

Тогда, решив систему (9.195), получим

$$c_1 = N_0\left(\mu_k\, b\right), \qquad\qquad c_2 = -J_0\left(\mu_k\, b\right). \tag{9.197}$$

Итак, при $\mu_k > 0$, при которых выполнено равенство (9.196), существует нетривиальное решение (9.194) задачи (9.193):

$$\mathbf{X}_k(r) = N_0\left(\mu_k\, b\right) J_0\left(\mu_k\, r\right) - J_0\left(\mu_k\, b\right) N_0\left(\mu_k\, r\right), \tag{9.198}$$

где $\mu_k$ – положительные решения уравнения (9.196)

$$J_0\left(\mu_k\, b\right) N_0\left(\mu_k\, d\right) - J_0\left(\mu_k\, d\right) N_0\left(\mu_k\, b\right) = 0.$$

**Шаг 3. Разложение функций $f(r,\,t)$ и $\varphi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля**

Выясним, какие формулы будут справедливы для коэффициентов разложения функции $\varphi(r)$ в ряд по системе собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (9.193). В соответствии с теоремой 9.6, с. 125, функция $f(r,\,t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r,\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\mathbf{X}(r)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t)\left(N_0\left(\mu_k\,b\right)J_0\left(\mu_k\,r\right)-J_0\left(\mu_k\,b\right)N_0\left(\mu_k\,r\right)\right), \tag{9.199}$$

$$f_k(t)=\frac{2}{\left(r^2-\frac{\nu^2}{\mu_k^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu_k r)\Big|_{r=b}^{r=d}+r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu_k r)\Big|_{r=b}^{r=d}}\cdot\int\limits_b^d rf(r,\,t)\mathbf{X}\left(r\right)dr=$$

$$=\Big[\nu=0\Big]=$$

$$=\frac{2}{d^2\left(\mathbf{Z}^2(\mu_k d)+\mathbf{Z}'^{\,2}\left(\mu_k d\right)\right)-b^2\left(\mathbf{Z}^2(\mu_k b)+\mathbf{Z}'^{\,2}\left(\mu_k b\right)\right)}\cdot\int\limits_b^d rf(r,\,t)\mathbf{X}\left(r\right)dr.$$

Далее, так как $\mathbf{X}(r)=N_0\left(\mu_k\,b\right)J_0\left(\mu_k\,r\right)-J_0\left(\mu_k\,b\right)N_0\left(\mu_k\,r\right)$, то

$$\mathbf{Z}^2(\mu_k d)+\mathbf{Z}'^{\,2}\left(\mu_k d\right)=\underbrace{\left(N_0\left(\mu_k\,b\right)J_0\left(\mu_k\,d\right)-J_0\left(\mu_k\,b\right)N_0\left(\mu_k\,d\right)\right)^2}_{=0\text{ в силу (9.196)}}+$$

$$+\mu_k^2\left(N_0\left(\mu_k\,b\right)J_0'\left(\mu_k\,d\right)-J_0\left(\mu_k\,b\right)N_0'\left(\mu_k\,d\right)\right)^2=$$

$$=\left[\text{в силу (9.196)}\quad N_0\left(\mu_k\,b\right)=\frac{J_0\left(\mu_k\,b\right)}{J_0\left(\mu_k\,d\right)}\cdot N_0\left(\mu_k\,d\right)\right]=$$

$$=\mu_k^2\cdot\left(\frac{J_0\left(\mu_k\,b\right)}{J_0\left(\mu_k\,d\right)}\right)^2\cdot\left(N_0\left(\mu_k\,d\right)J_0'\left(\mu_k\,d\right)-J_0\left(\mu_k\,d\right)N_0'\left(\mu_k\,d\right)\right)^2=$$

$$=\mu_k^2\cdot\left(\frac{J_0\left(\mu_k\,b\right)}{J_0\left(\mu_k\,d\right)}\right)^2\cdot\begin{vmatrix}J_0\left(\mu_k\,d\right)&N_0\left(\mu_k\,d\right)\\J_0'\left(\mu_k\,d\right)&N_0'\left(\mu_k\,d\right)\end{vmatrix}^2.$$

$$\mathbf{Z}^2(\mu_k b)+\mathbf{Z}'^{\,2}\left(\mu_k b\right)=\underbrace{\left(N_0\left(\mu_k\,b\right)J_0\left(\mu_k\,b\right)-J_0\left(\mu_k\,b\right)N_0\left(\mu_k\,b\right)\right)^2}_{=0\text{ тождественно}}+$$

$$+\mu_k^2\left(N_0\left(\mu_k\,b\right)J_0'\left(\mu_k\,b\right)-J_0\left(\mu_k\,b\right)N_0'\left(\mu_k\,b\right)\right)^2=\mu_k^2\begin{vmatrix}J_0\left(\mu_k\,b\right)&N_0\left(\mu_k\,b\right)\\J_0'\left(\mu_k\,b\right)&N_0'\left(\mu_k\,b\right)\end{vmatrix}^2$$

Поскольку известно равенство (см. утверждение 9.1) для Вронскиана функций Бесселя и Неймана

$$W\left[J_\nu,\ N_\nu\right](x) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & N'_\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x}, \tag{9.12}$$

то

$$d^2\left(\mathbf{Z}^2(\mu_k d) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k d)\right) - b^2\left(\mathbf{Z}^2(\mu_k b) + \mathbf{Z}'^2(\mu_k b)\right) =$$

$$= \mu_k^2\left[d^2\cdot\left(\frac{J_0(\mu_k b)}{J_0(\mu_k d)}\right)^2\cdot\frac{4}{\pi^2\mu_k^2 d^2}\ -\ b^2\cdot\frac{4}{\pi^2\mu_k^2 b^2}\right] = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)}{J_0^2(\mu_k d)}$$

Итак,

$$f(r,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\left(N_0(\mu_k b)\,J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b)\,N_0(\mu_k r)\right), \tag{9.199}$$

$$f_k(t) = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2\left[J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)\right]}\cdot\int\limits_b^d r f(r,\,t)\mathbf{X}(r)\,dr. \tag{9.200}$$

Аналогично, для функции $\varphi(r)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\mathbf{X}(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\left(N_0(\mu_k b)\,J_0(\mu_k r) - J_0(\mu_k b)\,N_0(\mu_k r)\right) \tag{9.201}$$

с коэффициентами

$$\varphi_k = \frac{\pi^2 J_0^2(\mu_k d)}{2\left[J_0^2(\mu_k b) - J_0^2(\mu_k d)\right]}\cdot\int\limits_b^d r\varphi(r)\mathbf{X}(r)\,dr. \tag{9.202}$$

**Шаг 4. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_k(t)$**

Если искомый вид (9.188), с. 197, решения $u(r,\,t)$ и разложение (9.201) функции $\varphi(r)$ подставить в начальное условие

$$u(r,\,0) = \varphi(r),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_k(t)$:

$$\mathbf{T}_k(0) = \varphi_k.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.190), с. 198, и учитывая, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t), \\ \mathbf{T}_k(0) = \varphi_k. \end{cases} \tag{9.203}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:
Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_k(t) + \frac{a^2[\mu_k]^2}{R^2}\mathbf{T}_k(t) = f_k(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_k(t)e^{\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}.$$

Отсюда

$$c(t) = \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 \tau}d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оНо}}(t) = c_1 e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 (t-\tau)}d\tau. \tag{9.204}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_k(0) = vp_k$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_k.$$

Таким образом, решение задачи (9.203) имеет вид:

$$\mathbf{T}_k(t) = \varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t} + \int\limits_0^t f_k(\tau)e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 (t-\tau)}d\tau, \tag{9.205}$$

где $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.200) и (9.202).
**Ответ в общем виде:**

$$u(r;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\left(\frac{\mu_k\,a}{R}\right)^2 (t-\tau)} d\tau\right) \times$$
$$\times\left(N_0\left(\mu_k\,b\right) J_0\left(\mu_k\,r\right) - J_0\left(\mu_k\,b\right) N_0\left(\mu_k\,r\right)\right),$$

где $\mu_k$ – положительные решения уравнения (9.196)

$$J_0\left(\mu_k\,b\right) N_0\left(\mu_k\,d\right) - J_0\left(\mu_k\,d\right) N_0\left(\mu_k\,b\right) = 0,$$

а $f_k(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.200) и (9.202):

$$f_k(t) = \frac{\pi^2\,J_0^2\left(\mu_k\,d\right)}{2\left[J_0^2\left(\mu_k\,b\right) - J_0^2\left(\mu_k\,d\right)\right]} \cdot \int_b^d r f(r,\,t)\mathbf{X}\left(r\right) dr. \tag{9.200}$$

$$\varphi_k = \frac{\pi^2\,J_0^2\left(\mu_k\,d\right)}{2\left[J_0^2\left(\mu_k\,b\right) - J_0^2\left(\mu_k\,d\right)\right]} \cdot \int_b^d r\varphi(r)\mathbf{X}\left(r\right) dr. \tag{9.202}$$

Поскольку в нашем случае $f(r,\,t) \equiv 0$, а $\varphi(r) \equiv U$, то нам надо посчитать $\int\limits_b^d r\varphi(r)\mathbf{X}\left(r\right) dr$.

$$\int_b^d r\varphi(r)\mathbf{X}\left(r\right) dr = U\int_b^d r\left(N_0\left(\mu_k\,b\right) J_0\left(\mu_k\,r\right) - J_0\left(\mu_k\,b\right) N_0\left(\mu_k\,r\right)\right) dr =$$
$$= UN_0\left(\mu_k\,b\right)\int_b^d rJ_0\left(\mu_k\,r\right) dr - UJ_0\left(\mu_k\,b\right)\int_b^d rN_0\left(\mu_k\,r\right) dr =$$
$$= \left[x = \mu_k\,r, \quad \text{в силу (9.9)}\right] =$$
$$= \frac{U}{\mu_k^2}N_0\left(\mu_k\,b\right)\int_{\mu_k\,b}^{\mu_k\,d}\left[xJ_1\left(x\right)\right]' dx - \frac{U}{\mu_k^2}J_0\left(\mu_k\,b\right)\int_{\mu_k\,b}^{\mu_k\,d}\left[xN_1\left(x\right)\right]' dx =$$
$$= \frac{Ud}{\mu_k}\left(N_0\left(\mu_k\,b\right)\underbrace{J_1\left(\mu_k\,d\right)}_{=-J_0'(\mu_k\,d)} - J_0\left(\mu_k\,b\right)\underbrace{N_1\left(\mu_k\,d\right)}_{=-N_0'(\mu_k\,d)}\right) -$$

$$-\ \frac{Ub}{\mu_k}\left(N_0\left(\mu_k\, b\right)\underbrace{J_1\left(\mu_k\, b\right)}_{=-J_0'(\mu_k\, b)} - J_0\left(\mu_k\, b\right)\underbrace{N_1\left(\mu_k\, b\right)}_{=-N_0'(\mu_k\, b)}\right) =$$

$$= \left[\text{в силу (9.196)}\quad N_0\left(\mu_k\, b\right) = \frac{J_0\left(\mu_k\, b\right)}{J_0\left(\mu_k\, d\right)}\cdot N_0\left(\mu_k\, d\right)\right] =$$

$$= \frac{Ud}{\mu_k}\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\, b\right)}{J_0\left(\mu_k\, d\right)}\cdot\Big(J_0\left(\mu_k\, d\right)N_0'\left(\mu_k\, d\right) - N_0\left(\mu_k\, d\right)J_0'\left(\mu_k\, d\right)\Big) -$$

$$-\ \frac{Ub}{\mu_k}\Big(J_0\left(\mu_k\, b\right)N_0'\left(\mu_k\, b\right) - N_0\left(\mu_k\, b\right)J_0'\left(\mu_k\, b\right)\Big) =$$

$$= \frac{Ud}{\mu_k}\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\, b\right)}{J_0\left(\mu_k\, d\right)}\cdot\begin{vmatrix} J_0\left(\mu_k\, d\right) & N_0\left(\mu_k\, d\right)\\ J_0'\left(\mu_k\, d\right) & N_0'\left(\mu_k\, d\right)\end{vmatrix} - \frac{Ub}{\mu_k}\cdot\begin{vmatrix} J_0\left(\mu_k\, b\right) & N_0\left(\mu_k\, b\right)\\ J_0'\left(\mu_k\, b\right) & N_0'\left(\mu_k\, b\right)\end{vmatrix} =$$

$$= \Big[\text{в силу (9.12)}\Big] =$$

$$= \frac{U}{\mu_k}\left[d\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\, b\right)}{J_0\left(\mu_k\, d\right)}\cdot\frac{2}{\pi\mu_k d}\ -\ b\cdot\frac{2}{\pi\mu_k b}\right] = \frac{2U}{\pi\mu_k^2}\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\, b\right) - J_0\left(\mu_k\, d\right)}{J_0\left(\mu_k\, d\right)}.$$

Поэтому для коэффициентов $\varphi_k$ получаем формулу:

$$\varphi_k = \frac{\pi^2\, J_0^2\left(\mu_k\, d\right)}{2\left[J_0^2\left(\mu_k\, b\right) - J_0^2\left(\mu_k\, d\right)\right]}\cdot\int\limits_b^d r\varphi(r)\mathbf{X}\left(r\right)dr =$$

$$= \frac{\pi^2\, J_0^2\left(\mu_k\, d\right)}{2\left[J_0^2\left(\mu_k\, b\right) - J_0^2\left(\mu_k\, d\right)\right]}\cdot\frac{2U}{\pi\mu_k^2}\cdot\frac{J_0\left(\mu_k\, b\right) - J_0\left(\mu_k\, d\right)}{J_0\left(\mu_k\, d\right)} =$$

$$= \left[\begin{array}{c}\text{по формуле разности квадратов}\ \ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\quad\Rightarrow\\ \Rightarrow\quad \frac{a-b}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b}\end{array}\right] =$$

$$= \frac{\pi U J_0\left(\mu_k\, d\right)}{\mu_k^2\left(J_0\left(\mu_k\, b\right) + J_0\left(\mu_k\, d\right)\right)}.$$

Итак, мы уже готовы записать

**Ответ:**

$$u(r;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\left(\frac{\mu_k\, a}{R}\right)^2 t}\Big(N_0\left(\mu_k\, b\right)J_0\left(\mu_k\, r\right) - J_0\left(\mu_k\, b\right)N_0\left(\mu_k\, r\right)\Big),$$

где $\mu_k$ – положительные решения уравнения (9.196)

$$J_0\left(\mu_k\, b\right)N_0\left(\mu_k\, d\right) - J_0\left(\mu_k\, d\right)N_0\left(\mu_k\, b\right) = 0,$$

а $\varphi_k$ задаются формулой:

$$\varphi_k = \frac{\pi U J_0\left(\mu_k\, d\right)}{\mu_k^2\left(J_0\left(\mu_k\, b\right) + J_0\left(\mu_k\, d\right)\right)}.$$

**№ 781 а).**

*Считая начальную температура однородного цилиндра $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равной нулю, определить распределение температуры в цилиндре при $t > 0$ для случая, когда поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре $U$.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r, z;\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(\frac{1}{r}\cdot(ru_r)_r + u_{zz}\right) + f(r, z;\, t), & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r,\, z;\, 0) = \varphi_1(r,\, z), & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0,\, z;\, t)| < \infty, \quad u(R,\, z;\, t) = U & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0;\, t) = u(r,\, l;\, t) = U, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0 \end{cases}$$

при $f(r, z;\, t) \equiv 0$ и $\varphi_1(r, z) \equiv 0$.
**Шаг 0. Избавление от неоднородности в краевых условиях**
Поскольку на всей границе цилиндра задано одно и то же условие I-го рода с функцией, равной тождественно константе, естественно искать решение данной задачи в виде:

$$u(r, z;\, t) = U + v(r, z;\, t), \tag{9.206}$$

где функция $v(r, z;\, t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} v_t = a^2\left(\frac{1}{r}\cdot(rv_r)_r + v_{zz}\right) + f(r, z;\, t), & 0 \leqslant r < R, \\ & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v(r,\, z;\, 0) = \varphi(r,\, z), & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l; \\ |v(0,\, z;\, t)| < \infty, \quad v(R,\, z;\, t) = 0 & 0 < z < l, \quad t > 0; \\ v(r,\, 0;\, t) = v(r,\, l;\, t) = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0 \end{cases} \tag{9.207}$$

при $f(r, z;\, t) \equiv 0$ и $\varphi(r, z) = -U$.
**Шаг 1. Предварительные рассуждения**
Если искать решение задачи (9.207) в виде

$$v(r, z;\, t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty}\sum_{n=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{9.208}$$

то, подставив (9.208) в уравнение $v_t = a^2\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot(rv_r)_r + v_{zz}\right) + f$, получим:

$$\sum_{k,n=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kn}(t) =$$

$$= a^2\sum_{k,n=\ldots}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'\mathbf{Z}_n(z) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}''_n(z)\right)\mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)f_{kn}(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kn}(t) =$$
$$= \frac{a^2}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t)+a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}''_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t)+\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n f_{kn}(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)-f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$ и $z$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists\lambda_{kn}\in\mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t)-f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от $r$, а другая – только от $z$, может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\exists\ \eta_k,\ \nu_n\in\mathbb{R}: \qquad \eta_k+\nu_n=\lambda_{kn}, \quad \text{и} \tag{9.209}$$
$$\frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} = \eta_k, \qquad \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}'_{kn}(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=f_{kn}(t), \tag{9.210}$$
$$\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'+\eta_k\mathbf{X}_k(r)=0, \tag{9.211}$$
$$\mathbf{Z}''_n(z)+\nu_k\mathbf{Z}_n(z)=0. \tag{9.212}$$

Равенство (9.211) мы перепишем в виде:

$$-\ \frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)' = \eta_k\mathbf{X}_k(r). \tag{9.213}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu=0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.207).

Условие $|v(0,\,z;\,t)|<\infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)|<\infty, \tag{9.214}$$

а условие $v(R,\,z;\,t)=0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R)=0. \tag{9.215}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\lambda = \eta_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' = \eta_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.216}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv const$.*

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.216) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.216) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения} \qquad J_0(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.217}$$

**<u>Шаг 3.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_n(z)$**

Для функций $\mathbf{Z}_n(z)$ мы получили уравнение (9.212) $\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_k\mathbf{Z}_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий

$$v(r,\,0;\,t) = v(r,\,l;\,t) = 0, \;\; 0 \leqslant r < R, \;\; t > 0,$$

чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n\mathbf{Z}_n(z) = 0. \\ \mathbf{Z}_n(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_n(l) = 0. \end{cases} \tag{9.218}$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:
собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.218) имеют вид:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \qquad \mathbf{Z}_n(z) = \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9.219}$$

**<u>Шаг 4.</u> Разложение функций $f(r,z;\,t)$ и $\varphi(r,z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\ f(r,z;\,t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r,z;\,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

$$f_k(z;\,t)=\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2}\Big[J_0'\left(\mu_k\right)\Big]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right)\underbrace{J_0^2\left(\mu_k\right)}_{=0}}\cdot\frac{1}{R^2}\int\limits_0^R rf(r,z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr=$$

$$=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{J_1^2(\mu_k)}\cdot\int\limits_0^R rf(r,z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

Итак,

$$f_k(z;\,t)=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{J_1^2(\mu_k)}\cdot\int\limits_0^R rf(r,z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r,\,z)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(z)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\qquad\text{с коэффициентами}$$

$$\varphi_k(z)=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{J_1^2(\mu_k)}\cdot\int\limits_0^R r\varphi(r,z)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z;\,t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (9.218), в результате получаем следующие представления функций $f(r,z;\,t)$ и $\varphi(r,z)$:

$$f(r,z;\,t)=\sum_{k,n=1}^{\infty}f_{kn}(t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right),$$

$$f_{kn}(t)=\frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{J_1^2(\mu_k)}\cdot\frac{2}{l}\cdot\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^R rf(r,z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr\right)\sin\left(\frac{\pi nz}{l}\right)dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r f(r, z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz. \qquad (9.220)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r,\, z)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \varphi_{kn} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) \qquad \text{с коэффициентами} \qquad (9.221)$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz. \qquad (9.222)$$

**Шаг 5. Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_{kn}(t)$**

Если искомый вид (9.208), с. 205, решения $v(r,\, t)$ и разложение (9.221) функции $\varphi(r,\, z)$ подставить в начальное условие

$$v(r,\, z,\, 0) = \varphi(r,\, z),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.210), с. 206, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \qquad (9.223)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:

Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_{kn}(t)e^{a^2\lambda_{kn}t}.$$

Отсюда

$$c(t) = \int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{a^2 \lambda_{kn} \tau} d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оно}}(t) = c_1 e^{-a^2 \lambda_{kn} t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{-a^2 \lambda_{kn}(t-\tau)} d\tau. \tag{9.224}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (9.223) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau, \tag{9.225}$$

где $f_{kn}(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.220) и (9.222).
**Ответ в общем виде:**

$$v(r, z;\, t) = \sum_{k,n=1}^{\infty} \left( \varphi_k e^{-\lambda_{kn} a^2 t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn} a^2 (t-\tau)} d\tau \right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, а $f_{kn}(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.220) и (9.222):

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r f(r, z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz, \tag{9.220}$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{l R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r \varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dr dz. \tag{9.222}$$

Поскольку в нашем случае $f(r, z;\, t) \equiv 0$, а $\varphi(r, z) \equiv -U$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления $\varphi_{kn}$ нам надо найти интеграл $\int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr$, который мы уже вычислили, решая № 779 (с. 196):

$$\int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{R^2}{\mu_k}\, J_1(\mu_k). \tag{9.186}$$

Тогда для $\varphi_{kn}$ мы получаем

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r\varphi(r,z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) drdz =$$

$$= \frac{4U}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \left(\frac{R^2}{\mu_k}\, J_1(\mu_k)\right) \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dz =$$

$$= \frac{4U}{l\mu_k J_1(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi n z}{l}\right) dz = \frac{4U}{l\mu_k J_1(\mu_k)} \cdot \frac{l}{\pi n} \left(-\cos\left(\frac{\pi n z}{l}\right)\right)\Bigg|_{z=0}^{z=l} =$$

$$= \frac{4U}{\pi n \mu_k J_1(\mu_k)} \cdot (1-(-1)^n) = \begin{cases} \frac{8U}{\pi(2m-1)\mu_k J_1(\mu_k)}, & n = 2m-1; \\ 0, & n = 2m, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким образом, мы уже знаем функцию

$$v(r,z;\,t) = \\ = \frac{8U}{\pi} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\mu_k J_1(\mu_k)} e^{-\lambda_{k(2m-1)} a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2m-1)z}{l}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а
$\lambda_{k(2m-1)} = \left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{l}\right)^2$. Итак,

**Ответ:**

$$u(r,z;\,t) = U + \\ + \frac{8U}{\pi} \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)\mu_k J_1(\mu_k)} e^{-\lambda_{k(2m-1)} a^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2m-1)z}{l}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а
$\lambda_{k(2m-1)} = \left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi(2m-1)}{l}\right)^2$.

**№ 782 а).**

*Начальная температура в однородном конечном цилиндре $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равна $A(R^2 - r^2)z$. Определить распределение температуры в этом цилиндре при $t > 0$, если боковая поверхность и нижнее основание цилиндра поддерживаются при нулевой температуре, а верхнее основание теплоизолировано.*

Записав эти условия математически, получим задачу:

*Найти ограниченную функцию $u(r, z;\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} u_t = a^2\left(\frac{1}{r}\cdot(ru_r)_r + u_{zz}\right) + f(r, z;\, t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r, z;\, 0) = \varphi(r,\, z), \qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0,\, z;\, t)| < \infty, \qquad\qquad\quad 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(R,\, z;\, t) = 0, \qquad\qquad\quad\;\; 0 < z < l, \quad t > 0; \\ u(r,\, 0;\, t) = u_z(r,\, l;\, t) = 0, \qquad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0 \end{cases} \tag{9.226}$$

при $f(r, z;\, t) \equiv 0$ и $\varphi(r, z) = A(R^2 - r^2)z$.

**Шаг 1. Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.226) в виде

$$u(r, z;\, t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty}\sum_{n=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{9.227}$$

то, подставив (9.227) в уравнение $u_t = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(ru_r)_r + u_{zz} + f$, получим:

$$\sum_{k,n=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kn}(t) =$$

$$= a^2\sum_{k,n=\ldots}^{\infty}\Bigg(\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'\mathbf{Z}_n(z) +$$

$$+\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}''_n(z)\Bigg)\mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)f_{kn}(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kn}(t) = \frac{a^2}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t) +$$
$$+ a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}''_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n f_{kn}(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$ и $z$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists\lambda_{kn}\in\mathbb{R}:$

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от $r$, а другая – только от $z$, может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\exists\;\eta_k,\;\nu_n\in\mathbb{R}: \qquad \eta_k + \nu_n = \lambda_{kn}, \tag{9.228}$$

$$\text{и} \qquad \frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} = \eta_k, \qquad \frac{\mathbf{Z}_n''(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \tag{9.229}$$

$$\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' + \eta_k\mathbf{X}_k(r) = 0, \tag{9.230}$$

$$\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_k\mathbf{Z}_n(z) = 0. \tag{9.231}$$

Равенство (9.230) мы перепишем в виде:

$$-\ \frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' = \eta_k\mathbf{X}_k(r). \tag{9.232}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.226).

Условие $|u(0,\, z;\, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.233}$$

а условие $u(R,\, z;\, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.234}$$

**Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\lambda = \eta_k,\ \ \nu = 0,\ \ \alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' = \eta_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.235}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.

*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv const$.*

В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.235) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти,

Применим теорему 9.4, с. 123:

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.235) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k - \text{ корни уравнения } \qquad J_0(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.236}$$

**<u>Шаг 3.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_n(z)$**

Для функций $\mathbf{Z}_n(z)$ мы получили уравнение (9.231) $\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_k \mathbf{Z}_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий

$$u(r,\, 0;\, t) = u_z(r,\, l;\, t) = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0. \\ \mathbf{Z}_n(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_n'(l) = 0. \end{cases} \tag{9.237}$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:
собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.237) имеют вид:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad \mathbf{Z}_n(z) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9.238}$$

**<u>Шаг 4.</u> Разложение функций $f(r,z;\, t)$ и $\varphi(r,z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\; f(r,z;\, t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r,z;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

$$f_k(z;\, t) = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{2}\left[J_0'\left(\mu_k\right)\right]^2}_{=\left[-J_1(\mu_k)\right]^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{\left(\mu_k\right)^2}\right)\underbrace{J_0^2\left(\mu_k\right)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \times$$

$$\times \int\limits_0^R r f(r,z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r f(r,z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Итак,

$$f_k(z;\, t) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r f(r,z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r,\, z)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \qquad \text{с коэффициентами}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z;\, t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (9.237), в результате получаем следующие представления функций $f(r, z;\, t)$ и $\varphi(r, z)$:

$$f(r, z;\, t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

$$f_{kn}(t) = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \frac{2}{l} \cdot \int\limits_0^R \left(\int\limits_0^R r f(r, z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \times$$

$$\times \int\limits_0^l \int\limits_0^R r f(r, z;\, t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (9.239)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r,\, z)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{kn} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) \quad (9.240)$$

с коэффициентами

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r\varphi(r, z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dr dz. \quad (9.241)$$

**<u>Шаг 5.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_{kn}(t)$**

Если искомый вид (9.227), с. 212, решения $u(r,\, t)$ и разложение (9.240) функции $\varphi(r,\, z)$ подставить в начальное условие

$$u(r,\, 0) = \varphi(r,\, z),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.229), с. 213, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases} \mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \\ \mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}. \end{cases} \tag{9.242}$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}(t) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t) = ce^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:
Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}'_{kn}(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t) = c(t)e^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t) = f_{kn}(t)e^{a^2\lambda_{kn}t}$$

Отсюда

$$c(t) = \int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau}d\tau + c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оНо}}(t) = c_1e^{-a^2\lambda_{kn}t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)}d\tau. \tag{9.243}$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (9.242) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau, \tag{9.244}$$

где $f_{kn}(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.239) и (9.241).
**Ответ в общем виде:**

$$u(r, z;\, t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau\right) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, а $f_{kn}(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.239) и (9.241):

$$f_{kn}(t) = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r f(r,z;\,t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) drdz. \tag{9.239}$$

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r\varphi(r,z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) drdz. \tag{9.241}$$

Поскольку в нашем случае $f(r,z;\,t) \equiv 0$, а $\varphi(r,z) = A(R^2 - r^2)z$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления $\varphi_{kn}$ нам надо найти интегралы $\int\limits_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr$ и $\int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr$. Мы их уже нашли, решая № 779 (с. 196):

$$\int\limits_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{R^4\left(\mu_n^2 - 4\right)}{\mu_n^3}\, J_1\left(\mu_n\right), \tag{9.185}$$

$$\int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{R^2}{\mu_n}\, J_1\left(\mu_n\right). \tag{9.186}$$

Найдем теперь интеграл

$$\int\limits_0^l z \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz = \Big[\text{по частям}\Big] =$$

$$= -\frac{2l}{\pi(2n-1)} \left( \underbrace{z\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=l}}_{=0} - \int\limits_0^l \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz \right) =$$

$$= \left(\frac{2l}{\pi(2n-1)}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=l} = (-1)^{n+1}\left(\frac{2l}{\pi(2n-1)}\right)^2. \tag{9.245}$$

Тогда для $\varphi_{kn}$ мы получаем

$$\varphi_{kn} = \frac{4}{lR^2J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^l \int\limits_0^R r\varphi(r,z) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) drdz =$$

$$= \frac{4A}{lR^2J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r(R^2-r^2) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr \cdot \int\limits_0^l z \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) dz =$$

$$= \Big[\text{в силу (9.185), (9.186)и (9.245)}\Big] =$$

$$= \frac{4A}{lR^2J_1^2(\mu_k)} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) - \frac{R^4\left(\mu_k^2-4\right)}{\mu_k^3} J_1(\mu_k)\right) \cdot (-1)^{n+1} \times$$

$$\times \left(\frac{2l}{\pi(2n-1)}\right)^2 = \frac{16AR^2(-1)^{n+1}}{lJ_1(\mu_k)\mu_k^3} \left(\frac{2l}{\pi(2n-1)}\right)^2 = \frac{64AlR^2(-1)^{n+1}}{\pi^2(2n-1)^2J_1(\mu_k)\mu_k^3}.$$

Таким образом, мы уже знаем
**Ответ:**

$$u(r,z;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau\right) \times$$

$$\times J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) = \frac{64AlR^2}{\pi^2} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2J_1(\mu_k)\mu_k^3} \cdot e^{-\lambda_{kn}a^2t} J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \sin\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$.

**№ 782 б).**

*Начальная температура в однородном конечном цилиндре $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 < z < l$ равна $A(R^2-r^2)z$. Определить распределение температуры в этом цилиндре при $t > 0$, если верхнее основание цилиндра поддерживаются при нулевой температуре, нижнее основание теплоизолировано а на боковой поверхности происходит теплообмен с внешней средой, имеющей нулевую температуру.*

Записав эти условия математически, получим задачу:

*Найти ограниченную функцию $u(r,z;\,t)$ из условий*

$$\left\{\begin{array}{ll} u_t = a^2\left(\frac{1}{r}\cdot(ru_r)_r + u_{zz}\right) + f(r,z;\,t), & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\leqslant r<R, \quad 0<z<l, \quad t>0; & \\ u(r,z;\,0) = \varphi(r,\,z), & 0\leqslant r<R, \quad 0<z<l; \\ |u(0,\,z;\,t)| < \infty, & 0<z<l, \quad t>0; \\ u_r(R,\,z;\,t) + hu(R,\,z;\,t) = 0, & 0<z<l, \quad t>0; \\ u_z(r,\,0;\,t) = u(r,\,l;\,t) = 0, & 0\leqslant r<R, \quad t>0 \end{array}\right. \tag{9.246}$$

при $f(r,z;\,t)\equiv 0$ и $\varphi(r,z) = A(R^2-r^2)z$.

**Шаг 1. Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.246) в виде

$$u(r,z;\,t) = \sum_{k=\ldots}^{\infty}\sum_{n=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t), \tag{9.247}$$

то, подставив (9.247) в уравнение $u_t = a^2\cdot\frac{1}{r}\cdot(ru_r)_r + u_{zz} + f$, получим:

$$\sum_{k,n=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kn}(t) =$$

$$= a^2\sum_{k,n=\ldots}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'\mathbf{Z}_n(z) + \right.$$

$$\left. + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}''_n(z)\right)\mathbf{T}_{kn}(t) + \sum_{k,n=\ldots}^{\infty}\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)f_{kn}(t).$$

Это равенство заведомо верно, если ряды в левой и правой частях равны почленно:

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}'_{kn}(t) = \frac{a^2}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t) +$$
$$+ a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}''_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n f_{kn}(t), \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $a^2\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(t)$, получим:

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)}.$$

Левая часть зависит только от $t$, правая – от $r$ и $z$, следовательно равны они могут быть только в случае, когда $\exists\lambda_{kn}\in\mathbb{R}:$

$$\frac{\mathbf{T}'_{kn}(t) - f_{kn}(t)}{a^2\mathbf{T}_{kn}(t)} = \frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}''_n(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_{kn}.$$

С другой стороны, сумма дробей, одна из которых зависит только от $r$, а другая – только от $z$, может быть константой в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – константа. То есть

$$\exists\ \eta_k,\ \nu_n\in\mathbb{R}: \qquad \eta_k + \nu_n = \lambda_{kn}, \quad \text{и} \tag{9.248}$$

$$\frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \eta_k, \qquad \frac{\mathbf{Z}_n''(z)}{\mathbf{Z}(z)} = \nu_n.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{T}_{kn}(t)$, $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\mathbf{T}_{kn}'(t) + a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t) = f_{kn}(t), \tag{9.249}$$

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' + \eta_k\mathbf{X}_k(r) = 0, \tag{9.250}$$

$$\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_k\mathbf{Z}_n(z) = 0. \tag{9.251}$$

Равенство (9.250) мы перепишем в виде:

$$-\ \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' = \eta_k\mathbf{X}_k(r). \tag{9.252}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.246).

Условие $|u(0,\, z;\, t)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.253}$$

а условие $u_r(R,\, z;\, t) + hu(R,\, z;\, t) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.254}$$

## Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\lambda = \eta_k$, $\nu = 0$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -(r\mathbf{X}_k'(r))' = \eta_k r\mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k'(R) + h\mathbf{X}_k(R). \end{cases} \tag{9.255}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.
*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\eta = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $v(x) \equiv const$.*
В нашем случае $\alpha = h > 0$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.255) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:
*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\eta_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0$, $\alpha = h$, $\beta = 1$, поэтому

собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.255) имеют вид:

$$\begin{cases} \eta_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k > 0 \text{ — корни уравнения } \quad hRJ_0(\mu) + \mu \underbrace{J_0'(\mu)}_{=-J_1(\mu)} = 0 \end{cases} \tag{9.256}$$

**<u>Шаг 3.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_n(z)$**

Для функций $\mathbf{Z}_n(z)$ мы получили уравнение (9.251) $\mathbf{Z}_n''(z) + \nu_k \mathbf{Z}_n(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий

$$u_z(r,\,0;\,t) = u(r,\,l;\,t) = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0,$$

чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_n''(z) + \nu_n \mathbf{Z}_n(z) = 0. \\ \mathbf{Z}_n'(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_n(l) = 0. \end{cases} \tag{9.257}$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат: собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.257) имеют вид:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \qquad \mathbf{Z}_n(z) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{9.258}$$

**<u>Шаг 4.</u> Разложение функций $f(r,z;\,t)$ и $\varphi(r,z)$ в ряд по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\sqrt{r}\, f(r,z;\,t)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(r,z;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z;\,t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right),$$

В силу условия на $\mu_k$,

$$hRJ_0(\mu_k) + \mu_k J_0'(\mu_k) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad J_0'(\mu_k) = -\frac{hR}{\mu_k} J_0(\mu_k).$$

Поэтому $\quad f_k(z;\,t) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\underbrace{\left[J_0'(\mu_k)\right]^2}_{=\left[-\frac{hR}{\mu_k}J_0(\mu_k)\right]^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \dfrac{1}{R^2}.$

$$\cdot \int_0^R r f(r,z;\,t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2\mu_k^2}{R^2\left(h^2R^2 + \mu_k^2\right) J_0^2(\mu_k)} \cdot \int_0^R r f(r,z;\,t) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

Итак,

$$f_k(z;\,t) = \frac{2\mu_k^2}{R^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)} \cdot \int\limits_0^R rf(r,z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

Аналогично, для функции $\varphi(r,\,z)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(z)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \qquad \text{с коэффициентами}$$

$$\varphi_k(z) = \frac{2\mu_k^2}{R^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r,z)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr.$$

В свою очередь, каждая из функций $f_k(z;\,t)$ и $\varphi_k(z)$ могут быть разложены в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (9.257), в результате получаем следующие представления функций $f(r,z;\,t)$ и $\varphi(r,z)$:

$$f(r,z;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{kn}(t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

$$f_{kn}(t) = \frac{2\mu_k^2}{R^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)} \cdot \frac{2}{l}\times$$
$$\times\int\limits_0^R\left(\int\limits_0^R rf(r,z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{l}\right)dz.$$

Итак,

$$f_{kn}(t) = \frac{4\mu_k^2}{lR^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^l\int\limits_0^R rf(r,z;\,t)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)drdz. \quad (9.259)$$

Аналогично, для функции $\varphi(r,\,z)$ справедливо разложение в ряд

$$\varphi(r,z) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) \qquad (9.260)$$

с коэффициентами

$$\varphi_{kn} = \frac{4\mu_k^2}{lR^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\times$$
$$\times\int\limits_0^l\int\limits_0^R r\varphi(r,z)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)drdz. \quad (9.261)$$

**<u>Шаг 5.</u> Составление и решение задачи для $\mathbf{T}_{kn}(t)$**
Если искомый вид (9.247), с. 219, решения $u(r,\,t)$ и разложение (9.260) функции $\varphi(r,\,z)$ подставить в начальное условие

$$u(r,\,0)=\varphi(r,\,z),$$

получим, что это начальное условие будет заведомо выполнено, если все слагаемые ряда в левой части окажутся равны соответствующим слагаемым ряда в правой части, то есть будут выполнены соотношения

$$\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn}\mathbf{Z}_n(z)\mathbf{X}_k(r).$$

Таким образом, получаем начальные условия на функции $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn}.$$

В совокупности с полученным ранее уравнением (9.249), с. 220, получаем задачу Коши:

$$\begin{cases}\mathbf{T}_{kn}'(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=f_{kn}(t),\\ \mathbf{T}_{kn}(0)=\varphi_{kn}.\end{cases} \quad (9.262)$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{T}'(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}(t)=0$ имеет вид

$$\mathbf{T}_{OO}(t)=ce^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения, воспользуемся методом вариации постоянных:
Будем искать решение уравнения $\mathbf{T}_{kn}'(t)+a^2\lambda_{kn}\mathbf{T}_{kn}(t)=f_{kn}(t)$ в виде

$$\mathbf{T}(t)=c(t)e^{-a^2\lambda_{kn}t}.$$

Подставив $\mathbf{T}(t)$ искомого вида в уравнение, получим условие на неизвестную пока функцию $c(t)$:

$$c'(t)=f_{kn}(t)e^{a^2\lambda_{kn}t}.$$

Отсюда

$$c(t)=\int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{a^2\lambda_{kn}\tau}d\tau+c_1.$$

И, наконец,

$$\mathbf{T}_{\text{оНо}}(t) = c_1 e^{-a^2\lambda_{kn}t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{-a^2\lambda_{kn}(t-\tau)} d\tau. \qquad (9.263)$$

Из начального условия $\mathbf{T}_{kn}(0) = \varphi_{kn}$ получаем, что

$$c_1 = \varphi_{kn}.$$

Таким образом, решение задачи (9.262) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{kn}(t) = \varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn}a^2 t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)} d\tau, \qquad (9.264)$$

где $f_{kn}(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.259) и (9.261).
**Ответ в общем виде:**

$$u(r,z;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_{kn} e^{-\lambda_{kn}a^2 t} + \int\limits_0^t f_{kn}(\tau) e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)} d\tau\right) \times$$
$$\times\, J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu) + \mu J_0'(\mu) = 0$, а $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2} + \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$, а $f_{kn}(t)$ и $\varphi_k$ задаются формулами (9.259) и (9.261).
Поскольку в нашем случае $f(r,z;\,t) \equiv 0$, а $\varphi(r,z) = A(R^2 - r^2)z$, то все $f_{kn} = 0$, а для вычисления $\varphi_{kn}$ нам надо найти интегралы (для случая $J_0(\mu) = 0$ мы их брали в № 779, с. 196)

$$\int\limits_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x^3 J_0(x)\, dx =$$
$$= \Big[\text{в силу (9.9), с. 121, при } \nu = 1\Big] =$$
$$= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x^2 \cdot \Big[x J_1(x)\Big]' dx = \Big[\text{по частям}\Big] =$$
$$= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left( x^3 J_1(x)\Big|_{x=0}^{x=\mu_k} - 2\int\limits_0^{\mu_k} x^2 J_1(x)\, dx \right) = \Big[\text{в силу (9.9) при } \nu = 2\Big] =$$

$$= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left( \mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2 \int\limits_0^{\mu_k} \Big[ x^2 J_2(x) \Big]' dx \right) =$$

$$= \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \left( \mu_k^3 J_1(\mu_k) - 2\, x^2 J_2(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^4}{\mu_k^4} \cdot \Big( \mu_k^3 J_1(\mu_k) \ - 2\mu_k^2 J_2(\mu_k) \Big) =$$

$$= \left[ \begin{array}{ll} \text{в силу (9.10) при } \ \nu = 1, & J_2(\mu_k) \ - \ \frac{2}{\mu_k} J_1(\mu_k) + J_0(\mu_k) = 0 \\ \text{в силу условия на } \ \mu_k, & \mu_k J_1(\mu_k) = hR J_0(\mu_k) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{R^4 \left[ \mu_k^2 hR - \left( 2hR - \mu_k^2 \right) \right]}{\mu_k^4} \ J_0(\mu_k) . \quad (9.265)$$

$$\int\limits_0^R r J_0 \left( \frac{\mu_k r}{R} \right) dr = \left[ x = \frac{\mu_k r}{R} \right] = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x J_0(x)\, dx =$$

$$= \Big[ \text{в силу (9.9), с. 121, при } \ \nu = 1 \Big] =$$

$$= \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} \Big[ x J_1(x) \Big]' dx = \frac{R^2}{\mu_k^2} \cdot \left( x J_1(x) \Big|_{x=0}^{x=\mu_k} \right) = \frac{R^2}{\mu_k} J_1(\mu_k) =$$

$$= \Big[ \text{в силу условия на } \ \mu_k, \qquad \mu_k J_1(\mu_k) = hR J_0(\mu_k) \Big] = \frac{hR^3}{\mu_k^2} J_0(\mu_k) . \quad (9.266)$$

$$\int\limits_0^l z \cos \left( \frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dz = \Big[ \text{по частям} \Big] =$$

$$= \frac{2l}{\pi(2n-1)} \left( z \sin \left( \frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) \Big|_{z=0}^{z=l} - \int\limits_0^l \sin \left( \frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) dz \right) =$$

$$= \frac{2l}{\pi(2n-1)} \left( l(-1)^{n+1} + \frac{2l}{\pi(2n-1)} \underbrace{\cos \left( \frac{\pi(2n-1)z}{2l} \right) \Big|_{z=0}^{z=l}}_{=-1} \right) =$$

$$= \frac{2l}{\pi(2n-1)} \left( l(-1)^{n+1} \ - \ \frac{2l}{\pi(2n-1)} \right) =$$

$$= \left( \frac{l}{\pi(2n-1)} \right)^2 \cdot \Big( 2(-1)^{n+1} \pi(2n-1) - 4 \Big) . \quad (9.267)$$

Тогда для $\varphi_{kn}$ мы получаем

$$\varphi_{kn} =$$

$$= \frac{4\mu_k^2}{lR^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\int\limits_0^l\int\limits_0^R r\varphi(r,z)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)drdz =$$

$$= \frac{4A\mu_k^2}{lR^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\cdot\int\limits_0^R r(R^2-r^2)J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)dr\times$$

$$\times\int\limits_0^l z\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right)dz = \Big[\text{в силу (9.265), (9.266)и (9.267)}\Big] =$$

$$= \frac{4A\mu_k^2}{lR^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\times$$

$$\times\left(R^2\cdot\frac{hR^3}{\mu_k^2}J_0\left(\mu_k\right)-\frac{R^4\left[\mu_k^2hR-\left(2hR-\mu_k^2\right)\right]}{\mu_k^4}\,J_0\left(\mu_k\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{l}{\pi(2n-1)}\right)^2\cdot\Big(2(-1)^{n+1}\pi(2n-1)-4\Big) =$$

$$= \frac{4A\mu_k^2}{lR^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0^2\left(\mu_k\right)}\cdot\frac{R^4\left(2hR-\mu_k^2\right)\,J_0\left(\mu_k\right)}{\mu_k^4}\cdot\left(\frac{l}{\pi(2n-1)}\right)^2\times$$

$$\times\Big(2(-1)^{n+1}\pi(2n-1)-4\Big) = \frac{8AlR^2\left(2hR-\mu_k^2\right)}{\mu_k^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)J_0\left(\mu_k\right)}\cdot\frac{(-1)^{n+1}\pi(2n-1)-2}{\pi^2(2n-1)^2}.$$

Таким образом, мы уже знаем

**Ответ:**

$$u(r,z;\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{kn}e^{-\lambda_{kn}a^2t}+\int\limits_0^t f_{kn}(\tau)e^{-\lambda_{kn}a^2(t-\tau)}d\tau\right)\times$$

$$\times J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right) =$$

$$= \frac{8AlR^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2hR-\mu_k^2\right)\left((-1)^{n+1}\pi(2n-1)-2\right)}{\mu_k^2\left(h^2R^2+\mu_k^2\right)(2n-1)^2J_0\left(\mu_k\right)}\times$$

$$\times e^{-\lambda_{kn}a^2t}J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)z}{2l}\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $hRJ_0(\mu)+\mu J_0'(\mu) = 0$, а $\lambda_{kn} = \frac{\mu_k^2}{R^2}+\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$.

**№ 783 а).**

*В полубесконечном круговом цилиндре $0 \leqslant r < R$, $0 < z < \infty$ имеются источники некоторого газа плотности $Ue^{-\alpha z}$, причем на основании цилиндра концентрация этого газа поддерживается равной $Q$. Определить стационарное распределение газа в цилиндре, если боковая поверхность цилиндра газонепроницаема.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r, z;\, t)$ из условий*

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r}\cdot (ru_r)_r + u_{zz}\right) + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |u(0,\, z)| < \infty, \quad u_r(R,\, z) = 0 & 0 < z < \infty; \\ u(r,\, 0) = Q, & 0 \leqslant r < R. \end{cases} \tag{9.268}$$

**__Шаг 0.__ Избавление от неоднородности в краевом условии**
В данной ситуации можно попробовать избавиться сразу от неоднородности и в краевом условии, и в уравнении, поскольку все функции, дающие эту неоднородность, зависят только от $z$. Поэтому естественно искать решение задачи (9.268) в виде:

$$u(r, z) = w(z) + v(r, z), \tag{9.269}$$

где функция $w(z)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\cdot \overbrace{(rw_r)_r}^{=0} + w_{zz} + Ue^{-\alpha z} = 0, & 0 < z < \infty; \\ |w(z)| < \infty, & 0 < z < \infty; \\ w(0) = Q. \end{cases}$$

То есть для функции $w(z)$ получаем необычную задачу Коши (нужно два начальных условия, а в ней только одно, плюс условие ограниченности):

$$\begin{cases} w''(z) = -Ue^{-\alpha z}, & 0 < z < \infty; \\ w(0) = Q, & |w(z)| < \infty. \end{cases} \tag{9.270}$$

Общее решение однородного уравнения $w''(z) = 0$ имеет вид[1]

$$w_o(z) = c_1 + c_2 z,$$

а частное решение неоднородного уравнения $w''(z) = -Ue^{-\alpha z}$ легко строится в виде квазиполинома

$$w_{\text{чно}}(z) = ae^{-\alpha z}.$$

Подставляя искомый вид $w_{\text{чно}}(z)$ в уравнение, получаем, что

$$a = -\frac{U}{\alpha^2}, \qquad \Longrightarrow \qquad w_{\text{оно}}(z) = c_1 + c_2 z - \frac{U}{\alpha^2}e^{-\alpha z}.$$

[1] В данном простейшем случае его можно получить двукратным интегрированием уравнения по $z$, но мы приводим общий способ решения.

Из начального условия получаем:

$$w(0) = Q \quad \Longrightarrow \quad c_1 - \frac{U}{\alpha^2} = Q \quad \Longrightarrow \quad c_1 = \frac{U}{\alpha^2} + Q,$$

а из условия ограниченности

$$c_2 = 0.$$

Таким образом,

$$w(z) = \frac{U}{\alpha^2} + Q - \frac{U}{\alpha^2} e^{-\alpha z} = Q + \frac{U}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha z}\right).$$

Вычитая из задачи (9.268) задачу (9.270), получаем, что $v(r,\, z)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \cdot (r v_r)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < \infty; \\ |v(0,\, z)| < \infty, \quad v_r(R,\, z) = 0, & 0 < z < \infty; \\ v(r,\, z,\, 0) = 0, & 0 \leqslant r < R. \end{cases} \tag{9.271}$$

Данная задача однородна, поэтому наверняка имеет тривиальное решение

$$v(r,\, z) \equiv 0, \qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < \infty.$$

Более того, это решение единственно[1], поэтому $u(r, z) = w(z)$ и

**Ответ:** $$u(r, z) = Q + \frac{U}{\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha z}\right).$$

### № 784.

*Два одинаковых цилиндрических стакана $0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$, соединенные верхними кромками при помощи пренебрежимо тонкой изоляционной прокладки, образуют цилиндрическую коробку $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant 2l$. Найти распределение потенциала электростатического поля внутри этой коробки, если вся поверхность нижнего стакана поддерживается при потенциале $V_1$, а вся поверхность верхнего стакана – при потенциале $V_2$.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\, z)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (r u_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < 2l; \\ |u(0,\, z)| < \infty, \quad u(R,\, z) = \psi_1(z) = \begin{cases} V_1, & 0 < z < l, \\ V_2, & l < z < 2l; \end{cases} & \\ u(r,\, 0) = V_1, \quad u(r,\, 2l) = V_2, & 0 \leqslant r < R. \end{cases} \tag{9.272}$$

**Шаг 0. Избавление от неоднородности в части краевых условий**
Здесь естественно искать решение задачи (9.272) в виде:

$$u(r,\, z) = \frac{z}{2l} V_2 + \frac{2l - z}{2l} V_1 + v(r,\, z), \tag{9.273}$$

[1] Достаточно вспомнить, к каким задачам для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ приведет ее честное решение методом Фурье:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) = 0, & 0 < z < \infty; \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0. & |\mathbf{Z}_k(z)| < \infty. \end{cases}$$

У этих задач, как легко видеть, существует только тривиальное решение.

поскольку функция

$$\eta(z) = \frac{z}{2l}V_2 + \frac{2l-z}{2l}V_1$$

удовлетворяет краевым условиям

$$\eta(0) = V_1, \quad \eta(2l) = V_2.$$

Тогда функция

$$\psi(z) \equiv \psi_1(z) - \eta(z) = \begin{cases} -\frac{z}{2l}\left(V_2 - V_1\right), & 0 < z < l, \\ \\ \frac{2l-z}{2l}\left(V_2 - V_1\right), & l < z < 2l \end{cases} \tag{9.274}$$

есть функция краевого условия $v(R,\, z) = \psi(z)$, и тогда $v(r,\, z) = u(r,\, z) - \eta(z)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\cdot\left(rv_r\right)_r + v_{zz} = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < 2l; \\ \left|v(0,\, z)\right| < \infty, \quad v(R,\, z) = \psi(z), & 0 < z < 2l; \\ v(r,\, 0) = v(r,\, 2l) = 0, & 0 \leqslant r < R. \end{cases} \tag{9.275}$$

при $\psi(r,\, z)$, определенной в (9.274).

В наших руках был выбор: избавиться от неоднородности в краевом условии $u(R,\, z) = \psi_1(z)$ или от неоднородностей $u(r,\, 0) = V_1$, $u(r,\, 2l) = V_2$. В зависимости от того, что мы выбираем, мы получим задачу Штурма–Лиувилля либо для $\mathbf{X}_k(r)$, либо для $\mathbf{Z}_k(z)$, и соответственно вид ряда в ответе.

**<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.275) в виде

$$v(r,\, z) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k(z), \tag{9.276}$$

то, подставив (9.276) в уравнение $\frac{1}{r}\cdot\left(rv_r\right)_r + v_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)'\mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k''(z)\right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)'\mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k''(z) = 0, \qquad \forall k.$$

Поскольку сумма дробей, одна из которых зависит только от $r$, а другая – только от $z$, может быть нулем в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одна и та же константа, но с разным знаком, то $\exists\ \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$-\frac{\frac{1}{r}\cdot\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} = \frac{\mathbf{Z}_k''(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' - \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \tag{9.277}$$

$$\mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \tag{9.278}$$

Равенство (9.277) мы перепишем в виде:

$$- \ \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \tag{9.279}$$

Это – почти в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$, только знак перед $\lambda_k$ не тот. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.275).

Условие $|v(0,\, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.280}$$

а условие $v(R,\, z) = \psi(z)$ с учетом, что для $\psi(z)$ справедливо разложение

$$\psi(z) = \sum_{k=\dots}^{\infty} \psi_k \mathbf{Z}_k(z), \tag{9.281}$$

прейдет в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = \psi_k. \tag{9.282}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$**

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (9.278) $\mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий

$$v(r,\, 0) = v(r,\, 2l) = 0, \quad 0 \leqslant r < R,$$

чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(2l) = 0. \end{cases} \tag{9.283}$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:
собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.283) имеют вид:

$$\lambda_k = \varkappa_k^2, \qquad \varkappa = \frac{\pi k}{2l}, \qquad \mathbf{Z}_k(z) = \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{9.284}$$

**<u>Шаг 3.</u> Решение задачи для $\mathbf{X}_k(r)$**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\lambda = -\varkappa_k^2,\ \nu = 0,\ \alpha = 1$ и $\beta = 0$, только с неоднородным краевым условием:

$$\begin{cases} -\,(r\mathbf{X}_k'(r))' = -\varkappa_k^2 r \mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = \psi_k. \end{cases} \tag{9.285}$$

Приведем наше уравнение $-\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' = -\varkappa_k^2 r\mathbf{X}_k(r)$ к виду (9.1). Сначала перепишем его в виде

$$-\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' = \left(i\varkappa_k\right)^2 r\mathbf{X}_k(r)$$

Далее в результате замены

$$x = i\varkappa r, \quad \mathbf{Y}(x) = \mathbf{Y}(i\varkappa r) = \mathbf{X}_k\left(r\right)$$
$$\mathbf{X}_k'(r) = i\varkappa\mathbf{Y}'(x), \quad \mathbf{X}_k''(r) = (i\varkappa)^2\mathbf{Y}''(x)$$

получим, что

$$-r\mathbf{X}_k''(r) - \mathbf{X}_k'(r) = \left(i\varkappa_k\right)^2 r\mathbf{X}_k(r)$$

превратится в

$$-\frac{x}{i\varkappa}\cdot(i\varkappa)^2\mathbf{Y}''(x) - i\varkappa\mathbf{Y}'(x) = \left(i\varkappa_k\right)^2 \frac{x}{i\varkappa}\cdot\mathbf{Y}(x),$$

сократив на $-i\varkappa$, получаем уравнение:

$$x\mathbf{Y}''(x) + \mathbf{Y}'(x) + x\mathbf{Y}(x) = 0,$$

которое есть в точности уравнение Бесселя (9.1) с $\nu = 0$.

Воспользуемся результатом теоремы 9.1, с. 121.

*Общее решение уравнения Бесселя* (9.1) *задается из формулой*

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

В нашем случае $\nu = 0$, а $x = i\varkappa r$, поэтому

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 J_0(i\varkappa r) + c_2 N_0(i\varkappa r).$$

В силу краевого условия $|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty$, поскольку $N_0(+0i) = \infty$, получаем, что $c_2 = 0$, поэтому

$$\mathbf{X}_k(x) = c_1 J_0(i\varkappa r) \equiv \Big[\text{в силу (9.7), с. 120 при } \nu = 0\Big] \equiv c_1 I_0(\varkappa r).$$

Краевое условие $\mathbf{X}_k(R) = \psi_k$ дает нам константу $c_1$:

$$c_1 I_0(\varkappa R) = \psi_k, \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = \frac{\psi_k}{I_0(\varkappa R)}.$$

Наконец, получаем, что решениями задачи (9.285) с неоднородным краевым условием являются функции:

$$\mathbf{X}_k(r) = \frac{I_0(\varkappa_k r)}{I_0(\varkappa_k R)}, \qquad \text{где } \varkappa_k = \frac{\pi k}{2l}, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{9.286}$$

**<u>Шаг 4.</u> Разложение функции $\psi(z)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля** (9.283)
Функция $\psi(z)$ может быть разложена в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля (9.283) следующим образом[1]:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \sin\left(\frac{\pi n z}{2l}\right) \qquad \text{с коэффициентами} \tag{9.287}$$

$$\psi_k = \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2l} \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz. \tag{9.288}$$

**<u>Ответ в общем виде:</u>**

$$v(r,\, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0(\varkappa_k r)}{I_0(\varkappa_k R)} \cdot \sin\left(\varkappa_k z\right),$$

где $\varkappa_k = \frac{\pi k}{2l}$ а $\psi_k$ задаются формулами (9.288):

$$\psi_k = \frac{1}{l} \cdot \int_0^{2l} \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz. \tag{9.288}$$

Поскольку в нашем случае

$$\psi(z) \equiv \psi_1(z) - \eta(z) = \begin{cases} -\frac{z}{2l}\left(V_2 - V_1\right), & 0 < z < l, \\ \frac{2l-z}{2l}\left(V_2 - V_1\right), & l < z < 2l \end{cases} \tag{9.274}$$

то для вычисления $\psi_k$ нам надо найти интегралы

$$\int_l^{2l} \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz = -\frac{2l}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi k z}{2l}\right)\Bigg|_{z=l}^{z=2l} = \frac{2l}{\pi k}\left((-1)^{k+1} + \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right)\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2l(-1+(-1)^m)}{\pi k}, & k = 2m, \\ \frac{2l}{\pi k}, & k = 2m-1. \end{cases}$$

$$\int_0^{2l} z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz = \frac{2l}{\pi k}\left(-z\cos\left(\frac{\pi k z}{2l}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2l} + \int_0^{2l} \cos\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz\right) =$$

$$= \frac{2l}{\pi k}\left(2l\,(-1)^{k+1} + \frac{2l}{\pi k}\sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right)\right)\Bigg|_{z=0}^{z=2l} = \frac{4l^2\,(-1)^{k+1}}{\pi k}$$

[1] Подобные задачи мы решали многократно и подробно, см., например, № 706, Шаг 2 и Шаг 3, с. 111 – 114.

Тогда для $\psi_k$ мы получаем

$$\psi_k = \frac{1}{l} \cdot \int\limits_0^{2l} \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{l} \cdot \frac{V_2 - V_1}{2l} \cdot \left( -\int\limits_0^{l} z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz + \right.$$

$$\left. + 2l \int\limits_l^{2l} \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz - \int\limits_l^{2l} z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz \right) =$$

$$= \frac{V_2 - V_1}{2l^2} \cdot \left( 2l \int\limits_l^{2l} \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz - \int\limits_0^{2l} z \sin\left(\frac{\pi k z}{2l}\right) dz \right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{2l^2} \cdot \left( \frac{4l^2(-1+(-1)^m)}{\pi k} - \frac{4l^2(-1)^{k+1}}{\pi k} \right), & k = 2m, \\ \frac{V_2 - V_1}{2l^2} \cdot \left( 2l \cdot \frac{2l}{\pi k} - \frac{4l^2(-1)^{k+1}}{\pi k} \right), & k = 2m-1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\psi_k = \begin{cases} \frac{V_2 - V_1}{\pi} \cdot (-1)^m, & k = 2m, \\ 0, & k = 2m-1. \end{cases} \tag{9.289}$$

Итак, мы уже знаем функцию

$$v(r,\, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0(\varkappa_k r)}{I_0(\varkappa_k R)} \cdot \sin\left(\varkappa_k z\right),$$

где $\varkappa_k = \frac{\pi k}{2l}$, а $\psi_k$ задаются формулами (9.289).

Если перейти в этом ряде к суммированию по $m$, получим

$$v(r,\, z) = \frac{V_2 - V_1}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{I_0(\varkappa_{2m} r)}{I_0(\varkappa_{2m} R)} \cdot \sin\left(\varkappa_{2m} z\right).$$

**Ответ:**

$$u(r,\, z) = \frac{z}{2l} V_2 + \frac{V_2 - V_1}{\pi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \cdot \frac{I_0\left(\frac{\pi m r}{l}\right)}{I_0\left(\frac{\pi m R}{l}\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi m z}{l}\right).$$

**№ 785.**

*В конечной трубе* $b \leqslant r < d$, $0 < z < l$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ *найти функцию* $u(r,\, z)$ *из условий:*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l; \\ u(b,\, z) = 0, \quad u(d,\, z) = U, & 0 < z < l; \\ u(r,\, 0) = u(r,\, l) = 0, & b < r < d. \end{cases} \tag{9.290}$$

**Шаг 1. Предварительные рассуждения**

Если искать решение задачи (9.290) в виде

$$u(r,\, z) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k(z), \tag{9.291}$$

то, подставив (9.291) в уравнение $\frac{1}{r} \cdot (ru_r)_r + v_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty} \left( \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' \, \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k''(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' \, \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r) \mathbf{Z}_k''(z) = 0, \qquad \forall k.$$

Поскольку сумма дробей, одна из которых зависит только от $r$, а другая – только от $z$, может быть нулем в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одна и та же константа, но с разным знаком, то $\exists \;\, \lambda_k \in \mathbb{R}$ :

$$- \frac{\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))'}{\mathbf{X}_k(r)} = \frac{\mathbf{Z}_k''(z)}{\mathbf{Z}(z)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Z}(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' - \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \tag{9.292}$$

$$\mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \tag{9.293}$$

Равенство (9.292) мы перепишем в виде:

$$- \; \frac{1}{r} \cdot (r\mathbf{X}_k'(r))' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \tag{9.294}$$

Это – почти в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$, только знак перед $\lambda_k$ не тот. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.290).

Условие $u(b,\, z) = 0$ превратится в

$$\mathbf{X}_k(b) = 0, \tag{9.295}$$

а условие $u(d,\, z) = \psi(z) \equiv U$ с учетом, что для $\psi(z)$ справедливо разложение

$$\psi(z) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \psi_k \mathbf{Z}_k(z), \tag{9.296}$$

перейдет в условие

$$\mathbf{X}_k(d) = \psi_k. \tag{9.297}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{Z}_k(z)$**

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (9.293) $\mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0$. Добавим к нему краевые условия, следующие из условий

$$u(r,\, 0) = u(r,\, l) = 0, \quad b < r < d,$$

чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) + \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \\ \mathbf{Z}_k(0) = 0, \\ \mathbf{Z}_k(l) = 0. \end{cases} \tag{9.298}$$

Эту задачу мы неоднократно решали, выпишем результат:
собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.298) имеют вид:

$$\lambda_k = \mu_k^2, \qquad \mu = \frac{\pi k}{l}, \qquad \mathbf{Z}_k(z) = \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{9.299}$$

**<u>Шаг 3.</u> Решение задачи для $\mathbf{X}_k(r)$**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя с $\nu = 0$

$$\begin{cases} -\big(r\mathbf{X}_k'(r)\big)' = -\lambda_k r \mathbf{X}_k(r), & b < r < d; \\ \mathbf{X}_k(b) = 0, \\ \mathbf{X}_k(d) = \psi_k. \end{cases} \tag{9.300}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.1, с. 121.
*Общее решение уравнения Бесселя* (9.1)

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x\mathbf{Y}'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) \mathbf{Y}(x) = 0 \tag{9.1}$$

*задается формулой*

$$\mathbf{Y}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

Наше уравнение $\big(r\mathbf{X}_k'(r)\big)' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r)$ обычной уже заменой

$$x = \sqrt{-\lambda_k}\, r \equiv i\mu_k r, \qquad \mu_k = \frac{\pi k}{l}$$

сводится к уравнению

$$x^2 \mathbf{Y}''(x) + x\mathbf{Y}'(x) + x^2 \mathbf{Y}(x) = 0,$$

которое совпадает с (9.1) при $\nu = 0$. Поэтому его общее решение задается формулой

$$\mathbf{X}_k(r) = \tilde{c}_1 J_0\left(\sqrt{-\lambda_k}\, r\right) + \tilde{c}_2 N_0\left(\sqrt{-\lambda_k}\, r\right) = \tilde{c}_1 J_0\left(i\mu_k\, r\right) + \tilde{c}_2 N_0\left(i\mu_k\, r\right). \tag{9.301}$$

По определению 9.2, а точнее из формул (9.5), (9.7), с. 120,

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x) \tag{9.5}$$

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu} J_\nu(ix), \qquad K_\nu(x) = e^{\frac{\pi i}{2}\nu} H_\nu^{(1)}(ix) \tag{9.7}$$

получаем, что при $\nu = 0$

$$K_0(x) = e^0 H_0^{(1)}(ix) \equiv J_0(ix) + iN_0(ix) \quad \Longrightarrow \quad N_0(ix) = i\left(I_0(x) - K_0(x)\right).$$

Тогда

$$\tilde{c}_1 J_0\left(i\mu_k\, r\right) + \tilde{c}_2 N_0\left(i\mu_k\, r\right) = \tilde{c}_1 I_0\left(\mu_k\, r\right) + i\tilde{c}_2 I_0\left(\mu_k\, r\right) - i\tilde{c}_2 K_0\left(\mu_k\, r\right).$$

Поэтому, переобозначив константы

$$c_1 = \tilde{c}_1 + i\tilde{c}_2, \qquad\qquad c_2 = -i\tilde{c}_2,$$

из (9.301) получим:

$$\mathbf{X}_k(r) = c_1 I_0\left(\mu_k\, r\right) + c_2 K_0\left(\mu_k\, r\right). \tag{9.302}$$

В силу краевых условий $\mathbf{X}_k(b) = 0, \quad \mathbf{X}_k(b) = \psi_k$ имеем

$$\begin{cases} c_1 I_0\left(\mu_k\, b\right) + c_2 K_0\left(\mu_k\, b\right) = 0, \\ c_1 I_0\left(\mu_k\, d\right) + c_2 K_0\left(\mu_k\, d\right) = \psi_k. \end{cases} \tag{9.303}$$

Если рассматривать (9.303) как систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно переменных $c_1$ и $c_2$, то в случае, когда ее определитель не равен нулю[1]

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} I_0\left(\mu_k\, b\right) & K_0\left(\mu_k\, b\right) \\ I_0\left(\mu_k\, d\right) & K_0\left(\mu_k\, d\right) \end{vmatrix} = I_0\left(\mu_k\, b\right) K_0\left(\mu_k\, d\right) - I_0\left(\mu_k\, d\right) K_0\left(\mu_k\, b\right) \neq 0, \tag{9.304}$$

эта система имеет единственное решение (его можно найти, например, по правилу Крамера)

$$c_1 = -\frac{\psi_k K_0\left(\mu_k\, b\right)}{\Delta}, \qquad\qquad c_2 = \frac{\psi_k I_0\left(\mu_k\, b\right)}{\Delta}. \tag{9.305}$$

Поэтому

$$\mathbf{X}_k(r) = \psi_k \cdot \frac{I_0\left(\mu_k\, b\right) K_0\left(\mu_k\, r\right) - I_0\left(\mu_k\, r\right) K_0\left(\mu_k\, b\right)}{I_0\left(\mu_k\, b\right) K_0\left(\mu_k\, d\right) - I_0\left(\mu_k\, d\right) K_0\left(\mu_k\, b\right)}, \qquad \mu_k = \frac{\pi k}{l}.$$

[1] Случай $\Delta = 0$ мы рассматривать не будем.

**<u>Ответ в общем виде:</u>**

$$u(r,\, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0\left(\mu_k\, b\right) K_0\left(\mu_k\, r\right) - I_0\left(\mu_k\, r\right) K_0\left(\mu_k\, b\right)}{I_0\left(\mu_k\, b\right) K_0\left(\mu_k\, d\right) - I_0\left(\mu_k\, d\right) K_0\left(\mu_k\, b\right)} \cdot \sin\left(\mu_k z\right),$$

где $\mu_k = \frac{\pi k}{l}$ а $\psi_k$ задаются формулами:

$$\psi_k = \frac{2}{l} \cdot \int\limits_0^l \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz. \tag{9.306}$$

Поскольку в нашем случае $\psi(z) \equiv U$, то для вычисления $\psi_k$ мы получаем

$$\begin{aligned}\psi_k = \frac{2}{l} \cdot \int\limits_0^l \psi(z) \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz = \frac{2U}{l} \cdot \int\limits_0^l \sin\left(\frac{\pi k z}{l}\right) dz =& \\ = -\frac{2U}{l} \cdot \frac{l}{\pi k} \cos\left(\frac{\pi k z}{l}\right)\Bigg|_{z=0}^{z=l} =& \\ = -\frac{2U}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right) = &\begin{cases} 0, & k = 2m, \\ \frac{4U}{\pi(2m-1)}, & k = 2m-1. \end{cases}\end{aligned}$$

Так как все коэффициенты с четными номерами у ряда

$$u(r,\, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cdot \frac{I_0\left(\mu_k\, b\right) K_0\left(\mu_k\, r\right) - I_0\left(\mu_k\, r\right) K_0\left(\mu_k\, b\right)}{I_0\left(\mu_k\, b\right) K_0\left(\mu_k\, d\right) - I_0\left(\mu_k\, d\right) K_0\left(\mu_k\, b\right)} \cdot \sin\left(\mu_k z\right)$$

оказались равными нулю, уместно перейти к суммированию по $m$, где $k = 2m - 1$:

**<u>Ответ:</u>**

$$u(r,\, z) = \frac{4U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\mu_{2m-1}\, b\right) K_0\left(\mu_{2m-1}\, r\right) - I_0\left(\mu_{2m-1}\, r\right) K_0\left(\mu_{2m-1}\, b\right)}{I_0\left(\mu_{2m-1}\, b\right) K_0\left(\mu_{2m-1}\, d\right) - I_0\left(\mu_{2m-1}\, d\right) K_0\left(\mu_{2m-1}\, b\right)} \times \\ \times \frac{\sin\left(\mu_{2m-1} z\right)}{2m-1},$$

где $\mu_{2m-1} = \frac{\pi(2m-1)}{l}$.

### № 786 а).

*Найти стационарное распределение температуры в однородном цилиндре*
*$0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant l$ для случая, когда нижнее основание цилиндра имеет температуру $T$, а остальная поверхность – температуру, равную нулю.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\, z)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r}\cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0, & 0 \leqslant r < R, \quad 0 < z < l; \\ |u(0,\, z)| < \infty, \quad u(R,\, z) = 0 & 0 < z < l; \\ u(r,\, 0) = T, \quad u(r,\, l) = 0, & 0 \leqslant r < R. \end{cases} \tag{9.307}$$

**<u>Шаг 1.</u> Предварительные рассуждения**
Если искать решение задачи (9.307) в виде

$$u(r,\, z) = \sum_{k=\ldots}^{\infty} \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k(z), \tag{9.308}$$

то, подставив (9.308) в уравнение $\frac{1}{r}\cdot (ru_r)_r + u_{zz} = 0$, получим:

$$\sum_{k=\ldots}^{\infty} \left( \frac{1}{r}\cdot \left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k''(z) \right) = 0.$$

Это равенство заведомо верно, если все члены ряда в левой части равны нулю:

$$\frac{1}{r}\cdot \left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' \mathbf{Z}_k(z) + \mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k''(z) = 0, \qquad \forall k.$$

Поделив последнее равенство на $\mathbf{X}_k(r)\mathbf{Z}_k(z)$, получим:

$$\frac{\frac{1}{r}\cdot \left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} + \frac{\mathbf{Z}_k''(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = 0.$$

Сумма дробей, одна из которых зависит только от $r$, а другая – только от $z$, может быть нулем в том и только в том случае, если каждая из этих дробей – одинаковые константы с разным знаком. То есть $\exists\ \lambda_k$ :

$$\frac{\frac{1}{r}\cdot \left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)'}{\mathbf{X}_k(r)} = -\,\frac{\mathbf{Z}_k''(z)}{\mathbf{Z}_k(z)} = -\lambda_k.$$

Таким образом, для функций $\mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}_k(z)$ получаем уравнения

$$\frac{1}{r}\cdot \left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' + \lambda_k \mathbf{X}_k(r) = 0, \tag{9.309}$$

$$\mathbf{Z}_k''(z) - \lambda_k \mathbf{Z}_k(z) = 0. \tag{9.310}$$

Равенство (9.309) мы перепишем в виде:

$$-\ \frac{1}{r}\cdot \left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' = \lambda_k \mathbf{X}_k(r). \tag{9.311}$$

Это – в точности уравнение Бесселя из задачи (9.17) с $\nu = 0$. Выясним, какие краевые условия на $\mathbf{X}(r)$ следуют из условий задачи (9.307).

Условие $|u(0,\, z)| < \infty$ превратится в

$$|\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \tag{9.312}$$

а условие $u(R,\, z) = 0$ – в условие

$$\mathbf{X}_k(R) = 0. \tag{9.313}$$

**Шаг 2. Решение задачи Штурма-Лиувилля для $\mathbf{X}_k(r)$**

Для функций $\mathbf{X}_k(r)$ мы получили задачу Штурма-Лиувилля вида (9.17) с $\lambda = \lambda_k,\ \ \nu = 0,\ \ \alpha = 1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{cases} -\left(r\mathbf{X}_k'(r)\right)' = \lambda_k r \mathbf{X}_k(r). \\ |\mathbf{X}_k(+0)| < \infty, \\ \mathbf{X}_k(R) = 0. \end{cases} \tag{9.314}$$

Воспользуемся результатом теоремы 9.3, с. 123.
*Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и кратности 1. Число $\lambda = 0$ есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\nu = \alpha = 0$, и ему соответствует собственная функция $u(x) \equiv const$.*
В нашем случае $\alpha = 1$, поэтому задача Штурма-Лиувилля (9.314) имеет только строго положительные собственные значения. Чтобы их найти, применим теорему 9.4, с. 123:
*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения*

$$\alpha R J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

В нашем случае $\nu = 0,\ \alpha = 1,\ \beta = 0$, поэтому собственные числа и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (9.314) имеют вид:

$$\begin{cases} \lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2, \qquad \mathbf{X}_k(r) = J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \\ \text{где } \mu_k \ - \ \text{корни уравнения} \qquad J_0(\mu) = 0. \end{cases} \tag{9.315}$$

**Шаг 3. Решение задачи для $\mathbf{Z}_k(z)$**

Для функций $\mathbf{Z}_k(z)$ мы получили уравнение (9.310) $\mathbf{Z}_k''(z) - \lambda_k\mathbf{Z}_k(z) = 0$. Вспомним, что $\lambda_k = \left[\frac{\mu_k}{R}\right]^2$, и добавим к нему краевые условия, следующие из условий $u(r,\, 0) = T \equiv \psi(r),\ \ u(r,\, l) = 0,\ \ 0 \leqslant r < R,$ чтобы получить задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_k''(z) - \frac{\mu_k^2}{R^2}\mathbf{Z}_k(z) = 0. \\ \mathbf{Z}_k(0) = \psi_k, \\ \mathbf{Z}_k(l) = 0. \end{cases} \tag{9.316}$$

Общее решение уравнения $\mathbf{Z}_k''(z) - \frac{\mu_k^2}{R^2}\mathbf{Z}_k(z) = 0$ имеет вид

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) + c_2 \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right).$$

Из краевого условия $\mathbf{Z}_k(0) = \psi_k$ следует, что $c_2 = \psi_k$, откуда

$$\mathbf{Z}_k(z) = c_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) + \psi_k \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right).$$

Тогда из краевого условия $\mathbf{Z}_k(l) = 0$ получаем

$$\mathbf{Z}_k(l) = c_1 \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) + \psi_k \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) = 0, \qquad \Longrightarrow \qquad c_1 = -\frac{\psi_k \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right)}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{Z}_k(z) = \psi_k \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right)\right), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{9.317}$$

**Шаг 4. Разложение функции $\psi(r)$ в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля**

В соответствии с теоремой 9.5, с. 124, функция $\psi(r) \equiv T$ разлагается в ряд Фурье

$$\psi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{9.318}$$

$$\psi_k = \frac{1}{\frac{1}{2}\underbrace{\Big[J_0'(\mu_k)\Big]^2}_{=[-J_1(\mu_k)]^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{0^2}{(\mu_k)^2}\right)\underbrace{J_0^2(\mu_k)}_{=0}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$= \frac{2}{R^2} \cdot \frac{1}{J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr.$$

**Ответ в общем виде:**

$$u(r, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)\left(\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right)\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$, а $\psi_k$ задаются формулами:

$$\psi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr. \tag{9.319}$$

Поскольку в нашем случае $\psi(r,\, z) \equiv T$, то для $\psi_k$ мы получаем

$$\psi_k = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr = \frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \cdot \int\limits_0^R r J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr =$$

$$= \left[x = \frac{\mu_k r}{R}\right] = \frac{2T}{\mu_k^2 J_1^2\left(\mu_k\right)} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} x J_0\left(x\right) dx = \left[\text{в силу (9.9) при } \ \nu = 0\right] =$$

$$= \frac{2T}{\mu_k^2 J_1^2\left(\mu_k\right)} \cdot \int\limits_0^{\mu_k} \left[x J_1\left(x\right)\right]' dx = \frac{2T}{\mu_k^2 J_1^2\left(\mu_k\right)} \cdot x J_1\left(x\right) \Bigg|_{x=0}^{x=\mu_k} = \frac{2T}{\mu_k J_1\left(\mu_k\right)}.$$

**Ответ:**

$$u(r,\, z) = 2T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k J_1\left(\mu_k\right)} \cdot J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) \cdot \left(\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right) - \operatorname{cth}\left(\frac{\mu_k l}{R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_k z}{R}\right)\right),$$

где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu) = 0$.

## 10. Применение сферических функций

### 10.1. Полиномы Лежандра

**Опр. 10.1. Уравнение Лежандра:**

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right] + \lambda y(x) = 0, \qquad x \in (-1,\, 1). \tag{10.1}$$

**Теорема 10.1.**

*Пусть ограниченная функция* $y(x) \not\equiv 0$ *есть решение уравнения* (10.1).

*Тогда:* ***1.*** $\lambda = n(n+1)$, *где* $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$;

***2.*** *Функция* $y(x)$ *является полиномом степени* $n$, *называемым* **полиномом Лежандра**, *и может быть найдена по* **формуле Родрига:**

$$y(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]. \tag{10.2}$$

**Теорема 10.2** (рекуррентные формулы).
*Имеют место следующие соотношения*

$$\begin{aligned}
&(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, && n \geqslant 1; && (10.3)\\
&P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), && n \geqslant 1; && (10.4)\\
&P'_n(x) = xP'_{n-1}(x) + nP'_{n-1}(x), && n \geqslant 1; && (10.5)\\
&P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x), && n \geqslant 1; && (10.6)\\
&(1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - xnP_n(x), && n \geqslant 1. && (10.7)
\end{aligned}$$

Кроме приведенных формул, также весьма полезны следующие соотношения:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad n \geqslant 1; \tag{10.8}$$

$$P_{2m+1}(0) = 0, \qquad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m \geqslant 0. \tag{10.9}$$

**Теорема 10.3** (ортогональность и норма полиномов Лежандра).

$$\Big(P_k(x),\ P_n(x)\Big) \equiv \int\limits_{-1}^{1} P_k(t)P_n(t)dt = \begin{cases} 0, & \textit{при}\quad k \neq n; \\ \frac{2}{2k+1}, & \textit{при}\quad k = n. \end{cases} \tag{10.10}$$

**Теорема 10.4** (разложение в ряд по полиномам Лежандра от косинусов).

*Пусть* $f(\theta) \in C^2[0,\ \pi]$.

*Тогда* $f(\theta)$ *разлагается на* $[0,\ \pi]$ *в следующий ряд Фурье*

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(cos\theta), \quad f_k = \frac{2k+1}{2}\int\limits_0^{\pi} f(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \tag{10.11}$$

*При этом ряд* (10.11) *сходится к* $f(\theta)$ ***равномерно*** *на всем сегменте* $[0,\ \pi]$.

Выпишем первые несколько полиномов Лежандра и приведем графики (рис 8):

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}; \tag{10.12}$$

$$P_4(x) = \frac{35x^4 - 30x^2 + 3}{8}, \qquad P_5(x) = \frac{63x^5 - 70x^3 + 15x}{8}; \tag{10.13}$$

$$P_6(x) = \frac{231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5}{16}, \dots \tag{10.14}$$

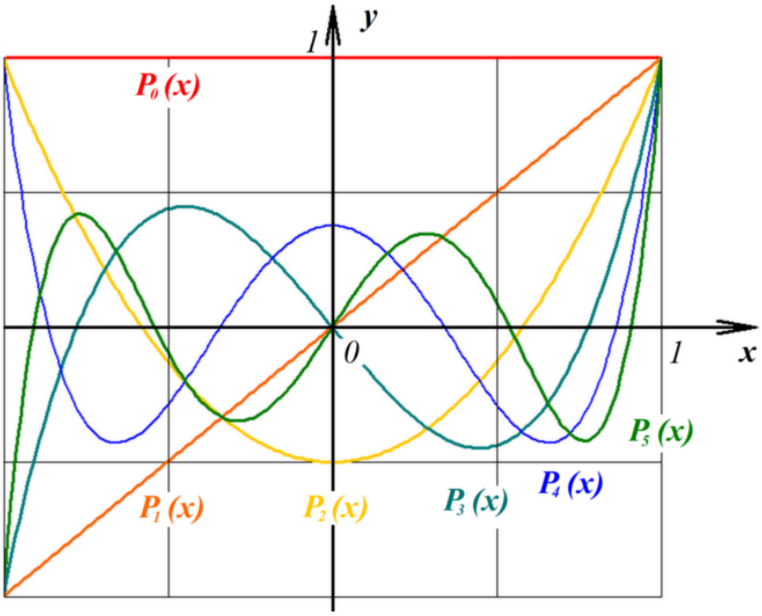



Рис. 8. Графики первых полиномов Лежандра

### 10.2. Присоединенные функции Лежандра

Здесь мы будем рассматривать следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy(x)}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right) y(x) = 0, \qquad x \in (-1,\, 1). \tag{10.15}$$

**Теорема 10.5.**
*Пусть ограниченная функция* $y(x) \not\equiv 0$ *есть решение уравнения* (10.15). *Тогда* ***1)*** $\lambda = n(n+1)$, *где* $n = \overline{0,\, \infty}$;

***2)*** *функция* $y(x)$,*называемая* **присоединенной функцией Лежандра порядка** $k$, *может быть найдена по формуле:*

$$y(x) = P_n^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \qquad m = \overline{0,\, n}; \tag{10.16}$$

***3)*** *при этом* $P_n^{(0)}(x) \equiv P_n(x)$ *– полиномы Лежандра, а* $P_n^m(x) \equiv 0$ *при всех* $m > n$.

**Опр. 10.2.** Функции

$$P_n^m(\cos\theta)\cos k\varphi, \qquad P_n^m(\cos\theta)\sin k\varphi, \qquad m=\overline{0,\, n}, \quad n=\overline{0,\,\infty}, \quad (10.17)$$

называются **сферическими гармониками**.

**Теорема 10.6** (ортогональность и норма присоединенных функций Лежандра)**.**

$$\left(P_k^m(x),\; P_n^m(x)\right) \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{-1}^{1} P_k^m(t)P_n^m(t)dt = \begin{cases} 0, & \textit{при} \quad k\neq n; \\ \frac{2}{2k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}, & \textit{при} \quad k=n. \end{cases} \quad (10.18)$$

**Теорема 10.7** (разложение в ряд по сферическим гармоникам)**.**

*Пусть* $g(\theta,\,\varphi)\in C^2$, $\theta\in[0,\,\pi]$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$, $g(\theta,\,\varphi+2\pi)=g(\theta,\,\varphi)$.

*Тогда* $g(\theta,\,\varphi)$ *разлагается в следующий ряд Фурье*

$$g(\theta,\,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha_{k0}}{2}P_k(\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\sum_{m=1}^{k}P_k^m(\cos\theta)\left(\alpha_{km}\cos(m\varphi)+\beta_{km}\sin(m\varphi)\right)\right], \quad (10.19)$$

$$\alpha_{km}=\frac{2k+1}{2\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\cos(m\varphi)\int\limits_0^{\pi}g(\theta,\,\varphi)\,P_k^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \quad (10.20)$$

$$\beta_{km}=\frac{2k+1}{2\pi}\cdot\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\sin(m\varphi)\int\limits_0^{\pi}g(\theta,\,\varphi)\,P_k^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \quad (10.21)$$

*При этом ряд* (10.19) *сходится к* $g(\theta,\,\varphi)$ ***абсолютно и равномерно*** *на* $\theta\in[0,\,\pi]$, $\varphi\in[0,\,2\pi]$.

### 10.3. Уравнение Лапласа в шаре

Рассмотрим в сферических координатах (рис. 9)

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

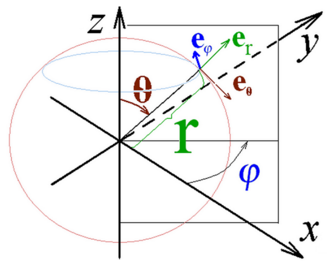



Рис.9. Сферические координаты

уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Поскольку в сферических координатах

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi},$$

то уравнение Лапласа принимает вид:

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0. \tag{10.22}$$

Будем искать решение (10.22) методом разделения переменных.

**Шаг 1. Поиск сферических гармоник**

Пусть функция

$$U(r,\,\theta,\,\varphi) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)$$

есть решение уравнения (10.22). Тогда

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta(\theta,\,\varphi)\Big)_\theta\mathbf{X}(r) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta,\,\varphi)\mathbf{X}(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)$ и умножим на $r^2$:

$$\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta(\theta,\,\varphi)\Big)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta,\,\varphi)}{\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)}.$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от $r$, а справа – функция, зависящая только от $\theta$ и $\varphi$, то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}$ :

$$\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta(\theta,\,\varphi)\Big)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta,\,\varphi)}{\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)} = \lambda.$$

Отсюда для $\mathbf{X}(r)$ получаем уравнение

$$r^2\mathbf{X}''(r) + 2r\mathbf{X}'(r) - \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{10.23}$$

а для функций $\mathbf{Y}$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta(\theta,\,\varphi)\Big)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}(\theta,\,\varphi) + \lambda\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi) = 0. \tag{10.24}$$

Если решение уравнения (10.24) искать в виде

$$\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi) = \mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi), \tag{10.25}$$

то получим

$$\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{\Theta}'(\theta)\Big)'\mathbf{\Phi}(\varphi) + \frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}''(\varphi) + \lambda\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi) = 0.$$

Поделим это равенство на $\frac{\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi)}{\sin^2\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\Big(\sin\theta\mathbf{\Theta}'(\theta)\Big)'}{\mathbf{\Theta}(\theta)} + \lambda\sin^2\theta = -\frac{\mathbf{\Phi}''(\varphi)}{\mathbf{\Phi}(\varphi)}.$$

Слева стоит функция, зависящая только от $\theta$, а справа – только от $\varphi$, поэтому $\exists\mu \in \mathbb{R}:$

$$\sin\theta\Big(\sin\theta\mathbf{\Theta}'(\theta)\Big)' + \big(\lambda\sin^2\theta - \mu\big)\,\mathbf{\Theta}(\theta) = 0, \tag{10.26}$$

$$\mathbf{\Phi}''(\varphi) + \mu\mathbf{\Phi}(\varphi) = 0 \tag{10.27}$$

Уравнение (10.27) необходимо дополнить условием периодичности, поскольку функция $U(r,\,\theta,\,\varphi)$, а следовательно и функция $\mathbf{\Phi}$ должна быть непрерывной. Тогда для $\mathbf{\Phi}(\varphi)$ получаем задачу:

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}''(\varphi) + \mu\mathbf{\Phi}(\varphi) = 0, \\ \mathbf{\Phi}(\varphi + 2\pi) = \mathbf{\Phi}(\varphi). \end{cases} \tag{10.28}$$

Решим эту задачу. Общим решением уравнения $\mathbf{\Phi}''(\varphi) + \mu\mathbf{\Phi}(\varphi) = 0$ является функция

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1\,\mathrm{sh}\,(\beta\varphi) + c_2\,\mathrm{ch}\,(\beta\varphi) & \text{при} \quad \mu = -\beta^2 < 0; \\ \mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1 + c_2\varphi & \text{при} \quad \mu = 0; \\ \mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1\sin(\beta\varphi) + c_2\cos(\beta\varphi) & \text{при} \quad \mu = \beta^2 > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции $c_1\,\mathrm{sh}\,(\beta\varphi) + c_2\,\mathrm{ch}\,(\beta\varphi)$ ни при каких $c_{1,\,2}$ (кроме $c_1 = c_2 = 0$) не удовлетворяют условию периодичности $\mathbf{\Phi}(\varphi + 2\pi) = \mathbf{\Phi}(\varphi)$. В свою очередь, функции $c_1 + c_2\varphi$ удовлетворяют условию периодичности только при $c_2 = 0$.
В то же время функция $c_1\sin(\beta\varphi) + c_2\cos(\beta\varphi)$ удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда

$$\mu = \beta^2 = m^2, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Мы будем рассматривать только $m \geqslant 0$, так как отрицательные значения $m$ не дают новых $\mu$ или $\mathbf{\Phi}(\varphi)$. А разрешая числу $m$ принимать значение $m = 0$, мы включаем функцию $\mathbf{\Phi}(\varphi) = \mathrm{const}$ (являющуюся нетривиальным решением при $\lambda = 0$) в общую формулу нетривиальных решений (10.29).

Итак, функция (10.25) есть решение (10.24), то есть является сферической функцией тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1 \sin(m\varphi) + c_2 \cos(m\varphi), \qquad m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{10.29}$$

а функция $\mathbf{\Theta}(\theta)$ есть решение уравнения

$$\sin\theta \left(\sin\theta \mathbf{\Theta}'(\theta)\right)' + \left(\lambda \sin^2\theta - m^2\right) \mathbf{\Theta}(\theta) = 0. \tag{10.30}$$

В уравнении (10.30) сделаем замену переменой $x = \cos\theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos\theta) \equiv \mathbf{\Theta}(\theta)$$

получаем

$$\mathbf{\Theta}'(\theta) = -\sin\theta P'(\cos\theta), \qquad \mathbf{\Theta}''(\theta) = \sin^2\theta P''(\cos\theta) - \cos\theta P'(\cos\theta),$$

и уравнение (10.30) примет вид:

$$\sin^4\theta P''(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) + \left(\lambda\sin^2\theta - m^2\right) P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2\theta$, и учтем, что

$$\cos\theta = x, \qquad \sin^2\theta = 1 - x^2 :$$

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (10.15), с. 243. Поэтому по теореме 10.5, с. 243, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\lambda = n(n+1), \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots; \tag{10.31}$$

$$P(x) = P_n^m(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \qquad m = \overline{0,\, n}. \tag{10.32}$$

Поэтому все нетривиальные решения уравнения (10.30) имеют вид

$$\mathbf{\Theta}_{mn}(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \qquad n = \overline{0,\, \infty}, \quad m = \overline{0,\, n}. \tag{10.33}$$

Наконец, с учетом (10.29), получаем, что:

Функция

$$U(r,\, \theta,\, \varphi) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta,\, \varphi)$$

есть решение уравнения Лапласа тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{X}(r)$ есть решение уравнения

$$r^2\mathbf{X}''(r) + 2r\mathbf{X}'(r) - \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{10.23}$$

при $\lambda = n(n+1)$, $\;n = \overline{0,\, \infty}$, а функция $\mathbf{Y}(\theta,\, \varphi)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\theta,\, \varphi) = \mathbf{Y}_{mn}(\theta,\, \varphi) = P_n^m(\cos\theta)\left(c_1\sin(m\varphi) + c_2\cos(m\varphi)\right),$$
$$n = \overline{0,\, \infty}, \quad m = \overline{0,\, n}. \tag{10.34}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение уравнения** (10.23)
Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей $r$ при всех производных функции $\mathbf{X}(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad \mathbf{X}(r) = \mathbf{X}\left(e^t\right) = y(t), \qquad r\mathbf{X}'(r) = y'(t), \qquad r^2\mathbf{X}''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0,\, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0,\, \infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \ \ n = \overline{0,\, \infty}.$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\varkappa^2 + \varkappa - n(n+1) = 0.$$

Его корни:

$$\varkappa_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 + (2n+1)}{2} = n,$$

$$\varkappa_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 - (2n+1)}{2} = -n - 1$$

и общее решение

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (10.23) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то когда уравнение решается:

- в шаре, содержащем начало координат, $B = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = r^n, \qquad n = \overline{0,\, \infty}, \tag{10.35}$$

- во внешности шара, содержащего начало координат, $A = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = \frac{1}{r^{n+1}}, \qquad n = \overline{0,\, \infty}, \tag{10.36}$$

- в шаровом слое с центром в начале координат, $A,\, B \neq 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}, \qquad n = \overline{0,\, \infty}. \tag{10.37}$$

**<u>Шаг 3.</u> Общее решение уравнения Лапласа в шаре**
Нам осталось составить из полученных функций $\mathbf{X}_n$ (из равенства (10.35)), а также $\mathbf{Y}_{mn}(\theta,\, \varphi)$, $n = \overline{0,\, \infty}$, $m = \overline{0,\, n}$ ряд. Поскольку $m$ меняется в пределах от 0 до $n$ при каждом $n$, и только $n$ меняется от 0 до $\infty$, то ряд можно составить только по $n$. Зато внутри ряда по $n$ придется ставить

конечную сумму по $m$, формируя линейную комбинацию всех сферических гармоник степени $n$:
__**Ответ:**__

$$u(r,\,\theta,\,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{X}_n(r)\sum_{m=0}^{n}\mathbf{Y}_{mn}(\theta,\,\varphi)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)\Big(A_{mn}\cos{(m\varphi)}+B_{mn}\sin{(m\varphi)}\Big)\,. \quad (10.38)$$

__**Шаг 4.**__ **Общее решение уравнения Лапласа вне шара**
Составим из полученных функций $\mathbf{X}_n$ (из равенства (10.36)), а также $\mathbf{Y}_{mn}(\theta,\,\varphi)$, $n=\overline{0,\,\infty}$, $m=\overline{0,\,n}$ ряд. Здесь вся разница от задачи внутри шара состоит в том, что функции $\mathbf{X}_n(r)$ имеют вид (10.36), а не (10.35):
__**Ответ:**__

$$u(r,\,\theta,\,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{X}_n(r)\sum_{m=0}^{n}\mathbf{Y}_{mn}(\theta,\,\varphi)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)\Big(A_{mn}\cos{(m\varphi)}+B_{mn}\sin{(m\varphi)}\Big)\,. \quad (10.39)$$

__**Шаг 5.**__ **Общее решение уравнения Лапласа в шаровом слое**
Поскольку в шаровом слое $R_1<r<R_2$ ограниченными являются как функции (10.36), так и функции (10.35), ряд надо составлять из тех и других:
__**Ответ:**__

$$u(r,\,\theta,\,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)\Big(A_{mn}\cos{(m\varphi)}+B_{mn}\sin{(m\varphi)}\Big)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)\Big(C_{mn}\cos{(m\varphi)}+D_{mn}\sin{(m\varphi)}\Big)\,. \quad (10.40)$$

**№ 793 а).**

*Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри шара радиуса $R$.*

Математически это означает задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\theta,\varphi)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(0,\theta,\varphi)| < \infty, \\ u(R,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi). \end{cases} \tag{10.41}$$

<u>**Шаг 1.**</u> **Решение уравнения Лапласа в шаре**
Уравнения Лапласа в шаре мы уже решили в разделе 10.3 и получили формулу

$$\begin{aligned} u(r,\theta,\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{X}_n(r)\sum_{m=0}^{n}\mathbf{Y}_{mn}(\theta,\varphi) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)\left(A_{mn}\cos(m\varphi) + B_{mn}\sin(m\varphi)\right). \end{aligned} \tag{10.38}$$

<u>**Шаг 2.**</u> **Использование краевого условия**
В нашей задаче добавилось краевое условие

$$u(R,\theta,\varphi) = f(\theta,\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты $A_{mn}$ и $B_{mn}$ в формуле (10.38). По теореме 10.7, с. 244,
*$f(\theta,\varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$\begin{aligned} f(\theta,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[ & \frac{\alpha_{k0}}{2}P_k(\cos\theta) + \\ & + \sum_{m=1}^{k} P_k^m(\cos\theta)\left(\alpha_{km}\cos(m\varphi) + \beta_{km}\sin(m\varphi)\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{10.19}$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \cos(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} f(\theta,\, \varphi)\, P_k^m\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.20}$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \sin(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} f(\theta,\, \varphi)\, P_k^m\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.20}$$

*При этом ряд* (10.19) *сходится к* $f(\theta,\, \varphi)$ ***абсолютно и равномерно*** *на* $\theta \in [0,\, \pi],\ \varphi \in [0,\, 2\pi]$.
Приравняем ряд (10.38), взятый при $r = R$, к ряду (10.19):

$$u(R,\, \theta,\, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left( A_{mn} \cos{(m\varphi)} + B_{mn} \sin{(m\varphi)} \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left( \alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi) \right) \right] = f.$$

Получаем при $m = 0$

$$R^n P_n(\cos\theta) \left( A_{0n} \overbrace{\cos{(0)}}^{=1} + B_{0n} \overbrace{\sin{(0)}}^{=0} \right) = \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta),$$

откуда

$$A_{0n} = \frac{\alpha_{n0}}{2R^n}, \qquad B_{0n} \ - \ \text{произвольно}, \qquad n = \overline{0,\, \infty}. \tag{10.42}$$

Аналогично, при $m \in \mathbb{N}$

$$R^n P_n^m(\cos\theta) \left( A_{mn} \cos{(m\varphi)} + B_{mn} \sin{(m\varphi)} \right) =$$
$$= P_n^m(\cos\theta) \left( \alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi) \right),$$

откуда, в силу линейной независимости функций $\sin{(m\varphi)}$ и $\cos{(m\varphi)}$,

$$A_{mn} = \frac{\alpha_{nm}}{R^n}, \qquad B_{mn} = \frac{\beta_{nm}}{R^n}, \qquad n = \overline{0,\, \infty}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{10.43}$$

**Ответ:**

$$u(r,\, \theta,\, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \left[ \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left( \alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi) \right) \right], \tag{10.44}$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2), а коэффициенты $\alpha_{nm}$ и $\beta_{nm}$ определяются из формул (10.20) – (10.21).

### 10.5. Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

**№ 793 б).**

*Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне шара радиуса $R$.*

Математически это означает задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta,\,\varphi)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \;\; 0 < \theta < \pi, \;\; 0 < \varphi < 2\pi; \\ |u(\infty,\,\theta,\,\varphi)| < \infty, \\ u(R,\,\theta,\,\varphi) = f(\theta,\,\varphi). \end{cases} \tag{10.45}$$

**Шаг 1.** **Решение уравнения Лапласа в шаре**
Уравнения Лапласа в шаре мы уже решили в разделе 10.3 и получили формулу

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{X}_n(r)\sum_{m=0}^{n}\mathbf{Y}_{mn}(\theta,\,\varphi) = $$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(A_{mn}\cos\left(m\varphi\right) + B_{mn}\sin\left(m\varphi\right)\right). \tag{10.39}$$

**Шаг 2.** **Использование краевого условия**
В нашей задаче добавилось краевое условие

$$u(R,\,\theta,\,\varphi) = f(\theta,\,\varphi).$$

Оно позволит нам найти коэффициенты $A_{mn}$ и $B_{mn}$ в формуле (10.38). По теореме 10.7, с. 244,
*$f(\theta,\,\varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$f(\theta,\,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg[\frac{\alpha_{k0}}{2}P_k(\cos\theta) + $$
$$+ \sum_{m=1}^{k}P_k^m(\cos\theta)\left(\alpha_{km}\cos(m\varphi) + \beta_{km}\sin(m\varphi)\right)\Bigg], \tag{10.19}$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \cos(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} f(\theta,\, \varphi) \, P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.20}$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \sin(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} f(\theta,\, \varphi) \, P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.21}$$

*При этом ряд* (10.19) *сходится к* $f(\theta,\, \varphi)$ ***абсолютно и равномерно*** *на* $\theta \in [0,\, \pi],\ \varphi \in [0,\, 2\pi]$.
Приравняем ряд (10.38), взятый при $r = R$, к ряду (10.19):

$$u(R,\, \theta,\, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left( A_{mn} \cos{(m\varphi)} + B_{mn} \sin{(m\varphi)} \right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left( \alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi) \right) \right] = f.$$

Получаем при $m = 0$

$$\frac{1}{R^{n+1}} P_n(\cos\theta) \left( A_{0n} \overbrace{\cos{(0)}}^{=1} + B_{0n} \overbrace{\sin{(0)}}^{=0} \right) = \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta),$$

откуда

$$A_{0n} = \frac{\alpha_{n0}}{2} R^{n+1}, \qquad B_{0n} - \text{ произвольно}, \qquad n = \overline{0,\, \infty}. \tag{10.46}$$

Аналогично, при $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{R^{n+1}} P_n^m(\cos\theta) \left( A_{mn} \cos{(m\varphi)} + B_{mn} \sin{(m\varphi)} \right) =$$
$$= P_n^m(\cos\theta) \left( \alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi) \right),$$

откуда, в силу линейной независимости функций $\sin{(m\varphi)}$ и $\cos{(m\varphi)}$,

$$A_{mn} = \alpha_{nm} R^{n+1}, \qquad B_{mn} = \beta_{nm} R^{n+1}, \qquad n = \overline{0,\, \infty}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{10.47}$$

**Ответ:**

$$u(r,\, \theta,\, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[ \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left( \alpha_{nm} \cos(m\varphi) + \beta_{nm} \sin(m\varphi) \right) \right], \tag{10.48}$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2), а коэффициенты $\alpha_{nm}$ и $\beta_{nm}$ определяются из формул (10.20) – (10.21).

### 10.6. Примеры решения задач

#### № 788 а).

*Определить стационарное распределение температуры $u(r,\,\theta)$ в однородном шаре радиуса $R$ для случая, когда поверхность шара имеет температуру:*

$$u(R,\,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leqslant \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leqslant \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leqslant \pi. \end{cases} \end{cases} \tag{10.49}$$

Повторим с необходимыми упрощениями, вызванными тем, что в нашем случае искомое решение не зависит от $\varphi$, шаги 1 – 3 раздела 10.3.

**<u>Шаг 1.</u> Поиск сферических гармоник, не зависящих от $\varphi$**

Пусть функция

$$U(r,\,\theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть решение уравнения

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta = 0. \tag{10.50}$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'\mathbf{Y}(\theta) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)'\mathbf{X}(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$ и умножим на $r^2$:

$$\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} = -\,\frac{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)_\theta}{\mathbf{Y}(\theta)}.$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от $r$, а справа – функция, зависящая только от $\theta$, то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} = -\,\frac{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)'}{\mathbf{Y}(\theta)} = \lambda.$$

Отсюда для $\mathbf{X}(r)$ получаем уравнение

$$r^2\mathbf{X}''(r) + 2r\mathbf{X}'(r) - \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{10.51}$$

а для функций $\mathbf{Y}$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)' + \lambda\mathbf{Y}(\theta) = 0.$$

Домножим на $\sin^2\theta$:

$$\sin^2\theta\mathbf{Y}''(\theta) + \sin\theta\cos\theta\mathbf{Y}'(\theta) + \lambda\sin^2\theta\mathbf{Y}(\theta) = 0. \tag{10.52}$$

В уравнении (10.52) сделаем замену переменой $x = \cos\theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos\theta) \equiv \mathbf{Y}(\theta)$$

получаем

$$\mathbf{Y}'(\theta) = -\sin\theta P'(\cos\theta), \qquad \mathbf{Y}''(\theta) = \sin^2\theta P''(\cos\theta) - \cos\theta P'(\cos\theta),$$

и уравнение (10.52) примет вид:

$$\sin^4\theta P''(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) + \lambda\sin^2\theta P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2\theta$, и учтем, что

$$\cos\theta = x, \qquad \sin^2\theta = 1 - x^2 :$$

$$(1 - x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (10.1), с. 241. Поэтому по теореме 10.1, с. 242, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\lambda = n(n+1), \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \dots\,; \tag{10.53}$$

$$P(x) = P_n(x) \ - \text{ полиномы Лежандра.} \tag{10.54}$$

Поэтому все нетривиальные ограниченные решения уравнения (10.52) имеют вид

$$\mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \qquad n = \overline{0,\,\infty}. \tag{10.55}$$

Итак, с учетом (10.51), получаем, что:

Функция

$$U(r,\,\theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть независящее от $\varphi$ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (10.50) тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{X}(r)$ есть решение уравнения

$$r^2\mathbf{X}''(r) + 2r\mathbf{X}'(r) - \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{10.51}$$

при $\lambda = n(n+1)$, $\ n = \overline{0,\,\infty}$, а функция $\mathbf{Y}(\theta)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\theta) = \mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \qquad n = \overline{0,\,\infty}. \tag{10.56}$$

**<u>Шаг 2.</u> Решение уравнения** (10.51)
Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей $r$ при всех производных функции $\mathbf{X}(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad \mathbf{X}(r) = \mathbf{X}\left(e^t\right) = y(t), \qquad r\mathbf{X}'(r) = y'(t), \qquad r^2\mathbf{X}''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0,\, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0,\, \infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \quad n = \overline{0,\, \infty}.$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\varkappa^2 + \varkappa - n(n+1) = 0.$$

Его корни:

$$\varkappa_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 + (2n+1)}{2} = n,$$

$$\varkappa_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 - (2n+1)}{2} = -n - 1$$

и общее решение

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (10.51) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то $B = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = r^n, \qquad n = \overline{0,\, \infty}. \tag{10.57}$$

Составив из полученных функций ряд, получим что независящее от $\varphi$ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (10.50) имеет вид:

$$u(r,\, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad A_n \in \mathbb{R}. \tag{10.58}$$

**<u>Шаг 3.</u> Использование краевого условия**
Для нахождения коэффициентов $A_n$ используем краевое условие

$$u(R, \theta) = f(\theta).$$

По теореме 10.7, с. 244,
*$f(\theta,\, \varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$g(\theta,\, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos\theta) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{k} P_k^m(\cos\theta) \left(\alpha_{km}\cos(m\varphi) + \beta_{km}\sin(m\varphi)\right) \right], \tag{10.19}$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \cos(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} g(\theta,\, \varphi)\, P_k^m\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.20}$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \sin(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} g(\theta,\, \varphi)\, P_k^m\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.21}$$

*При этом ряд* (10.19) *сходится к* $f(\theta,\, \varphi)$ ***абсолютно и равномерно*** *на* $\theta \in [0,\, \pi],\ \varphi \in [0,\, 2\pi]$.
Поскольку в нашем случае функция $f(\theta)$ не зависит от $\varphi$, то

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k^m\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta \cdot \overbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi}^{=0} = 0, \qquad m \neq 0,$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$
$$\times \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k^m\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta \cdot \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi}_{=0} = 0.$$

Найдем $\alpha_{k0}$:

$$\alpha_{k0} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{k!}{k!} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta \cdot \overbrace{\int\limits_0^{2\pi}}^{=2\pi} d\varphi =$$
$$= (2k+1) \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k\,(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

Приравнивая ряды

$$u(R,\, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^n P_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos\theta) = f(\theta),$$

видим, что они равны, если

$$A_n = \frac{\alpha_{n0}}{2R^n} = \frac{2n+1}{2R^n} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta.$$

**<u>Ответ в общем виде:</u>**

$$u(r,\, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{10.59}$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta. \tag{10.60}$$

Нам осталось вычислить $A_n$ в данном конкретном случае, когда

$$f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leqslant \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^{\alpha} T_1 P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta = \Big[x = \cos\theta\Big] = -T_1 \int\limits_1^{\cos\alpha} P_n\left(x\right) dx =$$

$$= \Big[\text{по формуле (10.6)} \quad (2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \;\; n \geqslant 1\Big] =$$

$$= \frac{T_1}{2n+1} \int\limits_{\cos\alpha}^{1} \left(P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right) dx =$$

$$= \frac{T_1}{2n+1} \left(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right) \Bigg|_{x=\cos\alpha}^{x=1} = \Big[\text{по формуле (10.8)} \quad P_n(1) = 1\Big] =$$

$$= \frac{T_1}{2n+1} \left(P_{n-1}(\cos\alpha) - P_{n+1}(\cos\alpha)\right), \qquad n \geqslant 1;$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\pi} T_2 P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta = \Big[\text{аналогично}\Big] =$$

$$= \frac{T_2}{2n+1} \left(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)\right) \Bigg|_{x=-1}^{x=\cos\alpha} =$$

$$= \Big[\text{по формуле (10.8)} \quad P_n(-1) = (-1)^n, \;\; n \geqslant 1\Big] =$$

$$= \frac{T_2}{2n+1} \left(P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)\right), \qquad n \geqslant 1;$$

$$\int_0^\alpha T_1 P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \Big[P_0(x) \equiv 1\Big] =$$

$$= T_1 \int_0^\alpha \sin\theta d\theta = -T_1\cos\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\alpha} = T_1(1-\cos\alpha), \qquad n = 0;$$

$$\int_\alpha^\pi T_2 P_0(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \Big[P_0(x) \equiv 1\Big] =$$

$$= T_2 \int_\alpha^\pi \sin\theta d\theta = -T_2\cos\theta\Big|_{\theta=\alpha}^{\theta=\pi} = T_2(1+\cos\alpha), \qquad n = 0,$$

получаем

$$A_n = \frac{2n+1}{2R^n}\int_0^\pi f(\theta)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} \frac{2n+1}{2R^n}\cdot\frac{T_2-T_1}{2n+1}\left(P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)\right), & \text{при} \quad n \geqslant 1; \\ \frac{1}{2}\cdot\left(T_1 + T_2 + (T_2 - T_1)\cos(\alpha)\right), & \text{при} \quad n = 0. \end{cases}$$

**Ответ:**

$$u(r,\,\theta) = \frac{T_1 + T_2 + (T_2 - T_1)\cos(\alpha)}{2} +$$

$$+ \frac{T_2 - T_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

### № 788 б).

*Определить стационарное распределение температуры $u(r,\,\theta)$ в однородном шаре радиуса $R$ для случая, когда шар нагревается плоскопараллельным потоком тепла плотности $q$, падающим на его поверхность сверху, и отдает тепло со всей своей поверхности в окружающую среду в результате конвективного теплообмена. Температура среды равна $T$.*

Записав эти условия математически, получим задачу:

*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u_r(R,\,\theta) + hu(R,\,\theta) = f_1(\theta) = \begin{cases} \frac{q}{k}\cos\theta + hT, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}; \\ hT, & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi. \end{cases} \end{cases} \tag{10.61}$$

**<u>Шаг 0.</u> Вид решения и упрощение краевого условия**

Легко убрать в краевом условии выражение $hT$, если искать решение задачи (10.61) в виде

$$u(r,\,\theta) = T + v(r,\,\theta). \tag{10.62}$$

Тогда $v(r,\,\theta)$ есть, очевидно, решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 v_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta v_\theta\Big)_\theta = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \qquad 0 < \theta < \pi; \\ |v(0,\,\theta)| < \infty, \\ v_r(R,\,\theta) + hv(R,\,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} \frac{q}{k}\cos\theta, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi. \end{cases} \end{cases} \tag{10.63}$$

Повторим дословно шаги 1 – 2 номера № 788 а).

**<u>Шаг 1.</u> Поиск сферических гармоник, не зависящих от $\varphi$**

Пусть функция

$$U(r,\,\theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть решение уравнения

$$\Delta v \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 v_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta v_\theta\Big)_\theta = 0. \tag{10.64}$$

Тогда

$$\frac{1}{r^2}\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'\mathbf{Y}(\theta) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)'\mathbf{X}(r) = 0.$$

Поделим это равенство на $\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$ и умножим на $r^2$:

$$\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} = -\,\frac{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)_\theta}{\mathbf{Y}(\theta)}.$$

Так как слева стоит функция, зависящая только от $r$, а справа – функция, зависящая только от $\theta$, то равны они друг другу могут быть только в случае, когда они – константы. Точнее, $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} = -\,\frac{\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)'}{\mathbf{Y}(\theta)} = \lambda.$$

Отсюда для $\mathbf{X}(r)$ получаем уравнение

$$r^2\mathbf{X}''(r) + 2r\mathbf{X}'(r) - \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{10.65}$$

а для функций $\mathbf{Y}$ – уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\Big(\sin\theta\mathbf{Y}'(\theta)\Big)' + \lambda\mathbf{Y}(\theta) = 0.$$

Домножим на $\sin^2\theta$:

$$\sin^2\theta\mathbf{Y}''(\theta) + \sin\theta\cos\theta\mathbf{Y}'(\theta) + \lambda\sin^2\theta\mathbf{Y}(\theta) = 0. \tag{10.66}$$

В уравнении (10.66) сделаем замену переменой $x = \cos\theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos\theta) \equiv \mathbf{Y}(\theta)$$

получаем

$$\mathbf{Y}'(\theta) = -\sin\theta P'(\cos\theta), \qquad \mathbf{Y}''(\theta) = \sin^2\theta P''(\cos\theta) - \cos\theta P'(\cos\theta),$$

и уравнение (10.66) примет вид:

$$\sin^4\theta P''(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) + \lambda\sin^2\theta P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2\theta$, и учтем, что

$$\cos\theta = x, \qquad \sin^2\theta = 1 - x^2 :$$

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \lambda P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (10.1), с. 241. Поэтому по теореме 10.1, с. 242, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\lambda = n(n+1), \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\, ; \tag{10.67}$$

$$P(x) = P_n(x) \ - \ \text{полиномы Лежандра.} \tag{10.68}$$

Поэтому все нетривиальные ограниченные решения уравнения (10.66) имеют вид

$$\mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \qquad n = \overline{0,\, \infty}. \tag{10.69}$$

Итак, с учетом (10.65), получаем, что:

Функция

$$U(r,\, \theta) = \mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta)$$

есть независящее от $\varphi$ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (10.64) тогда и только тогда, когда функция $\mathbf{X}(r)$ есть решение уравнения

$$r^2\mathbf{X}''(r) + 2r\mathbf{X}'(r) - \lambda\mathbf{X}(r) = 0, \tag{10.65}$$

при $\lambda = n(n+1)$, $n = \overline{0,\, \infty}$, а функция $\mathbf{Y}(\theta)$ имеет вид

$$\mathbf{Y}(\theta) = \mathbf{Y}_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \qquad n = \overline{0,\, \infty}. \tag{10.70}$$

**Шаг 2. Решение уравнения** (10.65)

Данное уравнение есть уравнение Эйлера, поскольку степень множителей $r$ при всех производных функции $\mathbf{X}(r)$ равна порядку этих производных. Эти уравнения решаются при помощи замены

$$r = e^t, \quad \mathbf{X}(r) = \mathbf{X}\left(e^t\right) = y(t), \quad r\mathbf{X}'(r) = y'(t), \quad r^2\mathbf{X}''(r) = y''(t) - y'(t).$$

Нам не надо рассматривать случай $r = -e^t < 0$, поскольку в нашей задаче $r \in (0,\, R)$. Для новой функции $y(t)$ при $\lambda = n(n+1)$, $\; n = \overline{0,\,\infty}$ получаем уравнение

$$y''(t) + y'(t) - n(n+1)y(t) = 0, \quad n = \overline{0,\,\infty}.$$

Характеристическое уравнение для него имеет вид

$$\varkappa^2 + \varkappa - n(n+1) = 0.$$

Его корни:

$$\varkappa_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 + (2n+1)}{2} = n,$$

$$\varkappa_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4n^2 + 4n}}{2} = \frac{-1 - (2n+1)}{2} = -n - 1$$

и общее решение

$$y(t) = Ae^{nt} + Be^{-(n+1)t}.$$

Отсюда, так как $e^t = r$, общее решение уравнения (10.65) имеет вид

$$\mathbf{X}(r) = Ar^n + Br^{-(n+1)}.$$

Ну а поскольку нас интересуют только ограниченные решения, то $B = 0$ и

$$\mathbf{X}_n(r) = r^n, \qquad n = \overline{0,\,\infty}. \tag{10.71}$$

Составив из полученных функций ряд, получим что независящее от $\varphi$ ограниченное нетривиальное решение уравнения Лапласа (10.64) имеет вид:

$$v(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r) \mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \qquad A_n \in \mathbb{R}. \tag{10.72}$$

**Шаг 3. Использование краевого условия**

Для нахождения коэффициентов $A_n$ используем краевое условие

$$v_r(R, \theta) + hv(R, \theta) = f(\theta).$$

По теореме 10.7, с. 244,
*$f(\theta,\,\varphi)$ разлагается в следующий ряд Фурье*

$$g(\theta,\,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_{k0}}{2} P_k(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{k} P_k^m(\cos\theta) \left(\alpha_{km} \cos(m\varphi) + \beta_{km} \sin(m\varphi)\right) \right], \tag{10.19}$$

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \cos(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} g(\theta,\, \varphi)\, P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.20}$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \, \sin(m\varphi) \int\limits_0^{\pi} g(\theta,\, \varphi)\, P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \tag{10.21}$$

*При этом ряд* (10.19) *сходится к* $f(\theta,\, \varphi)$ ***абсолютно и равномерно*** *на* $\theta \in [0,\, \pi],\ \varphi \in [0,\, 2\pi]$.
Поскольку в нашем случае функция $f(\theta)$ не зависит от $\varphi$, то

$$\alpha_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \ \cdot \ \overbrace{\int\limits_0^{2\pi} \cos(m\varphi) d\varphi}^{=0} = 0, \qquad m \neq 0,$$

$$\beta_{km} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \times$$

$$\times \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta \ \cdot \ \underbrace{\int\limits_0^{2\pi} \sin(m\varphi) d\varphi}_{=0} = 0.$$

Найдем $\alpha_{k0}$:

$$\alpha_{k0} = \frac{2k+1}{2\pi} \cdot \frac{k!}{k!} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k(\cos\theta) \sin\theta d\theta \ \cdot \ \overbrace{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi}^{=2\pi} =$$

$$= (2k+1) \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_k(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

Приравнивая ряды

$$v_r(R,\theta) + hv(R,\theta) = hA_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{R}+h\right)A_n R^n P_n(\cos\theta) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_{k0}}{2}P_k(\cos\theta) = f(\theta),$$

видим, что они равны, если при всех $n = \overline{0,\,\infty}$

$$A_n = \frac{\alpha_{n0}}{2\,(n+hR)\,R^{n-1}} = \frac{2n+1}{2\,(n+hR)\,R^{n-1}}\int\limits_0^{\pi} f(\theta)\,P_n\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

**Ответ в общем виде:**

$$v(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r)\mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{10.73}$$

$$A_n = \frac{2n+1}{2\,(n+hR)\,R^{n-1}}\int\limits_0^{\pi} f(\theta)\,P_n\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta. \tag{10.74}$$

Нам осталось вычислить $A_n$ в данном конкретном случае, когда

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{q}{k}\cos\theta, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Поскольку

$$\int P_n\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \Big[x = \cos\theta\Big] = -\int P_n\,(x)\,dx =$$
$$= \Big[\text{по формуле (10.6)} \quad (2n+1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \;\; n \geqslant 1\Big] =$$
$$= -\,\frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1} + c, \qquad n \geqslant 1, \tag{10.75}$$

то при $n \geqslant 2$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta P_n\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \Big[x = \cos\theta\Big] = \int\limits_0^{1} xP_n\,(x)\,dx = \Big[\text{по частям}\Big] =$$

$$= -\,\frac{x\,(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))}{2n+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{2n+1}\int\limits_0^{1}(P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x))\,dx =$$

$$= \Big[\text{так как } P_n(1) = 1 \text{ и в силу (10.75) при } (n+1) \text{ и } (n-1)\Big] =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left(\frac{P_{n+2}(x) - P_n(x)}{2n+3} - \frac{P_n(x) - P_{n-2}(x)}{2n-1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}.$$

В силу равенства $P_n(1) = 1$ и формул (10.9):

$$P_{2m+1}(0) = 0, \qquad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m \geqslant 0 \tag{10.9}$$

получаем при $n = 2m+1, \;\; m \geqslant 0$:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta P_{2m+1}(\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{4m+3}\left(\frac{P_{2m+3}(x) - P_{2m+1}(x)}{4m+5} - \frac{P_{2m+1}(x) - P_{2m-1}(x)}{4m+1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = 0,$$

а при $n = 2m$, так как

$$P_{2m+2}(0) = -\frac{(2m+1)(2m+2)}{4(m+1)^2}\cdot P_{2m}(0) = -\frac{2m+1}{2(m+1)}\cdot P_{2m}(0), \tag{10.76}$$

$$P_{2m-2}(0) = -\frac{2m^2}{m(2m-1)}\cdot P_{2m}(0) = -\frac{2m}{2m-1}\cdot P_{2m}(0), \tag{10.77}$$

имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta P_{2m}(\cos\theta)\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{4m+1}\left(\frac{P_{2m+2}(x) - P_{2m}(x)}{4m+3} - \frac{P_{2m}(x) - P_{2m-2}(x)}{4m-1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$$

$$= -\frac{1}{4m+1}\left(\frac{P_{2m+2}(0) - P_{2m}(0)}{4m+3} - \frac{P_{2m}(0) - P_{2m-2}(0)}{4m-1}\right) =$$

$$= \Big[\text{в силу (10.76) и (10.77)}\Big] =$$

$$= -\frac{P_{2m}(0)}{4m+1}\left[\frac{1}{4m+3}\cdot\left(-\frac{2m+1}{2(m+1)} - 1\right) - \frac{1}{4m-1}\cdot\left(1 + \frac{2m}{2m-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{P_{2m}(0)}{4m+1}\left[\frac{1}{4m+3}\cdot\frac{4m+3}{2(m+1)} + \frac{1}{4m-1}\cdot\frac{4m-1}{2m-1}\right] =$$

$$= \frac{P_{2m}(0)}{4m+1}\left[\frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2m-1}\right] =$$

$$= \frac{P_{2m}(0)}{4m+1} \cdot \frac{4m+1}{2(m+1)(2m-1)} = \frac{P_{2m}(0)}{2(m+1)(2m-1)}.$$

Таким образом, при $n \geqslant 2$

$$A_n = \frac{2n+1}{2\left(n+hR\right)R^{n-1}} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{q}{k} \cdot \frac{2n+1}{2\left(n+hR\right)R^{n-1}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\, P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2m+1, \quad m \geqslant 1; \\ \frac{q}{k} \cdot \frac{4m+1}{2(2m+hR)R^{2m-1}} \cdot \frac{P_{2m}(0)}{2(m+1)(2m-1)}, & n = 2m, \quad m \geqslant 1. \end{cases}$$

Найдем теперь $A_0$ и $A_1$.

$$A_0 = \frac{1}{2h} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_0\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta = \frac{1}{2h} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{k} \cos\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= - \ \frac{q}{2hk} \cdot \frac{\cos^2\theta}{2}\bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{q}{4hk}.$$

$$A_1 = \frac{3}{2(1+hR)} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_1\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{3}{2(1+hR)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{k} \cos^2\theta \sin\theta d\theta == - \ \frac{3q}{2(1+hR)k} \cdot \frac{\cos^3\theta}{3}\bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{q}{2(1+hR)k}.$$

Итак,

$$A_n = \frac{2n+1}{2\left(n+hR\right)R^{n-1}} \int\limits_0^{\pi} f(\theta)\, P_n\left(\cos\theta\right) \sin\theta d\theta =$$

$$= \begin{cases} \frac{q}{4hk}, & n = 0; \\ \frac{q}{2(1+hR)k}, & n = 1; \\ 0, & n = 2m+1, \quad m \geqslant 1; \\ \frac{q}{k} \cdot \frac{4m+1}{2(2m+hR)R^{2m-1}} \cdot \frac{P_{2m}(0)}{2(m+1)(2m-1)}, & n = 2m, \quad m \geqslant 1. \end{cases}$$

Подставляя найденные $A_n$ в (10.73)

$$v(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r)\mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{10.73}$$

и вспоминая, что $u(r,\,\theta) = T + v(r,\,\theta)$, получаем
**Ответ:**

$$u(r,\,\theta) = T + \frac{q}{4hk} + \frac{q}{2(1+hR)k}\cdot r\cos\theta + \\ + \frac{qR}{2k}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(4m+1)P_{2m}(0)}{(2m+hR)\,(2m-1)(2m+2)}\left(\frac{r}{R}\right)^{2m} P_{2m}(\cos\theta),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

**№ 788 д).**

*Определить стационарное распределение температуры $u(r,\,\theta)$ в однородном шаре радиуса $R$ для случая, когда в шаре происходит объемное тепловыделение с плотностью $Q$, а на поверхности – конвективный теплообмен по закону*

$$u_r(R,\,\theta) + hu(R,\,\theta) = f_1(\theta) = T + \cos\theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u + \frac{Q}{k} \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta\, u_\theta\right)_\theta + \frac{Q}{k} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u_r(R,\,\theta) + hu(R,\,\theta) = f_1(\theta) = T + \cos\theta. \end{cases} \tag{10.78}$$

**<u>Шаг 0.</u> Вид решения и избавление от неоднородности в уравнении**

Попробуем убрать неоднородность в уравнении, представив решение задачи (10.78) в виде

$$u(r,\,\theta) = w(r) + v(r,\,\theta) = Ar^2 + B + v(r,\,\theta), \tag{10.79}$$

где $w(r) = Ar^2 + B$ есть решение задачи

$$\Delta w + \frac{Q}{k} \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 w'\right)' + \frac{Q}{k} = 0 w'(R) + hw(R) = T. \tag{10.80}$$

Для $w(r) = Ar^2 + B$ уравнение (10.80) означает:

$$2A + \frac{2}{r}\cdot 2Ar = -\,\frac{Q}{k}, \qquad \Longrightarrow \qquad A = -\,\frac{Q}{6k}.$$

Тогда
$$w(r) = -\,\frac{Q}{6k}\,r^2 + B.$$
Найдем константу $B$ из краевого условия $w'(R) + hw(R) = T$:
$$-\,\frac{Q}{3k}\,R - \,\frac{Qh}{6k}\,R^2 + Bh = T \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{Q}{6k}\,R^2 + \frac{Q}{3kh}\,R + \frac{T}{h}$$
Таким образом,
$$w(r) = \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{Q}{3kh}\,R + \frac{T}{h},$$
откуда
$$u(r,\,\theta) = \frac{Q}{6k}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{Q}{3kh}\,R + \frac{T}{h} + v(r,\,\theta), \tag{10.81}$$
где $v(r,\,\theta)$ есть решение следующей задачи:
$$\begin{cases} \Delta v \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 v_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta v_\theta\Big)_\theta = 0, \quad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |v(0,\,\theta)| < \infty, \\ v_r(R,\,\theta) + hv(R,\,\theta) = f(\theta) = \cos\theta. \end{cases} \tag{10.82}$$
**Шаг 1. Решение задачи** (10.82)
Эту задачу мы уже решили в № 788 б) (с. 259). Воспользуемся результатом.
**Ответ в общем виде:**
$$v(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \mathbf{X}_n(r)\mathbf{Y}_n(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta), \tag{10.83}$$
$$A_n = \frac{2n+1}{2\,(n+hR)\,R^{n-1}}\int_0^\pi f(\theta)\,P_n\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \qquad n = \overline{0,\,\infty}. \tag{10.84}$$
Нам осталось вычислить $A_n$ в данном конкретном случае, когда
$$f(\theta) = \cos\theta.$$
И здесь **важно заметить**, что функция $f(\theta) \equiv P_1(\cos\theta)$, а полиномы $P_n(x)$ друг другу ортогональны (теорема 10.3), поэтому
$$A_n = 0 \qquad n \neq 1. \tag{10.85}$$
Осталось найти
$$A_1 = \frac{3}{2\,(1+hR)}\int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta d\theta = \frac{3}{2\,(1+hR)}\cdot\left(-\,\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\pi} =$$
$$= \frac{3}{2\,(1+hR)}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{1+hR}.$$

Таким образом, для $v(r,\,\theta)$ от всего ряда (10.83) осталось только одно слагаемое:

$$v(r,\,\theta) = A_1 r P_1(\cos\theta) \equiv \frac{r\cos\theta}{1+hR}.$$

Вспоминая, что

$$u(r,\,\theta) = \frac{Q}{6k}\left(R^2-r^2\right) + \frac{Q}{3kh}\,R + \frac{T}{h} + v(r,\,\theta), \tag{10.81}$$

получаем

<u>**Ответ:**</u>

$$u(r,\,\theta) = \frac{Q}{6k}\left(R^2-r^2\right) + \frac{Q}{3kh}\,R + \frac{T}{h} + \frac{r\cos\theta}{1+hR}.$$

**№ 789.**

*Определить стационарное распределение температуры $u(r,\,\theta)$ в теле, имеющем форму половины шара радиуса $R$, если сферическая часть его границы имеет температуру $T$, а плоское сонование – нулевую.*

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta\, u_\theta\Big)_\theta = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f_1(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \theta = \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{cases} \tag{10.86}$$

## <u>Шаг 0.</u> Сведение к задаче в шаре

Поскольку существенная для нашего решения теорема 10.7, с. 244, о разложений функций в ряд по сферическим гармоникам работает в шаре, а у нас в данной задаче – полушарие, надо попытаться свести задачу к аналогичной задаче в шаре.

Это несложно сделать, если вспомнить, как в подобной ситуации мы поступали с уравнениями теплопроводности и колебаний на полупрямой, когда **методом продолжений** доопределяли функции начальных условий на левую полупрямую:
нечетным образом, если краевое условие было I-го рода $u(0,\,t) = 0$, и четным образом, если краевое условие было II-го рода $u_x(0,\,t) = 0$.

В нашей задаче температура основания равна нулю, поэтому по аналогии с первым случаем из метода продолжений, **будем искать функцию** $u(r,\,\theta)$ **как решение следующей задачи в шаре:**[1]

[1]Этот подход является весьма естественным и с физической точки зрения: поскольку нас интересует стационарное распределение температуры, то есть состояние, в котором шар окажется, когда все тепловые процессы перестанут менять его температуру, то из соображений симметрии на сечении $\theta = \frac{\pi}{2}$ установится температура, равная среднему значению температур верхней и нижней полусфер.

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta = 0, \quad 0 \leqslant r < R,\ 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} T, & 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}; \\ -T, & \frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi. \end{cases} \end{cases} \qquad (10.87)$$

<u>**Шаг 1.**</u> **Решение задачи** (10.87)
Эту задачу мы уже решили в № 788 а), см. (10.49), с. 254. Воспользуемся результатом.
Решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta = 0, \qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta) = \begin{cases} T_1, & 0 \leqslant \theta < \alpha; \\ T_2, & \alpha < \theta \leqslant \pi \end{cases} \end{cases} \qquad (10.49)$$

является функция

$$u(r,\,\theta) = \frac{T_1 + T_2 + (T_2 - T_1)\cos(\alpha)}{2} + \\ + \frac{T_2 - T_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(P_{n+1}(\cos\alpha) - P_{n-1}(\cos\alpha)\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta), \quad (10.88)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).
В нашем случае

$$T_1 = T, \qquad T_2 = -T, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$u(r,\,\theta) = -T\sum_{n=1}^{\infty}\left(P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0)\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta). \qquad (10.89)$$

Применив формулу (10.9):

$$P_{2m+1}(0) = 0, \qquad P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m \geqslant 0, \qquad (10.9)$$

получаем, что

$$P_{2m+2}(0) = -\frac{(2m+1)(2m+2)}{4(m+1)^2}\cdot P_{2m}(0) = -\frac{2m+1}{2(m+1)}\cdot P_{2m}(0), \qquad (10.76)$$

и тогда

$$P_{n+1}(0) - P_{n-1}(0) = \\ = \begin{cases} 0 & n = 2m, \quad m \geqslant 1; \\ \left(-\frac{2m+1}{2(m+1)} - 1\right)\cdot P_{2m}(0) = -\frac{4m+3}{2m+2}\cdot P_{2m}(0) & n = 2m+1, \quad m \geqslant 0, \end{cases}$$

и равенство (10.89) преобразуется в
**<u>Ответ:</u>**

$$u(r,\,\theta) = T\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4m+3}{2m+2}\cdot P_{2m}(0)\left(\frac{r}{R}\right)^{2m+1}P_{2m+1}(\cos\theta),$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

**№ 792 а).**

*Концентрация некоторого газа на границе сферического сосуда радиуса $R$ с центром в начале координат равна $f(\theta)$. Определить стационарное распределение концентрации данного газа внутри этого сосуда.*

Математически это означает частный случай внутренней задачи Дирихле (10.41):
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta = 0, \qquad 0\leqslant r<R, \quad 0<\theta<\pi; \\ |u(0,\,\theta)|<\infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta). \end{cases}$$

Поскольку в номере № 793 а) мы решили более общую задачу (10.41), с. 250, воспользуемся ее результатом:

$$u(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[\frac{\alpha_{n0}}{2}P_n(\cos\theta) + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(\alpha_{nm}\cos(m\varphi)+\beta_{nm}\sin(m\varphi)\right)\right], \quad (10.44)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2), а коэффициенты $\alpha_{nm}$ и $\beta_{nm}$ определяются из формул (10.20) – (10.21):

$$\alpha_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\cos(m\varphi)\int\limits_0^{\pi}f(\theta,\,\varphi)\,P_n^m\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

$$\beta_{nm} = \frac{2n+1}{2\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\,\sin(m\varphi)\int\limits_0^{\pi}f(\theta,\,\varphi)\,P_n^m\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta.$$

По теореме 10.4, с. 242, функцию $f(\theta)$ на $\theta \in [0, \pi]$ можно представить следующим рядом Фурье по полиномам Лежандра:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k(cos\theta), \qquad f_k = \frac{2k+1}{2} \int\limits_0^{\pi} f(\theta) P_k(\cos\theta) \sin\theta d\theta. \qquad (10.11)$$

Поэтому из граничного условия $u(R, \theta) = f(\theta)$ получаем равенство рядов

$$u(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{R}\right)^n \Bigg[ \frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left(\alpha_{nm}\cos(m\varphi) + \beta_{nm}\sin(m\varphi)\right) \Bigg] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(cos\theta) = f(\theta),$$

которое заведомо верно, если ряды по индексу $n$ равны почленно:

$$\frac{\alpha_{n0}}{2} P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\cos\theta) \left(\alpha_{nm}\cos(m\varphi) + \beta_{nm}\sin(m\varphi)\right) = f_n P_n(cos\theta).$$

Эти же равенства, в свою очередь, выполняются, если

$$\frac{\alpha_{n0}}{2} = f_n, \qquad \text{а при } m > 0 \text{ все} \quad \alpha_{nm} = \beta_{nm} = 0.$$

<u>**Ответ:**</u>

$$\begin{aligned} &u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{r}{R}\right)^n f_n P_n(\cos\theta), \\ &f_n = \tfrac{2n+1}{2} \int\limits_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \end{aligned} \qquad (10.90)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

### № 792 б).

*Концентрация некоторого газа на границе сферического сосуда радиуса $R$ с центром в начале координат равна $f(\theta)$. Определить стационарное распределение концентрации данного газа вне этого сосуда.*

Математически это означает частный случай внешней задачи Дирихле (10.45):
*Найти ограниченную функцию $u(r, \theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0, \theta)| < \infty, \\ u(R, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$

Поскольку в номере № 793 б) мы эту более общую задачу (10.45), с. 252, решили, воспользуемся ее результатом:

$$u(r,\,\theta,\,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\Bigg[\frac{\alpha_{n0}}{2}P_n(\cos\theta)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(\alpha_{nm}\cos(m\varphi)+\beta_{nm}\sin(m\varphi)\right)\Bigg],\quad(10.48)$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2), а коэффициенты $\alpha_{nm}$ и $\beta_{nm}$ определяются из формул

$$\alpha_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}d\varphi\,\cos(m\varphi)\int_0^{\pi}f(\theta,\,\varphi)\,P_n^m\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta,\quad(10.20)$$

$$\beta_{nm}=\frac{2n+1}{2\pi}\cdot\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}d\varphi\,\sin(m\varphi)\int_0^{\pi}f(\theta,\,\varphi)\,P_n^m\,(\cos\theta)\sin\theta d\theta.\quad(10.21)$$

По теореме 10.4, с. 242, функцию $f(\theta)$ на $\theta\in[0,\,\pi]$ можно представить следующим рядом Фурье по полиномам Лежандра:

$$f(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}f_kP_k(cos\theta),\qquad f_k=\frac{2k+1}{2}\int_0^{\pi}f(\theta)P_k(\cos\theta)\sin\theta d\theta.\quad(10.11)$$

Поэтому из граничного условия $u(R,\,\theta)=f(\theta)$ получаем равенство рядов

$$u(R,\,\theta,\,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{R}\right)^{n+1}\Bigg[\frac{\alpha_{n0}}{2}P_n(\cos\theta)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(\alpha_{nm}\cos(m\varphi)+\beta_{nm}\sin(m\varphi)\right)\Bigg]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}f_nP_n(cos\theta)=f(\theta),$$

которое заведомо верно, если ряды по индексу $n$ равны почленно:

$$\frac{\alpha_{n0}}{2}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\cos\theta)\left(\alpha_{nm}\cos(m\varphi)+\beta_{nm}\sin(m\varphi)\right)=f_nP_n(cos\theta).$$

Эти же равенства, в свою очередь, выполняются, если

$$\frac{\alpha_{n0}}{2} = f_n, \qquad \text{а при } m > 0 \text{ все } \quad \alpha_{nm} = \beta_{nm} = 0.$$

**Ответ:**

$$\begin{aligned} u(r,\,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{R}{r}\right)^{n+1} f_n P_n(\cos\theta), \\ f_n &= \tfrac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \end{aligned} \tag{10.91}$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

### № 790 а).

*Построить функцию $u(r,\,\theta)$, гармоническую в шаре радиуса $R$, и удовлетворяющую краевому условию:*

$$u(R,\,\theta) = f(\theta) = 3 + 5\cos^2\theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta) = 3 + 5\cos^2\theta. \end{cases} \tag{10.92}$$

**Шаг 1. Решение в общем виде**
Данная задача есть частный случай задачи, решенной нами в № 792 а) (с. 271). Воспользуемся результатом.
**Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от $\varphi$:**

$$u(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n f_n P_n(\cos\theta), \qquad f_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta) P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \tag{10.90}$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).
Поскольку данная нам функция $f(\theta) = 3 + 5\cos^2\theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos\theta)$ и $P_2(\cos\theta)$:

$$P_0(\cos\theta) = 1 \qquad \text{и} \qquad P_2(\cos\theta) = \Big[\text{в силу формулы (10.12)}\Big] = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2},$$

$$\Longrightarrow \qquad f(\theta) = 3 + 5\cos^2\theta = 3 + 5\frac{1 + 2P_2(\cos\theta)}{3} = \frac{14}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{10}{3}P_2(\cos\theta),$$

то коэффициенты $f_n$ можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = \frac{14}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{10}{3}P_2(\cos\theta) \quad \Longrightarrow \quad f_n = \begin{cases} \frac{14}{3} & n = 0; \\ \frac{10}{3} & n = 2; \\ 0 & n = 1, \quad n \geqslant 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u(r,\,\theta) = \frac{14}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{10r^2}{3R^2}P_2(\cos\theta) =$$
$$= \frac{14}{3} + \frac{10r^2}{3R^2}\cdot\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = \frac{14}{3} - \frac{5r^2}{3R^2} + 5\cdot\frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta.$$

**<u>Ответ:</u>**

$$u(r,\,\theta) = \frac{14}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{10r^2}{3R^2}P_2(\cos\theta) = \frac{14}{3} - \frac{5r^2}{3R^2} + 5\cdot\frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

**№ 790 в).**

*Построить функцию $u(r,\,\theta)$, гармоническую в шаре радиуса $R$, и удовлетворяющую краевому условию:*

$$u(R,\,\theta) = f(\theta) = 3\cos^3\theta - \cos\theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant r < R, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta) = 3\cos^3\theta - \cos\theta. \end{cases} \tag{10.93}$$

**<u>Шаг 1.</u> Решение в общем виде**
Данная задача есть частный случай задачи, решенной нами в № 792 а) (с. 271). Воспользуемся результатом.
**<u>Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от $\varphi$:</u>**

$$u(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n f_n P_n(\cos\theta), \qquad f_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \tag{10.90}$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

Поскольку данная нам функция $f(\theta) = 3\cos^3\theta - \cos\theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_1(\cos\theta)$ и $P_3(\cos\theta)$:

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta \qquad \text{и} \qquad P_3(\cos\theta) = \Big[\text{в силу (10.12)}\Big] = \frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2},$$

$$\Longrightarrow \quad f(\theta) = 3\cos^3\theta - \cos\theta = -\cos\theta + \frac{6}{5}\cdot\frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2} + \frac{9}{5}\cos\theta = \\ = \frac{4}{5}P_1(\cos\theta) + \frac{6}{5}P_3(\cos\theta),$$

то коэффициенты $f_n$ можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = \frac{4}{5}P_1(\cos\theta) + \frac{6}{5}P_3(\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad f_n = \begin{cases} \frac{4}{5} & n = 1; \\ \frac{6}{5} & n = 3; \\ 0 & n = 0, \quad n = 2, \quad n \geqslant 4. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u(r,\,\theta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{r}{R}P_1(\cos\theta) + \frac{6}{5}\cdot\frac{r^3}{R^3}P_3(\cos\theta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{r}{R}\cos\theta + \\ + \frac{6}{5}\cdot\frac{r^3}{R^3}\cdot\frac{5\cos^3\theta - 3\cos\theta}{2}R = \\ = \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{r}{R} - \frac{9}{5}\cdot\frac{r^3}{R^3}\right)\cos\theta + 3\cdot\frac{r^3}{R^3}\cdot\cos^3\theta.$$

**Ответ:** $u(r,\,\theta) = \frac{4}{5}\cdot\frac{r}{R}P_1(\cos\theta) + \frac{6}{5}\cdot\frac{r^3}{R^3}P_3(\cos\theta) =$

$$= \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{r}{R} - \frac{9}{5}\cdot\frac{r^3}{R^3}\right)\cos\theta + 3\cdot\frac{r^3}{R^3}\cdot\cos^3\theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

### № 791 а).

*Построить функцию $u(r,\,\theta)$, гармоническую вне шара радиуса $R$, и удовлетворяющую краевому условию:*

$$u(R,\,\theta) = f(\theta) = 2\cos\theta - \cos^2\theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, \\ \qquad\qquad R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta) = 2\cos\theta - \cos^2\theta. \end{cases} \tag{10.94}$$

**Шаг 1.** **Решение в общем виде**
Данная задача есть частный случай задачи, решенной нами в № 792 б) (с. 272). Воспользуемся результатом.
**Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от $\varphi$:**

$$u(r,\,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}f_nP_n(\cos\theta),\qquad f_n=\frac{2n+1}{2}\int\limits_0^{\pi}f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta,\tag{10.91}$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).
Поскольку данная нам функция $f(\theta)=2\cos\theta-\cos^2\theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos\theta)$, $P_1(\cos\theta)$ и $P_2(\cos\theta)$:

$$P_0(\cos\theta)=1,\qquad P_1(\cos\theta)=\cos\theta\qquad \text{и}$$

$$P_2(\cos\theta)=\Big[\text{в силу формулы (10.12)}\Big]=\frac{3\cos^2\theta-1}{2},$$

$$\Longrightarrow\qquad f(\theta)=2\cos\theta-\cos^2\theta=2\cos\theta-\frac{2}{3}\cdot\frac{3\cos^2\theta-1}{2}-\frac{1}{3}=$$
$$=-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+2P_1(\cos\theta)-\frac{2}{3}P_2(\cos\theta),$$

то коэффициенты $f_n$ можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta)=-\frac{1}{3}P_0(\cos\theta)+2P_1(\cos\theta)-\frac{2}{3}P_2(\cos\theta)\quad\Rightarrow\quad f_n=\begin{cases}-\frac{1}{3} & n=0;\\ 2 & n=1;\\ -\frac{2}{3} & n=2;\\ 0 & n\geqslant 3.\end{cases}$$

Таким образом,

$$u(r,\,\theta)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{R}{r}P_0(\cos\theta)+2\cdot\frac{R^2}{r^2}P_1(\cos\theta)-\frac{2}{3}\cdot\frac{R^3}{r^3}P_2(\cos\theta)=$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{R}{r}+2\cdot\frac{R^2}{r^2}\cos\theta-\frac{2}{3}\cdot\frac{R^3}{r^3}\cdot\frac{3\cos^2\theta-1}{2}=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{R}{r}\left(\frac{R^2}{r^2}-1\right)+2\cdot\frac{R^2}{r^2}\cos\theta-\frac{R^3}{r^3}\cdot\cos^2\theta.$$

**Ответ:**

$$u(r,\,\theta)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{R}{r}P_0(\cos\theta)+2\cdot\frac{R^2}{r^2}P_1(\cos\theta)-\frac{2}{3}\cdot\frac{R^3}{r^3}P_2(\cos\theta)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{R}{r}\left(\frac{R^2}{r^2}-1\right)+2\cdot\frac{R^2}{r^2}\cos\theta-\frac{R^3}{r^3}\cdot\cos^2\theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

**№ 791 в).**

*Построить функцию $u(r,\,\theta)$, гармоническую вне шара радиуса $R$, и удовлетворяющую краевому условию:*

$$u(R,\,\theta) = f(\theta) = 3 + 2\cos^2\theta.$$

Записав эти условия математически, получим задачу:
*Найти ограниченную функцию $u(r,\,\theta)$ из условий*

$$\begin{cases} \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\overbrace{u_{\varphi\varphi}}^{=0} = 0, \\ \qquad\qquad R < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi; \\ |u(0,\,\theta)| < \infty, \\ u(R,\,\theta) = f(\theta) = 3 + 2\cos^2\theta. \end{cases} \tag{10.95}$$

**<u>Шаг 1.</u> Решение в общем виде**
Данная задача есть частный случай задачи, решенной нами в № № 792 б) (с. 272). Воспользуемся результатом.
**<u>Общее решение внутренней задачи Дирихле, не зависящее от $\varphi$:</u>**

$$u(r,\,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} f_n P_n(\cos\theta), \qquad f_n = \frac{2n+1}{2}\int\limits_0^\pi f(\theta)P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).
Поскольку данная нам функция $f(\theta) = 3 + 2\cos^2\theta$, как легко видеть, есть линейная комбинация полиномов $P_0(\cos\theta)$ и $P_2(\cos\theta)$:

$$P_0(\cos\theta) = 1, \quad \text{и} \quad P_2(\cos\theta) = \Big[\text{в силу формулы (10.12)}\Big] = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2},$$

$$\Longrightarrow \qquad f(\theta) = 3 + 2\cos^2\theta = 3 + \frac{4}{3}\cdot\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{4}{3}P_2(\cos\theta),$$

то коэффициенты $f_n$ можно найти сразу, не вычисляя интегралов:

$$f(\theta) = \frac{11}{3}P_0(\cos\theta) + \frac{4}{3}P_2(\cos\theta) \qquad \Longrightarrow \qquad f_n = \begin{cases} \frac{11}{3} & n = 0; \\ 0 & n = 1; \\ \frac{4}{3} & n = 2; \\ 0 & n \geqslant 3. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u(r,\,\theta) = \frac{11}{3}\cdot\frac{R}{r}P_0(\cos\theta) + \frac{4}{3}\cdot\frac{R^3}{r^3}P_2(\cos\theta) =$$
$$= \frac{11}{3}\cdot\frac{R}{r} + \frac{4}{3}\cdot\frac{R^3}{r^3}\cdot\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{R}{r}\left(11 - 2\cdot\frac{R^2}{r^2}\right) + 2\cdot\frac{R^3}{r^3}\cdot\cos^2\theta.$$

**<u>Ответ:</u>**

$$u(r,\,\theta) = \frac{11}{3}\cdot\frac{R}{r}P_0(\cos\theta) + \frac{4}{3}\cdot\frac{R^3}{r^3}P_2(\cos\theta) = \frac{1}{3}\cdot\frac{R}{r}\left(11 - 2\cdot\frac{R^2}{r^2}\right) + 2\cdot\frac{R^3}{r^3}\cdot\cos^2\theta,$$

где $P_n(x)$ – полиномы Лежандра (10.2).

### 10.7. Уравнение теплопроводности в сферических координатах

*Найти решение $u(r,\,\theta,\,\varphi;\,t)$ уравнения теплопроводности в сферических координатах с краевыми условиями на сфере:*

$$\begin{cases} u_t - a^2\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\sin\theta u_\theta\right)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right) = 0; \\ \alpha u(R,\,\theta,\,\varphi;\,t) + \beta u_r(R,\,\theta,\,\varphi;\,t) = 0. \end{cases} \tag{10.96}$$

**<u>Шаг 1.</u> Вид частных решений и предварительные рассуждения**
Найдем все решения задачи (10.96), имеющие вид

$$U(r,\,\theta,\,\varphi;\,t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi). \tag{10.97}$$

Подставив (10.97) в уравнение $U_t - a^2\Delta U = 0$, получим:

$$\mathbf{T}'(t)\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi) - \mathbf{T}(t)\cdot\frac{1}{r^2}\Bigg(\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi) + \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta\right)_\theta\mathbf{X}(r) + \frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}\mathbf{X}(r)\Bigg) = 0.$$

Поделим это равенство на выражение $a^2\mathbf{T}(t)\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)$. Получим

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} + \frac{\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta\right)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)}\right) = 0.$$

Первая дробь зависит только от $t$, а все остальное выражение – только от $r$, $\theta$ и $\varphi$. Поэтому их разность можеть быть нулем в том и только в том случае, когда $\exists\ \lambda\in\mathbb{R}$ такая, что:

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{a^2\mathbf{T}(t)} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)} + \frac{\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta\right)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)}\right) = -\lambda.$$

Отсюда мы получаем уравнение для $\mathbf{T}_{kn}(t)$:

$$\mathbf{T}'(t) + \lambda\mathbf{T}(t) = 0 \tag{10.98}$$

и равенство, связывающее $\mathbf{X}(r)$ и $\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)$:

$$\left(\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)}+\lambda r^2\right)+\frac{\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)}=0$$

Выражение в скобках зависит только от $r$, а последняя дробь – только от $\theta$ и $\varphi$. Это возможно только в случае, когда $\exists\ \varkappa\in\mathbb{R}$ такая, что:

$$\frac{\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'}{\mathbf{X}(r)}+\lambda r^2=-\ \frac{\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}}{\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)}=\varkappa.$$

Отсюда мы получаем уравнения для $\mathbf{X}_{kn}(r)$:

$$\left(r^2\mathbf{X}'(r)\right)'+\left(\lambda r^2-\varkappa\right)\mathbf{X}=0 \tag{10.99}$$

и для $\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)$:

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\mathbf{Y}_\theta\right)_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{Y}_{\varphi\varphi}+\varkappa\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)=0. \tag{10.100}$$

**<u>Шаг 2.</u> Сферические гармоники**

Если решение уравнения (10.100) искать в виде

$$\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)=\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi), \tag{10.101}$$

то получим

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\sin\theta\mathbf{\Theta}'(\theta)\right)'\mathbf{\Phi}(\varphi)+\frac{1}{\sin^2\theta}\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}''(\varphi)+\varkappa\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi)=0.$$

Поделим это равенство на $\frac{\mathbf{\Theta}(\theta)\mathbf{\Phi}(\varphi)}{\sin^2\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\left(\sin\theta\mathbf{\Theta}'(\theta)\right)'}{\mathbf{\Theta}(\theta)}+\varkappa\sin^2\theta=\ -\ \frac{\mathbf{\Phi}''(\varphi)}{\mathbf{\Phi}(\varphi)}.$$

Слева стоит функция, зависящая только от $\theta$, а справа – только от $\varphi$, поэтому $\exists\mu\in\mathbb{R}$ :

$$\sin\theta\left(\sin\theta\mathbf{\Theta}'(\theta)\right)'+\left(\varkappa\sin^2\theta-\mu\right)\mathbf{\Theta}(\theta)=0, \tag{10.102}$$

$$\mathbf{\Phi}''(\varphi)+\mu\mathbf{\Phi}(\varphi)=0. \tag{10.103}$$

Уравнение (10.103) необходимо дополнить условием периодичности, поскольку функция $U(r,\,\theta,\,\varphi)$, а следовательно и функция $\mathbf{\Phi}$ должна быть непрерывной. Тогда для $\mathbf{\Phi}(\varphi)$ получаем задачу:

$$\begin{cases}\mathbf{\Phi}''(\varphi)+\mu\mathbf{\Phi}(\varphi)=0,\\ \mathbf{\Phi}(\varphi+2\pi)=\mathbf{\Phi}(\varphi).\end{cases} \tag{10.104}$$

Решим эту задачу. Общим решением уравнения $\mathbf{\Phi}''(\varphi) + \mu\mathbf{\Phi}(\varphi) = 0$ является функция

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi) & \text{при} \quad \mu = -\beta^2 < 0; \\ \mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1 + c_2\varphi & \text{при} \quad \mu = 0; \\ \mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi) & \text{при} \quad \mu = \beta^2 > 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функции $c_1 \operatorname{sh}(\beta\varphi) + c_2 \operatorname{ch}(\beta\varphi)$ и $c_1 + c_2\varphi$ ни при каких $c_{1,2}$ (кроме $c_1 = c_2 = 0$) не удовлетворяют условию периодичности $\mathbf{\Phi}(\varphi + 2\pi) = \mathbf{\Phi}(\varphi)$.

В то же время функция $c_1 \sin(\beta\varphi) + c_2 \cos(\beta\varphi)$ удовлетворяет этому условию тогда и только тогда, когда

$$\mu = \beta^2 = m^2, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Итак, функция (10.101) есть решение (10.100), то есть является сферической функцией, тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{\Phi}(\varphi) = c_1 \sin(m\varphi) + c_2 \cos(m\varphi), \qquad m = 0,\, 1,\, 2,\, \dots, \tag{10.105}$$

а функция $\mathbf{\Theta}(\theta)$ есть решение уравнения

$$\sin\theta \Big(\sin\theta\mathbf{\Theta}'(\theta)\Big)' + \big(\varkappa \sin^2\theta - m^2\big)\, \mathbf{\Theta}(\theta) = 0. \tag{10.106}$$

В уравнении (10.106) сделаем замену переменой $x = \cos\theta$. Тогда для функции

$$P(x) = P(\cos\theta) \equiv \mathbf{\Theta}(\theta)$$

получаем

$$\mathbf{\Theta}'(\theta) = -\sin\theta P'(\cos\theta), \qquad \mathbf{\Theta}''(\theta) = \sin^2\theta P''(\cos\theta) - \cos\theta P'(\cos\theta),$$

и уравнение (10.106) примет вид:

$$\sin^4\theta P''(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) - \sin^2\theta\cos\theta P'(x) + \big(\varkappa\sin^2\theta - m^2\big)\, P(x) = 0.$$

Перепишем его, поделив сначала на $\sin^2\theta$, и учтем, что

$$\cos\theta = x, \qquad \sin^2\theta = 1 - x^2:$$

$$(1-x^2)P''(x) - 2xP'(x) + \left(\varkappa - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P(x) = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с (10.15), с. 243. Поэтому по теореме 10.5, с. 243, все ограниченные решения этой задачи описываются формулами

$$\varkappa = \varkappa_k = k(k+1), \qquad k = 0,\, 1,\, 2,\, \dots; \tag{10.107}$$

$$P(x) = P_k^m(x) = \big(1-x^2\big)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m P_k(x)}{dx^m}, \qquad m = \overline{0,\, k}. \tag{10.108}$$

Поэтому все нетривиальные решения уравнения (10.106) имеют вид

$$\mathbf{\Theta}_{km}(\theta) = P_k^m(\cos\theta), \qquad k = \overline{0,\, \infty}, \quad m = \overline{0,\, n}. \tag{10.109}$$

Наконец, с учетом (10.105), составляя линейную комбинацию всех решений, зависящих от $k$, получаем, что:

Функция (10.101) есть решение (10.100) тогда и только тогда, когда

$$\varkappa_k = k(k+1), \quad k = \overline{0,\, \infty}, \tag{10.107}$$

$$\mathbf{Y}(\theta,\, \varphi) = \mathbf{Y}_k(\theta,\, \varphi) = \\ = \sum_{m=0}^{k} \left(A_{km} \sin(m\varphi) + B_{km} \cos(m\varphi)\right) P_k^m(\cos\theta), \qquad k = \overline{0,\, \infty}. \tag{10.110}$$

**<u>Шаг 3.</u> Решение задачи для $\mathbf{X}(r)$**

Для функций $\mathbf{X}(r)$ мы получили уравнение

$$r^2\mathbf{X}''(r) + 2r\mathbf{X}'(r) + \left(\lambda r^2 - \varkappa_k\right)\mathbf{X} = 0. \tag{10.99}$$

Приведем его к виду уравнения Бесселя

$$ry''(r) + y'(r) + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{r^2}\right) y(r) = 0$$

при помощи замены переменных:

$$\mathbf{X}(r) \equiv \frac{y(r)}{\sqrt{r}}, \qquad \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \qquad \mathbf{X}'(r) = \frac{y'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{y(r)}{2r^{\frac{3}{2}}}, \qquad \mathbf{X}''(r) = \frac{y''(r)}{\sqrt{r}} - \frac{y'(r)}{r^{\frac{3}{2}}} + \frac{3y(r)}{4r^{\frac{5}{2}}}.$$

Тогда уравнение (10.99) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{r}}\Bigg( r^2\left(y''(r) - \frac{y'(r)}{r} + \frac{3y(r)}{4r^2}\right) + \\ + 2r\left(y'(r) - \frac{y(r)}{2r}\right) + \left(\lambda r^2 - \varkappa_k\right) y(r) \Bigg) = 0.$$

Упростим его:

$$r^2y''(r) - ry'(r) + \frac{3}{4}y(r) + 2ry'(r) - y(r) + \left(\lambda r^2 - \varkappa_k\right) y(r) = 0.$$

Наконец, приведем подобные и получим:

$$r^2y''(r) + ry'(r) + \left(\lambda r^2 - \left(\varkappa_k + \frac{1}{4}\right)\right) y(r) = 0.$$

Поделим уравнение на $r$ и учтем, что $\varkappa_k = k(k+1)$, и следовательно

$$\left(\varkappa_k + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left[4k(k+1) + 1\right] = \frac{1}{4}\left(2k+1\right)^2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Добавив краевое условие, следующее из $\alpha U(R,\,\theta,\,\varphi;\,t)+\beta U_r(R,\,\theta,\,\varphi;\,t)=0$, получим:

$$\begin{cases} ry''(r)+y'(r)+\left(\lambda r-\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{r}\right)y(r)=0; \\ \alpha y(R)+\beta y'(R)=0 \end{cases} \qquad (10.111)$$

Воспользуемся результатом следствия 9.1, с. 121.
*Общее решение уравнения Бесселя* (9.1) *задается каждой из формул*

$$\mathbf{Z}_\nu(x)=c_1J_\nu(x)+c_2N_\nu(x)=c_3H_\nu^{(1)}(x)+c_4H_\nu^{(2)}(x), \qquad \nu\in\mathbb{R}.$$

$$\mathbf{Z}_\nu(x)=c_5J_\nu(x)+c_6J_{-\nu}(x) \qquad \nu\notin\mathbb{Z}.$$

Поскольку в нашем случае $\nu=k+\frac{1}{2}$, удобнее воспользоваться последней формулой:

$$y(r)=c_5J_{k+\frac{1}{2}}(r)+c_6J_{-k-\frac{1}{2}}(r).$$

И, поскольку мы все равно позже представим общее решение задачи (10.96) в виде ряда по линейно независимым решениям задач для $\mathbf{X}(r)$, $\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi)$, выпишем систему линейно независимых решений (10.111):

$$y(r)\in\left\{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)\right\}_{k=-\infty}^{\infty}, \qquad (10.112)$$

где $\mu_{kn}$ – положительные корни рассматриваемого при каждом $k=\overline{0,\,\infty}$ уравнения

$$\alpha RJ_{k+\frac{1}{2}}(\mu)+\beta\mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu)=0. \qquad (10.113)$$

Таким образом,

решениями задачи для $\mathbf{X}(r)$ являются

$$\lambda_{kn}=\left[\frac{\mu_{kn}}{R}\right]^2, \qquad \mathbf{X}_{kn}(r)=\frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}, \qquad k=\overline{-\infty,\,\infty}, \quad n\in\mathbb{N}, \qquad (10.114)$$

где $\mu_{kn}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha RJ_{k+\frac{1}{2}}(\mu)+\beta\mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu)=0. \qquad (10.113)$$

**Шаг 4. Составление общего решения задачи** (10.96)
Осталось вспомнить уравнение для функций $\mathbf{T}(t)$:

$$\mathbf{T}'(t)+\lambda\mathbf{T}(t)=0, \qquad \lambda=\lambda_{kn}=\frac{\mu_{kn}^2}{R^2}. \qquad (10.98)$$

Общим решением этого уравнения является

$$\mathbf{T}_{kn}(t)=c_{kn}e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2}\,t}.$$

Мы уже можем, наконец, выписать все решения (10.96), имеющие вид (10.97)

$$U(r,\,\theta,\,\varphi;\,t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}(r)\mathbf{Y}(\theta,\,\varphi):$$

$$U(r,\,\theta,\,\varphi;\,t) = c_{kn}e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2}\,t}\cdot\frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}\bullet$$
$$\bullet\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{k}\left(A_{km}\sin\left(m\varphi\right)+B_{km}\cos\left(m\varphi\right)\right)P_k^m(\cos\theta) & k\geqslant 0;\\ \sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(A_{km}\sin\left(m\varphi\right)+B_{km}\cos\left(m\varphi\right)\right)P_{l-1}^m(\cos\theta) & k=-l<0.\end{cases} \tag{10.115}$$

Составим линейную комбинацию всех линейно независимых решений (10.96), учитывая, что индексы $k$, $m$ и $n$ меняются в пределах:

$$k=\overline{-\infty,\,+\infty},\qquad n=\overline{1,\,+\infty},\qquad m=\overline{0,\,n}.$$

Получим
**Ответ:**

$$u(r,\,\theta,\,\varphi;\,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{kn}e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2}\,t}\cdot\frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}\bullet$$
$$\bullet\begin{cases}\sum\limits_{m=0}^{k}\left(A_{km}\sin\left(m\varphi\right)+B_{km}\cos\left(m\varphi\right)\right)P_k^m(\cos\theta) & k\geqslant 0;\\ \sum\limits_{m=0}^{l-1}\left(A_{km}\sin\left(m\varphi\right)+B_{km}\cos\left(m\varphi\right)\right)P_{l-1}^m(\cos\theta) & k=-l<0,\end{cases} \tag{10.116}$$

где $\mu_{kn}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha RJ_{k+\frac{1}{2}}(\mu)+\beta\mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu)=0. \tag{10.113}$$

### 10.8. Задача об остывании шара

*Найти*[1] *ограниченную функцию* $u(r,\,\theta,\,\varphi;\,t)$ *из условий*

$$\begin{cases}u_t-a^2\left(\frac{1}{r^2}\left(r^2u_r\right)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\sin\theta u_\theta\Big)_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}\right)=0,\\ \qquad\qquad r\in[0,\,R),\quad \theta\in(0,\,\pi),\quad \varphi\in[0,\,2\pi),\quad t>0;\\ u(r,\,\theta,\,\varphi;\,0)=\psi(r,\,\theta,\,\varphi);\\ |u(0,\,\theta,\,\varphi;\,t)|<\infty,\\ \alpha u(R,\,\theta,\,\varphi;\,t)+\beta u_r(R,\,\theta,\,\varphi;\,t)=0.\end{cases} \tag{10.117}$$

[1] Близкий пример есть в [1], № 794 б).

**<u>Шаг 1.</u> Решение уравнения с краевым условием, ограниченное в шаре**
В результате предыдущего пункта, нам известно, что решение уравнения $u_t - a^2\Delta u = 0$ с краевым условием $\alpha u(R,\, \theta,\, \varphi;\, t) + \beta u_r(R,\, \theta,\, \varphi;\, t) = 0$ задается формулами (10.116) и (10.113).

Учитывая, что функция $u(r,\, \theta,\, \varphi;\, t)$ должна быть ограничена при $r = 0$, а функции $J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn} r}{R}\right) = \underline{\underline{O}}\left(r^{k+\frac{1}{2}}\right)$ при $r \to +0$, получаем, что

$$c_{kn} = 0 \qquad \text{при} \quad k < 0.$$

Поэтому функция, удовлетворяющая первым трем равенствам из (10.117), должна иметь вид:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2}t} \cdot \frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn} r}{R}\right)}{\sqrt{r}} \times \\ \times \sum_{m=0}^{k} \left(A_{km}\sin(m\varphi) + B_{km}\cos(m\varphi)\right) P_k^m(\cos\theta), \quad (10.118)$$

где $\mu_{kn}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha R J_{k+\frac{1}{2}}(\mu) + \beta\mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu) = 0. \qquad (10.119)$$

**<u>Шаг 2.</u> Разложение функции граничного условия в ряд**
Представим функцию начального условия $\psi(r,\, \theta,\, \varphi)$ в виде следующего ряда:

$$\sqrt{r}\psi(r,\, \theta,\, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{kn}\sqrt{r} J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn} r}{R}\right) \times \\ \times \sum_{m=0}^{k} \left(C_{km}\sin(m\varphi) + D_{km}\cos(m\varphi)\right) P_k^m(\cos\theta). \quad (10.120)$$

Введем обозначения:

$$\begin{cases} a_{knm} = rJ_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn} r}{R}\right) P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\sin(m\varphi)\,, \\ b_{knm} = rJ_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn} r}{R}\right) P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\cos(m\varphi)\,. \end{cases} \qquad (10.121)$$

Домножив ряд (10.120) на

$$a_{ijl} = rJ_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij} r}{R}\right) P_i^l(\cos\theta)\sin\theta\sin(l\varphi)$$

и проинтегрировав по $r \in (0,\, R)$, по $\theta \in (0,\, \pi)$ и по $\varphi \in (0,\, 2\pi)$, получим:

$$\left(\sqrt{r}\psi,\; a_{ijl}\right) = d_{ij}C_{il} \cdot \left\| J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij} r}{R}\right)\right\|^2 \cdot \left\|P_i^l(x)\right\|^2 \cdot \left\|\sin(l\varphi)\right\|^2 \qquad (10.122)$$

Аналогично, домножив ряд (10.120) на

$$b_{ijl} = rJ_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right)P_i^l(\cos\theta)\sin\theta\cos(l\varphi)$$

и проинтегрировав по $r \in (0,\, R)$, по $\theta \in (0,\, \pi)$ и по $\varphi \in (0,\, 2\pi)$, получим:

$$\left(\sqrt{r}\psi,\ b_{ijl}\right) = d_{ij}D_{il}\cdot\left\|J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right)\right\|^2\cdot\left\|P_i^l(x)\right\|^2\cdot\left\|\cos(l\varphi)\right\|^2. \qquad (10.123)$$

В обеих формулах (10.122) и (10.122) присутствует одинаковый множитель

$$\gamma_{ijl} = \left\|J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right)\right\|^2\cdot\left\|P_i^l(x)\right\|^2\cdot\left\|\cos(l\varphi)\right\|^2 = \\ = \left\|J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right)\right\|^2\cdot\left\|P_i^l(x)\right\|^2\cdot\left\|\sin(l\varphi)\right\|^2.$$

Для нормы $\sin(l\varphi)$ и $\cos(l\varphi)$ легко получаются выражения

$$\left\|\sin(l\varphi)\right\|^2 = \left\|\cos(l\varphi)\right\|^2 = \begin{cases} \pi, & l \in \mathbb{N}; \\ 2\pi, & l = 0. \end{cases}$$

По формуле[1] для интеграла Ломмеля 9.14, с. 122,

$$\left\|J_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{ij}r}{R}\right)\right\|^2 = \frac{R^2}{2}\left[J'_{i+\frac{1}{2}}(\mu_{ij})\right]^2 + \frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{ij}\right]^2}\right)J^2_{i+\frac{1}{2}}(\mu_{ij}).$$

Поскольку $\|P_i^m\|^2_{[-1,\,1]} = \frac{2}{2i+1}\cdot\frac{(i+m)!}{(i-m)!}$ по формуле (10.18), с. 244, то

$$\gamma_{ijl} = \begin{cases} \left[\frac{R^2}{2}\left[J'_{i+\frac{1}{2}}(\mu_{ij})\right]^2 + \frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{ij}\right]^2}\right)J^2_{i+\frac{1}{2}}(\mu_{ij})\right]\times \\ \qquad \times\frac{2}{2i+1}\cdot\frac{(i+m)!}{(i-m)!}\cdot\pi, \quad l > 0; \\ \left[\frac{R^2}{2}\left[J'_{i+\frac{1}{2}}(\mu_{ij})\right]^2 + \frac{1}{2}\left(R^2 - \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{ij}\right]^2}\right)J^2_{i+\frac{1}{2}}(\mu_{ij})\right]\times \\ \qquad \times\frac{2}{2i+1}\cdot 2\pi, \quad l = 0. \end{cases} \qquad (10.124)$$

[1] Напомним, что квадратом нормы функций Бесселя является выражение

$$\left\|J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)\right\|^2 = \int\limits_0^R rJ^2_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)dr.$$

Таким образом, для коэффициентов $d_{kn}$, $C_{km}$ и $D_{km}$ разложения (10.120) мы, в силу (10.122) – (10.124), получаем:

$$\begin{cases} d_{kn}C_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi,\, a_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ d_{kn}D_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi,\, b_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ \gamma_{knm} = \begin{cases} \left[R^2\left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]^2 + \left(R^2 - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{kn}\right]^2}\right)J^2_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]\times \\ \qquad \times \frac{\pi}{2k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}, \quad m \in \mathbb{N}; \\ \left[R^2\left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]^2 + \left(R^2 - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{kn}\right]^2}\right)J^2_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]\times \\ \qquad \times \frac{2\pi}{2k+1}, \quad m = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{10.125}$$

**<u>Шаг 3.</u> Использование начального условия**
Приравняем ряд

$$u(r,\,\theta,\,\varphi;\,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{kn} e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2}\,t}\cdot\frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{k}\left(A_{km}\sin(m\varphi) + B_{km}\cos(m\varphi)\right)P_k^m(\cos\theta), \tag{10.118}$$

взятый при $t = 0$ к ряду

$$\psi(r,\,\theta,\,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} d_{kn} J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{k}\left(C_{km}\sin(m\varphi) + D_{km}\cos(m\varphi)\right)P_k^m(\cos\theta). \tag{10.120}$$

и получим, что для коэффициентов $c_{kn}A_{km}$ и $c_{kn}B_{km}$ выполнены равенства:

$$\begin{cases} c_{kn}A_{km} = d_{kn}C_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi,\, a_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ c_{kn}B_{km} = d_{kn}D_{km} = \frac{(\sqrt{r}\psi,\, b_{knm})}{\gamma_{knm}}, \\ \gamma_{knm} = \begin{cases} \left[R^2\left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]^2 + \left(R^2 - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{kn}\right]^2}\right)J^2_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]\times \\ \qquad \times \frac{\pi}{2k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}, \quad m \in \mathbb{N}; \\ \left[R^2\left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]^2 + \left(R^2 - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{kn}\right]^2}\right)J^2_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]\times \\ \qquad \times \frac{2\pi}{2k+1}, \quad m = 0. \end{cases} \end{cases} \tag{10.126}$$

Отметим, что поскольку $a_{knm}$ и $b_{knm}$ можно представить в виде произведения

$$\begin{cases} a_{knm} = \underbrace{rJ_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}_{=s_{kn}}\underbrace{P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\sin(m\varphi)}_{=p_{km}} = s_{kn}(r)p_{km}(\theta,\ \varphi), \\ b_{knm} = \underbrace{rJ_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}_{=s_{kn}}\underbrace{P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\cos(m\varphi)}_{=q_{km}} = s_{kn}(r)q_{km}(\theta,\ \varphi), \end{cases}$$

$$\gamma_{knm} = \underbrace{\left[R^2\left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]^2 + \left(R^2 - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{kn}\right]^2}\right)J^2_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]\cdot\frac{\pi}{2k+1}}_{=\zeta_{kn}}\times$$
$$\times\underbrace{\frac{(k+m)!}{(k-m)!}}_{=\xi_{kn}} = \zeta_{kn}\xi_{km},$$

то равенства (10.126) позволяют однозначно определить коэффициенты $c_{kn}$, $A_{km}$ и $B_{km}$.

**Ответ:**

$$u(r,\ \theta,\ \varphi;\ t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{kn}e^{-\frac{\mu_{kn}^2}{R^2}\,t}\cdot\frac{J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)}{\sqrt{r}}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{k}\left(A_{km}\sin(m\varphi) + B_{km}\cos(m\varphi)\right)P_k^m(\cos\theta), \quad (10.118)$$

где $\mu_{kn}$ – положительные корни уравнения

$$\alpha RJ_{k+\frac{1}{2}}(\mu) + \beta\mu J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu) = 0, \quad (10.119)$$

а коэффициенты $c_{kn}A_{km}$ и $c_{kn}B_{km}$ находятся из формул

$$\begin{cases} c_{kn}A_{km} = \frac{1}{\gamma_{knm}}\int\limits_0^R dr\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ r^{\frac{3}{2}}\psi(r,\ \theta,\ \varphi)\times \\ \qquad\times J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\sin(m\varphi), \\ c_{kn}B_{km} = \frac{1}{\gamma_{knm}}\int\limits_0^R dr\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\ r^{\frac{3}{2}}\psi(r,\ \theta,\ \varphi)\times \\ \qquad\times J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\mu_{kn}r}{R}\right)P_k^m(\cos\theta)\sin\theta\cos(m\varphi), \\ \gamma_{knm} = \begin{cases} \left[R^2\left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]^2 + \left(R^2 - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{kn}\right]^2}\right)J^2_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]\times \\ \qquad\times\frac{\pi}{2k+1}\cdot\frac{(k+m)!}{(k-m)!}, \quad m\in\mathbb{N}; \\ \left[R^2\left[J'_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]^2 + \left(R^2 - \frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}{\left[\mu_{kn}\right]^2}\right)J^2_{k+\frac{1}{2}}(\mu_{kn})\right]\times \\ \qquad\times\frac{2\pi}{2k+1}, \quad m=0. \end{cases} \end{cases}$$

## 11. Дополнение к разделу 4. Дифференцирование обобщенных функций

**Опр. 11.1. Производной от обобщенной функции $f(x)$ по переменной $x_k$** называется **обобщенная функция $f'(x)$**, такая что для любой бесконечно гладкой финитной $\varphi(x)$ выполняется равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f'(x)\varphi(x)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi'(x)dx.$$

(Это равенство получилось бы для $f(x)$, если бы она была из $C^1(R^n)$, и если бы для нее сходился бы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx$, при помощи однократного интегрирования по частям.)

**Дифференциальным оператором $D$ от обобщенной функции $f(x)$** называется оператор, ставящий обобщенной функции $f(x)$ в соответствие **обобщенную функцию $Df(x)$**, такую что для любой бесконечно гладкой финитной $\varphi(x)$ выполняется равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} Df(x)\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)D^*\varphi(x)dx,$$

где $D^*$ – дифференциальный оператор, сопряженный к $D$. (Если бы $f(x)$ была из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, при помощи интегрирования по частям все производные, которые оператор $D$ берет от $f(x)$, перекидываются на $\varphi(x)$, и получается $D^*\varphi(x)$.)

Например, оператор, сопряженный к оператору Лапласа, это оператор Лапласа.

**Пример 11.1.** Рассмотрим функцию Хэвисайда:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases} \tag{11.1}$$

и найдем ее производную как производную обобщенной функции.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{'}(x)\varphi(x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{'}(x)dx = \Big[\text{в силу (11.1)}\Big] =$$

$$= -\int\limits_{0}^{+\infty} 1\cdot\varphi^{'}(x)dx = -\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty} =$$

$$= \Big[\text{в силу финитности } \varphi(x),\ \ \varphi(+\infty) = 0\Big] = \varphi(0).$$

Таким образом, для любой финитной бесконечно гладкой $\varphi(x)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{'}(x)\varphi(x)dx = \varphi(0).$$

Но это равенство совпадает с равенством, определяющим $\delta(x)$. Поэтому,

$$f^{'}(x) = \delta(x).$$

*Замечание* 11.1.
При доказательстве равенств (4.7) и (5.3) мы начинали с формального применения определения $\delta$-функции. Однако, строго говоря, надо было сначала ввести определение (11.1) дифференциального оператора от обобщенной функции (ведь в обеих задачах у нас под знаком интеграла стоят производные разрывных функций, и необходимо описать, что мы под этим понимаем). Вместо этого мы в каждом из этих примеров провели действия, которые изначально и легли в основу определения (11.1): перебросили производные с обобщенной функции на бесконечно гладкую финитную $\varphi(x)$. Это иллюстративный подход. Он не вполне правомочный, но более наглядный.

# 12. Дополнение к разделу 9. Подробно о цилиндрических функциях. Некоторые доказательства

## 12.1. Определение и взаимосвязь цилиндрических функций

**Опр. 12.1.** Уравнение

$$x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right)\mathbf{Z}(x) = 0, \qquad x \in (0,\, 1), \tag{12.1}$$

называется **уравнением Бесселя**.
Всякое решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией.

**Опр. 12.2.** Функция

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{12.2}$$

называется **функцией Бесселя порядка** $\nu$. Она является решением уравнения Бесселя (12.1).

Есть и другие цилиндрические функции.

**Опр. 12.3. Функции Неймана**:

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)}\left[J_\nu(x)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)\right], \qquad \nu \notin \mathbb{Z}; \tag{12.3}$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(x)}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{12.4}$$

**Функции Ханкеля I-го рода и II-го рода**:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{12.5}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \tag{12.6}$$

**Модифицированные функции Бесселя и Ханкеля:**

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu}J_\nu(ix), \qquad K_\nu(x) = e^{\frac{\pi i}{2}\nu}H_\nu^{(1)}(ix). \tag{12.7}$$

**Теорема 12.1.**
*Фундаментальную систему решений (ФСР) уравнения Бесселя* (12.1) *образует каждая из пар функций:*

$$\{J_\nu(x),\ N_\nu(x)\}, \qquad \left\{H_\nu^{(1)}(x),\ H_\nu^{(2)}(x)\right\}$$

$$\text{и, в случае, когда } \nu \notin \mathbb{Z} \quad \{J_\nu(x),\ J_{-\nu}(x)\}$$

$$\big(\text{при } n \in \mathbb{Z} \qquad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n\big).$$

**Следствие 12.1.**
*Общее решение уравнения Бесселя* (12.1) *задается каждой из формул*

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x) = c_3 H_\nu^{(1)}(x) + c_4 H_\nu^{(2)}(x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_5 J_\nu(x) + c_6 J_{-\nu}(x) \qquad \nu \notin \mathbb{Z}.$$

### 12.2. Рекуррентные формулы для цилиндрических функций

Для функций Бесселя и Неймана имеют место следующие рекуррентные формулы[1]:

$$\mathbf{Z}'_\nu(x) = \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x}\mathbf{Z}_\nu(x), \qquad \mathbf{Z}'_\nu(x) = -\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x}\mathbf{Z}_\nu(x). \quad (12.8)$$

Их можно также переписать в виде:

$$[x^\nu \mathbf{Z}_\nu]'(x) = x^\nu \mathbf{Z}_{\nu-1}(x), \qquad \left[x^{-\nu}\mathbf{Z}_\nu\right]'(x) = -x^{-\nu}\mathbf{Z}_{\nu+1}(x). \quad (12.9)$$

Если из второй формулы (12.8) вычесть первую, получим еще одно соотношение:

$$\mathbf{Z}_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x}\mathbf{Z}_\nu(x) + \mathbf{Z}_{\nu-1}(x) = 0. \quad (12.10)$$

Для функций Бесселя и Неймана с целочисленным порядком $\nu = n \in \mathbb{Z}$ верно равенство

$$\mathbf{Z}_{-n}(x) = (-1)^n \mathbf{Z}_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z}. \quad (12.11)$$

Кроме приведенных формул, нам также понадобится соотношение, из которого частично следует утверждение теоремы 12.1.

**Утверждение 12.1** (вронскиан функций Бесселя и Неймана)**.**

$$W[J_\nu,\ N_\nu](x) = \begin{vmatrix} J_\nu(x) & N_\nu(x) \\ J'_\nu(x) & N'_\nu(x) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi x}. \quad (12.12)$$

[1] См. [3], с. 56, 79. Отметим, что в этой книге функции Неймана обозначаются как $\mathbf{Y}_\nu$, или, точнее $N_\nu(x) = \operatorname{Re}\mathbf{Y}_\nu(z)\Big|_{z=x}$. Определение $\mathbf{Y}_\nu$ см. [3], с. 76.

### 12.3. Интегральные формулы для функций Бесселя

Имеют место следующие интегральные формулы:

## Интегралы Ломмеля

$$\int\limits_0^x tJ_\nu(\alpha t)J_\nu(\beta t)dt =$$

$$= \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}\Big(\alpha J_{\nu+1}(\alpha x)J_\nu(\beta x) - \beta J_\nu(\alpha x)J_{\nu+1}(\beta x)\Big), \quad \alpha \neq \beta, \quad (12.13)$$

$$\int\limits_0^x t\Big(J_\nu(\alpha t)\Big)^2 dt =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big(\alpha J'_\nu(\alpha x)\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)\Big(J_\nu(\alpha x)\Big)^2, \qquad \nu > -1. \quad (12.14)$$

Ниже, в пунктах 3 и 2 доказательства теоремы 12.11, будут выведены более общие формулы

$$\int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}(\mu_m r)dr = \frac{r\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r)\mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}'(\mu_m r)\right)\Big|_a^b}{\mu_m^2 - \mu_k^2}; \quad (12.15)$$

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu r)dr =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu r)\Bigg|_{r=a}^{r=b} + r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu r)\Bigg|_{r=a}^{r=b}\right]. \quad (12.16)$$

где $\mathbf{Z}(x)$ – произвольные решения уравнения Бесселя

$$(x\mathbf{Z}')' + \left(x - \frac{\nu^2}{x}\right)\mathbf{Z} = 0.$$

### 12.4. Поведение функций Бесселя и Неймана

Приведем для примера функции $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_{\frac{1}{2}}(x)$ и $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. Из определения 12.2 получаем:

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+0+1)k!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+0} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{[(2k)!!]^2}\cdot x^{2k}.$$

$$J_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1+1)k!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!k!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!!(2k)!!}\cdot x^{2k+1}.$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}+1\right)k!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}\right]=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{k+1}}{2^{2k}(2k+1)!!k!}\cdot x^{2k+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!!(2k)!!}\cdot x^{2k+1}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}\equiv\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin x.$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma\left(k-\frac{1}{2}+1\right)k!}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\frac{1}{2}}=\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}\right]=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{k}}{2^{2k}(2k-1)!!k!}\cdot x^{2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)!!(2k)!!}\cdot x^{2k}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k}\equiv\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\cos x.$$

А применив к найденным $J_{\pm\frac{1}{2}}(x)$ формулы (12.9), получим:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\frac{\sin x}{x},$$
$$J_{-n-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot x^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{xdx}\right)^n\frac{\cos x}{x}.$$

На рис. 10 и 11 приведены графики некоторых функций.

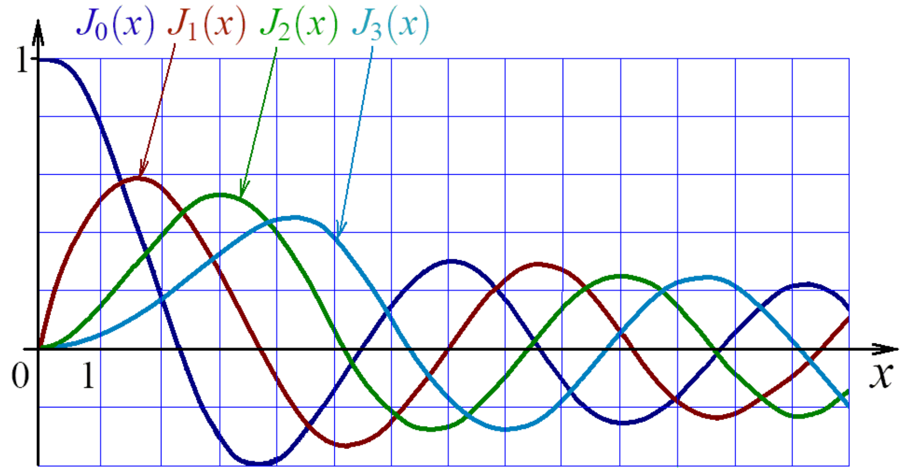



Рис. 10. Функции Бесселя

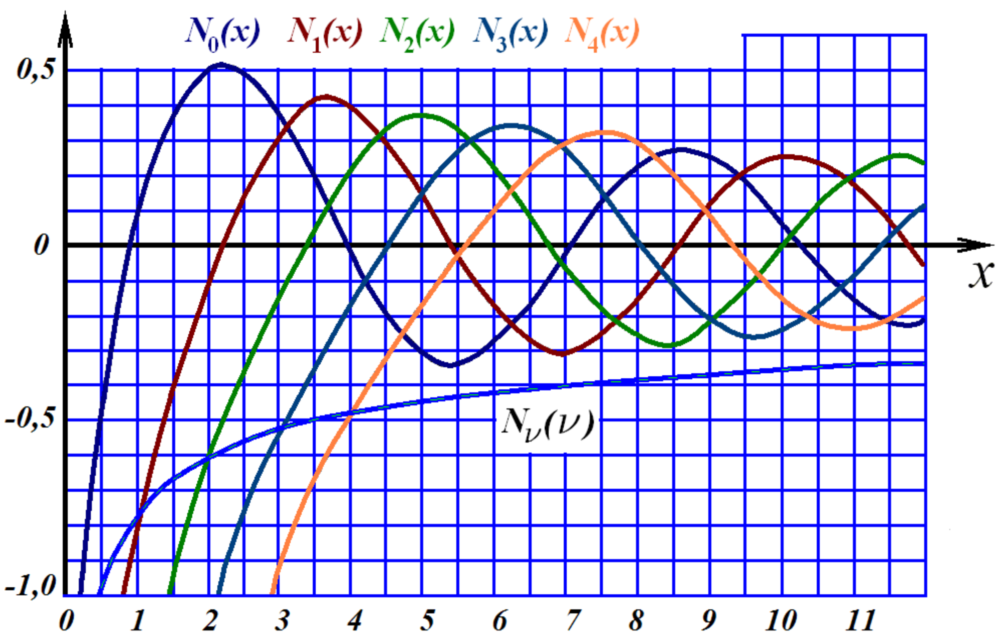



Рис. 11. Функции Неймана

Заметим, что

$$J_0(0) = 1, \qquad J_1(0) = 0.$$

Поэтому иногда говорят, что $J_0(x)$ есть аналог $\cos x$, а $J_1(x)$ – аналог $\sin x$, только $\sin x$ и $\cos x$ – решения уравнения

$$\mathbf{Z}''(x) + \mathbf{Z}(x) = 0,$$

в то время как функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ – решения уравнений

$$x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + x^2\mathbf{Z}(x) = 0$$

и

$$x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + \left(x^2 - 1\right)\mathbf{Z}(x) = 0.$$

Поскольку $J_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$, а $J_{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x$, функции $J_{\pm\frac{1}{2}}$ в окрестности нуля ведут себя следующим образом:

$$J_{\frac{1}{2}}(+0) = 0, \qquad\qquad J_{-\frac{1}{2}}(+0) = +\infty.$$

Известно асимпотическое поведение функций Бесселя при $x \to +\infty$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \underline{\underline{O}}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \qquad x \to +\infty.$$

То есть, не строго говоря, функции Бесселя убывают на бесконечности как $\text{const} \cdot \frac{\cos(x+\omega)}{\sqrt{x}}$.

**Теорема 12.2** (поведение в окрестности нуля).

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & \nu < 0, \ \ \nu \notin \mathbb{Z}; \\ 0, & \nu < 0, \ \ \nu \in \mathbb{Z}; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0; \end{cases} \qquad N_\nu(+0) = \infty, \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

*Доказательство.* При $\nu > -1$ по формуле (12.2) функция Бесслея ведет себя как $x^\nu$:

$$J_\nu(x) = \underline{\underline{O}}\left(x^\nu\right), \qquad x \to +0.$$

Отсюда следуют соотношения

$$J_\nu(+0) = \begin{cases} \infty, & -1 < \nu < 0; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu > 0. \end{cases}$$

Из формулы (12.10) следует, что при $\nu \in (-2, -1)$

$$J_\nu = \frac{2(\nu+1)}{x} J_{\nu+1} - J_{\nu+2} = \underline{\underline{O}}\left(x^\nu\right), \quad x \to +0.$$

Анналогично, при $\nu \in (-3, -2)$

$$J_\nu = \underline{\underline{O}}\left(x^\nu\right), \quad x \to +0$$

и так далее. Поэтому, справедливо соотношение

$$J_\nu(+0) = \infty, \quad \nu < 0, \ \ \nu \notin \mathbb{Z}.$$

Соотношение $J_\nu(+0) = 0, \quad \nu < 0, \ \ \nu \in \mathbb{Z}$ сразу следует из формулы (12.11)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

и доказанного $J_\nu(+0) = 0$ при $\nu > 0$.

Перейдем к формуле $N_\nu(+0) = \infty, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad x \to +0$.

Пусть сначала $\nu \notin \mathbb{Z}$. Тогда из представления (12.3)

$$N_\nu(x) = \frac{1}{\sin(\pi\nu)} \left[J_\nu(x)\cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)\right], \qquad \nu \notin \mathbb{Z}$$

следует, что при

$$\begin{array}{lll} \nu > 0 & \Longrightarrow & N_\nu(x) = \underline{\underline{O}}\left(x^{-\nu}\right), \qquad x \to +0, \\ \nu < 0 & \Longrightarrow & N_\nu(x) = \underline{\underline{O}}\left(x^{\nu}\right), \qquad x \to +0. \end{array}$$

В обоих случаях $N_\nu(+0) = \infty, \qquad x \to +0.$

Формулу $N_n(+0) = \infty, \quad n \in \mathbb{Z}$ докажем при помощи представления

$$N_n(x) = (-1)^n N_{-n}(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\Big(\frac{x}{2}\Big)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{n+k}\frac{1}{j}\right) - \frac{1}{\pi}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2k}.$$

При $n = 0$ получаем, что главное слагаемое – первое, и

$$N_0(x) = \underline{\underline{O}}\left(\ln x\right), \qquad x \to +0, \qquad \Longrightarrow \qquad N_0(+0) = \infty.$$

При $n \in \mathbb{N}$ главное слагаемое – третье, откуда

$$N_n(x) = \underline{\underline{O}}\left(x^{-n}\right), \qquad x \to +0, \qquad \Longrightarrow \qquad N_n(+0) = \infty.$$

При $(-n) \in \mathbb{N}$ используем равенство $N_n(x) = (-1)^n N_{-n}(x)$ и доказанное соотношение для натуральных $n$. □

### 12.5. Скалярное произведение, ортогональность и норма функций Бесселя

**Опр. 12.4. Скалярным произведением** на пространстве решений уравнения Бесселя мы будем называть следующее скалярное произведение в $L_2$ с весом $x$:

$$\Big(u,\ v\Big) = \int\limits_0^1 x u(x) v(x) dx. \tag{12.17}$$

Функции, скалярное произведение которых равно нулю, мы будем называть **ортогональными**.

**Нормой** функции $u(x)$ мы будем называть число

$$\|u\| = \sqrt{\Big(u,\ u\Big)} = \sqrt{\int\limits_0^1 x u^2(x) dx}. \tag{12.18}$$

Введем также обозначение: $L_\nu(u)$ для следующего оператора:

$$L_\nu(u) \equiv -(xu')' + \frac{\nu^2}{x} u.$$

**Теорема 12.3.**

*Пусть число $\nu > -1$, а числа $\mu_1$ и $\mu_2$ – действительные корни уравнения*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0, \qquad \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha+\beta > 0.$$

*Тогда функции $J_\nu(\mu_1 x)$ и $J_\nu(\mu_2 x)$ ортогональны:*

$$\int\limits_0^1 x J_\nu(\mu_1 x) J_\nu(\mu_2 x) dx = 0, \qquad\qquad \mu_1 \neq \mu_2,$$

$$\|J_\nu(\mu_1 x)\|^2 \equiv \int\limits_0^1 x J_\nu^2(\mu_1 x) dx = \frac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_1)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\mu_1^2}\right) J_\nu^2(\mu_1).$$

**Теорема 12.4** (аналог теоремы В.А. Стеклова)**.**

*Пусть функция $u(x) \in C^2(0,\,1]$, такая что $\frac{L_\nu(u)}{\sqrt{x}} \in L_2(0,\,1)$, удовлетворят граничным условиям $|u(+0)| < \infty$; $\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0$.*

*Тогда:* ***1.*** *В случае $|\alpha + |\nu| > 0$, функция $\sqrt{x}\ u(x)$ разлагается на интервале $(0,\,1)$ в ряд Фурье*

$$\sqrt{x}\ u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\nu \sqrt{x}\ J_\nu(\mu_k^\nu x),$$

$$a_k^\nu = \frac{\Big(u,\ J_\nu(\mu_k^\nu x)\Big)}{\|J_\nu(\mu_k^\nu x)\|^2} = \frac{\Big(u,\ J_\nu(\mu_k^\nu x)\Big)}{\frac{1}{2}\left[J'_\nu(\mu_k^\nu)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{[\mu_k^\nu]^2}\right) J_\nu^2(\mu_k^\nu)},$$

*где $\mu_k^\nu$ – корни уравнения $\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0$, $\quad \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha+\beta > 0$.*

***2.*** *В случае $\alpha = \nu = 0$, функция $\sqrt{x}\ u(x)$ разлагается на интервале $(0,\,1)$ в ряд Фурье*

$$\sqrt{x}\ u(x) = a_0\sqrt{x} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{x}\ J_0\left(\mu_k x\right), \tag{12.19}$$

$$a_0^0 = 2\int\limits_0^1 x u(x) dx, \quad a_k^0 = \frac{2}{\left[J_1\left(\mu_k\right)\right]^2 + \left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \int\limits_0^1 x u(x) J_0\left(\mu_k x\right) dx.$$

*где $\mu_k$ – положительные корни уравнения $J_1(\mu) = 0$.*

**Опр. 12.5.** Через $M$ мы будем обозначать следующий класс функций:

$$u(x) \in C^2(0,\ 1]; \qquad \frac{L_\nu(u)}{\sqrt{x}} \in L_2(0,\ 1).$$

**Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на** $[0,\ 1]$ мы будем называть задачу:
*Найти числа* $\lambda$ *и функции* $0 \not\equiv u(x) \in M$ из условий:

$$\begin{cases} -(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda x u, & x \in (0,\ 1), \quad \nu \geqslant 0; \\ |u(+0)| < \infty; \\ \alpha u(1) + \beta u'(1) = 0, & \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{cases} \tag{12.20}$$

При этом функции $u \not\equiv 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа $\lambda$ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.

**Теорема 12.5.**

**Утв. 1.** *Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и имеют кратность 1.*

**Утв. 2.** *Число* $\lambda = 0$ *есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда* $\nu = \alpha = 0$*, и ему соответствует собственная функция* $u(x) \equiv const$.

**Теорема 12.6.**
*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\mu_k^{(\nu)}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)} x\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где* $\mu_k^{(\nu)}$ *– корни уравнения*

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

*Доказательство.*

Во-первых, поскольку функции $J_\nu(x)$ – есть решения уравнения

$$x^2 J''(x) + xJ'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right) J(x) = 0,$$

то функции $J_\nu(\mu x)$ – есть решения уравнения

$$x^2 J''(\mu x) + xJ'(\mu x) + \left(\mu^2 x^2 - \nu^2\right) J(\mu x) = 0.$$

Поделим его на $(-x)$ и перенесем слагаемое $(-\mu^2 xJ(\mu x))$ в правую часть:

$$-xJ''(\mu x) - J'(\mu x) + \frac{\nu^2}{x}J(\mu x) = \mu^2 xJ(\mu x).$$

Объединив 2 первых слагаемых, получим:

$$-\left(xJ'(\mu x)\right)' + \frac{\nu^2}{x}J(\mu x) = \mu^2 xJ(\mu x).$$

Таким образом, функция $J_\nu(\mu x)$ есть решение уравнения

$$-(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu$$

с собственным значением $\lambda = \mu^2$.

Во-вторых, покажем, что $J_\nu(\mu x)$ удовлетворяет первому краевому условию. Поскольку, по определению 12.2, при $\nu > -1$

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\nu+1)k!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

то

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}\, x^\nu + \underline{\underline{O}}\left(x^{2+\nu}\right) = \underline{\underline{O}}\left(x^\nu\right), \qquad x \to +0.$$

В-третьих, покажем, что $J_\nu(\mu x)$ удовлетворяет второму краевому условию. Поскольку то, что $\mu_0$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha J_\nu(\mu_0) + \beta\mu_0 J'_\nu(\mu_0) = 0,$$

равносильно условию (достаточно сделать замену переменной $y = \mu x$)

$$\left.\left(\alpha J_\nu(y) + \beta\frac{dJ_\nu(y)}{dx}\right)\right|_{y=\mu_0} = 0,$$

то каждая из функций $J_\nu(\mu x)$ удовлетворяет второму краевому условию $\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0$.

Таким образом, все функции $J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}x\right)$ являются решениями задачи (12.20) с соответствующими собственными значениями $\mu_k^{(\nu)}$.

Осталось убедиться, что **каждое** решение задачи (12.20) есть функция $J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}x\right)$, где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения $\alpha J_\nu(\mu) + \beta\mu J'_\nu(\mu) = 0$.

Общее решение уравнения $x^2\mathbf{Z}''(x) + x\mathbf{Z}'(x) + \left(x^2 - \nu^2\right)\mathbf{Z}(x) = 0$ по следствию 12.1 (с. 292), имеет вид

$$\mathbf{Z}_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

Поэтому общее решение уравнения $-(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \mu^2 xu$[1] в силу рассуждений в начале данного доказательства, имеет вид

$$u_\nu(x) = c_1 J_\nu(\mu x) + c_2 N_\nu(\mu x), \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

При этом функции $N_\nu(+0) = \infty$ (см. теорему 12.2, с. 296). Следовательно, решение задачи (12.20), в силу первого краевого условия может иметь вид только

$$u_\nu(x) = c_1 J_\nu(\mu x).$$

Наконец, подставляя $J_\nu(\mu x)$ во второе краевое условие

$$\alpha u(1) + \beta u'(1) = 0,$$

получаем, что

$$\alpha J_\nu(\mu) + \beta J_\nu'(\mu) = 0.$$

□

### 12.7. Задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0,\ R]$

**Опр. 12.6. Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя на $[0,\ R]$** мы будем называть задачу: *Найти числа $\lambda$ и функции $0 \not\equiv u(r) \in M$* из условий:

$$\begin{cases} -(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u = \lambda r u, & r \in (0,\ R), \quad \nu \geqslant 0; \\ |u(+0)| < \infty; \\ \alpha u(R) + \beta u'(R) = 0, & \alpha,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0. \end{cases} \tag{12.21}$$

При этом функции $u \not\equiv 0$ называются **собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля**, а числа $\lambda$ – **собственными числами задачи Штурма-Лиувилля**.
Оператор левой части уравнения задачи Штурма-Лиувилля мы снова будем обозначать так:

$$L_\nu(u) \equiv -(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u.$$

Переформулируем основные для наших нужд теоремы для отрезка не единичной длины. Для этого сделаем замену переменной $x = \frac{r}{R}$, $r \in (0,\ R)$. Тогда для функции $\varphi(r) \equiv u\left(\frac{r}{R}\right)$ справедлива теорема:

[1] Мы рассматриваем только $\lambda = \mu^2 \geqslant 0$, поскольку в силу теоремы 12.5 отрицательных собственных значений задача Штурма-Лиувилля (12.20) не имеет.

**Теорема 12.7.**

**Утв. 1.** *Функция* $\sqrt{r}\ \varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\ R)$

$$\sqrt{r}\ \varphi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^\nu \sqrt{r}\ J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu r}{R}\right), \tag{12.22}$$

$$\alpha_k^\nu = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[J_\nu'\left(\mu_k^\nu\right)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{[\mu_k^\nu]^2}\right) J_\nu^2\left(\mu_k^\nu\right)} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_\nu\left(\frac{\mu_k^\nu r}{R}\right) dr,$$

*где* $\mu_k^{(\nu)} > 0$ *– корни уравнения* $\alpha R\, J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$

**Утв. 2.** *В случае* $\alpha = \nu = 0$*, функция* $\sqrt{r}\ \varphi(r)$ *разлагается в ряд Фурье на интервале* $(0,\ R)$

$$\sqrt{r}\ \varphi(r) = \alpha_0^0 \sqrt{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^0 \sqrt{r}\ J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right), \tag{12.23}$$

$$\alpha_0^0 = \frac{2}{R^2} \int\limits_0^R r\varphi(r) dr, \quad \alpha_k^0 = \frac{2}{\left[J_0\left(\mu_k\right)\right]^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \int\limits_0^R r\varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right) dr,$$

*где* $\mu_k$ *– положительные корни уравнения* $J_1(\mu) = 0.$

**Теорема 12.8.**

**Утв. 1.** *Все собственные числа задачи Штурма-Лиувилля неотрицательны и имеют кратность 1.*

**Утв. 2.** *Число* $\lambda = 0$ *есть собственное число задачи Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда* $\nu = \alpha = 0$*, и ему соответствует собственная функция* $u(r) \equiv const.$

**Теорема 12.9.**

*Все положительные собственные числа задачи Штурма-Лиувилля и соответствующие им собственные функции имеют вид:*

$$\lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\frac{\mu_k^{(\nu)} r}{R}\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

*где* $\mu_k^{(\nu)}$ *– положительные корни уравнения*

$$\alpha R\, J_\nu(\mu) + \beta\mu J_\nu'(\mu) = 0.$$

*Доказательство.*
В уравнении $-(ru')' + \frac{\nu^2}{r}u = \lambda ru$ сделаем замену переменной

$$r = Rx, \qquad u(r) = u(Rx) = w(x).$$

Тогда

$$u'(r) = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{w'(x)}{R}, \qquad u''(r) = \frac{d\,(Rw'(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} = \frac{w''(x)}{R^2},$$

откуда

$$(ru')' = ru''(r) + u'(r) = Rx \cdot \frac{w''(x)}{R^2} + \frac{w'(x)}{R} \equiv \frac{(xw')'}{R}.$$

Получим уравнение

$$-(xw')' + \frac{\nu^2}{x}w = \underbrace{\left(\lambda R^2\right)}_{\tilde{\lambda}}xw. \tag{12.24}$$

Краевое условие $|u(+0)| < \infty$ превратится в

$$|w(+0)| < \infty, \tag{12.25}$$

а краевое условие $\alpha u(R) + \beta u'(R) = 0$ примет вид

$$\alpha w(1) + \frac{\beta}{R}w'(1) = 0. \tag{12.26}$$

По теореме 12.6, задача (12.24) – (12.26) имеет следующие собственные числа и функции:

$$\tilde{\lambda}_k^{(\nu)} = \left[\mu_k^{(\nu)}\right]^2, \qquad \lambda_k^{(\nu)} = \left[\frac{\mu_k^{(\nu)}}{R}\right]^2, \qquad J_\nu\left(\mu_k^{(\nu)}x\right), \qquad k \in \mathbb{N},$$

где $\mu_k^{(\nu)}$ – корни уравнения $\quad \alpha J_\nu(\mu) + \dfrac{\beta}{R}\mu J_\nu'(\mu) = 0.$

Делая во всех этих выражениях обраную замену переменной и функциии

$$x = \frac{r}{R}, \qquad w(x) = u(r), \qquad u'(r) = \frac{w'(x)}{R},$$

получаем требуемое утверждение. $\square$

**Теорема 12.10** (аналог теоремы В.А. Стеклова).

*Пусть* $\{\mathbf{Z}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *– ортогональная система собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.*

*Тогда* $\forall f(x) \in C^2[a,\, b]$, *удовлетворяющей краевым условиям,* $\exists \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mathbf{Z}_k(x),$$

*причем последний ряд сходится к* $f(x)$ *абсолютно и равномерно на* $[a,\, b]$, *а для* $c_k$ *верно представление*

$$c_k = \frac{(f, \mathbf{Z}_k)}{\|\mathbf{Z}_k\|^2} = \frac{\int\limits_a^b x f(x) \mathbf{Z}_k(x) dx}{\int\limits_a^b x \mathbf{Z}_k^2(x) dx}.$$

**Теорема 12.11.**

*Пусть функция* $\mathbf{Z}(x)$ *есть решение на промежутке* $x \in (a,\, b)$ *уравнения*

$$x^2 \mathbf{Z}'' + x\mathbf{Z}' + \left(x^2 - \nu^2\right) \mathbf{Z} = 0,$$

$\mu_k$ *– положительные решения уравнения*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 J_\nu(\mu\, a) + \beta_1 \mu J'_\nu(\mu\, a) & \alpha_1 N_\nu(\mu\, a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu\, a) \\ \alpha_2 J_\nu(\mu\, b) + \beta_2 \mu J'_\nu(\mu\, b) & \alpha_2 N_\nu(\mu\, b) + \beta_2 \mu N'_\nu(\mu\, b) \end{vmatrix} = 0. \qquad (12.27)$$

*Тогда:* ***1.*** *Каждая из функций* $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$, $\quad k = \overline{1,\, \infty}$ *является решением задачи Штурма–Лиувилля*

$$\begin{cases} -\left(r\mathbf{X}'_k(r)\right)' + \frac{\nu^2}{r}\mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r \mathbf{X}_k(r), & a < r < b; \\ \alpha_1 \mathbf{X}_k(a) + \beta_1 \mathbf{X}'_k(a) = 0, \\ \alpha_2 \mathbf{X}_k(b) + \beta_2 \mathbf{X}'_k(b) = 0. \end{cases} \qquad (12.28)$$

*При этом функция* $\mathbf{X}_k(r)$ *имеет вид*

$$\mathbf{X}_k(r) = \Big(\alpha_1 N_\nu(\mu_k\, a) + \beta_1 \mu_k N'_\nu(\mu_k\, a)\Big) J_\nu(\mu_k r) - \\ - \Big(\alpha_1 J_\nu(\mu_k\, a) + \beta_1 \mu_k J'_\nu(\mu_k\, a)\Big) N_\nu(\mu_k r).$$

**2.** $$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int\limits_a^b r\mathbf{Z}^2(\mu r)dr =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(r^2 - \frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b} + r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b}\right].$$

**3.**

$$\Big(\mathbf{Z}(\mu_k r),\ \mathbf{Z}(\mu_m r)\Big) = 0, \qquad k \neq m.$$

*Доказательство.*

**1. а).** Проверим выполнение уравнения. В силу соотношений $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$ и $x = \mu_k r$ получаем:

$$\mathbf{X}_k'(r) = \mu_k \mathbf{Z}'(\mu_k r), \qquad \mathbf{X}_k''(r) = \mu_k^2 \mathbf{Z}''(\mu_k r)$$

и, подставляя эти выражения в уравнение $-\big(r\mathbf{X}_k'(r)\big)' + \frac{\nu^2}{r}\mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r\mathbf{X}_k(r)$, то есть

$$-r\mathbf{X}_k''(r) - \mathbf{X}_k'(r) + \frac{\nu^2}{r}\mathbf{X}_k(r) = \mu_k^2 r\mathbf{X}_k(r),$$

получаем:

$$-\frac{x}{\mu_k}\cdot\mu_k^2\mathbf{Z}_k''(x) - \mu_k\mathbf{Z}'(x) + \frac{\mu_k\nu^2}{x}\mathbf{Z}(x) = \mu_k^2\cdot\frac{x}{\mu_k}\mathbf{Z}_k(x).$$

Домножив это равенство на $\frac{x}{\mu_k}$, получим, что все $\mathbf{Z}_k(x)$ удовлетворяют уравнению

$$x^2\mathbf{Z}_k'' + x\mathbf{Z}_k' + \left(x^2 - \nu^2\right)\mathbf{Z}_k = 0, \qquad k = \overline{1,\ \infty}.$$

Поскольку проделанные операции обратимы, то при всех $k = \overline{1,\ \infty}$ функции $\mathbf{X}_k(r) = \mathbf{Z}(\mu_k r)$ есть решения уравнения из задачи Штурма–Лиувилля (12.28).

**1. б).** Поскольку общее решение уравнения Бесселя есть линейная комбинация

$$\mathbf{Z}(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x),$$

то выполнение краевых условий $\alpha_1\mathbf{X}_k(a) + \beta_1\mathbf{X}_k'(a) = 0$ и $\alpha_2\mathbf{X}_k(b) + \beta_2\mathbf{X}_k'(b) = 0$ означает

$$\begin{cases} c_1\Big(\alpha_1 J_\nu(\mu a) + \beta_1\mu J_\nu'(\mu a)\Big) + c_2\Big(\alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1\mu N_\nu'(\mu a)\Big) = 0, \\ c_1\Big(\alpha_2 J_\nu(\mu b) + \beta_2\mu J_\nu'(\mu b)\Big) + c_2\Big(\alpha_2 N_\nu(\mu b) + \beta_2\mu N_\nu'(\mu b)\Big) = 0. \end{cases}$$

То есть, в матричном виде,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 J_\nu(\mu a) + \beta_1\mu J_\nu'(\mu a) & \alpha_1 N_\nu(\mu a) + \beta_1\mu N_\nu'(\mu a) \\ \alpha_2 J_\nu(\mu b) + \beta_2\mu J_\nu'(\mu b) & \alpha_2 N_\nu(\mu b) + \beta_2\mu N_\nu'(\mu b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (12.29)$$

Отсюда, если нас интересуют нетривиальные решения задачи Штурма–Лиувилля (12.28), то матрица этой системы обязана быть вырождена, то есть нетривиальные решения задачи Штурма–Лиувилля существуют тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 J_\nu(\mu\, a) + \beta_1 \mu J'_\nu(\mu\, a) & \alpha_1 N_\nu(\mu\, a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu\, a) \\ \alpha_2 J_\nu(\mu\, b) + \beta_2 \mu J'_\nu(\mu\, b) & \alpha_2 N_\nu(\mu\, b) + \beta_2 \mu N'_\nu(\mu\, b) \end{vmatrix} = 0. \qquad (12.27)$$

Тогда решением системы (12.29) будет (с точностью до постоянного множителя) пара

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 N_\nu(\mu\, a) + \beta_1 \mu N'_\nu(\mu\, a) \\ -\alpha_1 J_\nu(\mu\, a) - \beta_1 \mu J'_\nu(\mu\, a) \end{pmatrix}. \qquad (12.30)$$

При этом функция $\mathbf{X}_k(r)$ имеет вид

$$\mathbf{X}_k(r) = \Big(\alpha_1 N_\nu(\mu_k\, a) + \beta_1 \mu_k N'_\nu(\mu_k\, a)\Big) J_\nu(\mu_k r) -$$
$$- \Big(\alpha_1 J_\nu(\mu_k\, a) + \beta_1 \mu_k J'_\nu(\mu_k\, a)\Big) N_\nu(\mu_k r).$$

**2.** Найдем норму $\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2$. Для этого домножим уравнение

$$x^2 \mathbf{Z}'' + x\mathbf{Z}' + \left(x^2 - \nu^2\right) \mathbf{Z} = 0$$

на $2\mathbf{Z}'$ и проинтегрируем по $[a,\, b]$. Получим:

$$2\int_a^b x^2 \mathbf{Z}''\mathbf{Z}' dx + 2\int_a^b x\left(\mathbf{Z}'\right)^2 dx + 2\int_a^b x^2 \mathbf{Z}\mathbf{Z}' dx - 2\int_a^b \nu^2 \mathbf{Z}\mathbf{Z}' dx = 0.$$

Это равенство перепишем в виде

$$\int_a^b x^2 \left[\left(\mathbf{Z}'\right)^2\right]' dx + 2\int_a^b x\left(\mathbf{Z}'\right)^2 dx + \int_a^b x^2 \left[\mathbf{Z}^2\right]' dx - \nu^2 \int_a^b \left[\mathbf{Z}^2\right]' dx = 0.$$

Первый и третий интегралы проинтегрируем по частям, а последний просто возьмем:

$$\left( x^2 \left(\mathbf{Z}'\right)^2 \Big|_a^b - 2\int_a^b x\left(\mathbf{Z}'\right)^2 dx \right) + 2\int_a^b x\left(\mathbf{Z}'\right)^2 dx +$$
$$+ \left( x^2 \mathbf{Z}^2 \Big|_a^b - 2\int_a^b x\mathbf{Z}^2 dx \right) - \nu^2\, \mathbf{Z}^2 \Big|_a^b = 0.$$

Сокращая интегралы и выражая $\int\limits_a^b x\mathbf{Z}^2dx$, получим формулу

$$\int\limits_a^b x\mathbf{Z}^2dx = \frac{1}{2}\left[\left(x^2-\nu^2\right)\mathbf{Z}^2(x)\Big|_{x=a}^{x=b} + x^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right].$$

Осталось сделать замену переменной $x=\mu r$, а пределы интеграла $\tilde{a}=\frac{a}{\mu}$ и $\tilde{b}=\frac{b}{\mu}$ снова обозначить за $a$ и $b$, и мы получим требуемую формулу (12.16)

$$\|\mathbf{Z}(\mu r)\|^2 = \int\limits_a^b r\mathbf{Z}(\mu r)dr = \frac{1}{2}\left[\left(r^2-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\mathbf{Z}^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b} + r^2\left(\mathbf{Z}'\right)^2(\mu r)\Big|_{r=a}^{r=b}\right].$$

**3.** Проверим ортогональность $\big(\mathbf{Z}(\mu_k r),\ \mathbf{Z}(\mu_m r)\big)=0, \qquad k\neq m$. Для этого домножим на $\mathbf{X}_m(r)$ уравнение

$$(r\mathbf{X}_k')' + \left(\mu_k^2 r - \frac{\nu^2}{r}\right)\mathbf{X}_k = 0,$$

домножим на $\mathbf{X}_k(r)$ уравнение

$$(r\mathbf{X}_m')' + \left(\mu_m^2 r - \frac{\nu^2}{r}\right)\mathbf{X}_m = 0$$

и вычтем одно из другого:

$$\mathbf{X}_m\left(r\mathbf{X}_k'\right)' - \mathbf{X}_k\left(r\mathbf{X}_m'\right)' + \left(\mu_k^2-\mu_m^2\right)r\mathbf{X}_k\mathbf{X}_m = 0.$$

Теперь проинтегрируем полученное равенство по $[a,\,b]$. Первые два интеграла берутся по частям:

$$r\mathbf{X}_m\mathbf{X}_k'\big|_a^b - \int\limits_a^b r\mathbf{X}_m'\mathbf{X}_k'dr - \left[r\mathbf{X}_k\mathbf{X}_m'\big|_a^b - \int\limits_a^b r\mathbf{X}_k'\mathbf{X}_m'dr\right] + \\ + \left(\mu_k^2-\mu_m^2\right)\int\limits_a^b r\mathbf{X}_k\mathbf{X}_m dr = 0$$

Таким образом,

$$\int\limits_a^b r\mathbf{X}_k\mathbf{X}_m dr = \frac{r\left(\mathbf{X}_m\mathbf{X}_k' - \mathbf{X}_k\mathbf{X}_m'\right)\big|_a^b}{\mu_m^2-\mu_k^2}.$$

При этом, во-первых, мы нигде не пользовались тем, что $\mu_k$, $\mu_m$ – собственные числа задачи Штурма–Лиувилля, так что эта формула верна при произвольных $\mu_k, \neq \mu_m \in \mathbb{R}$. Во-вторых, если переписать эту формулу для функций $\mathbf{Z}(\mu_k r) = \mathbf{X}_k(r)$ и $\mathbf{Z}(\mu_m r) = \mathbf{X}_m(r)$, то, учитывая, что $\mathbf{X}'_k(r) = \mu_k \mathbf{Z}'(\mu_k r)$ и $\mathbf{X}'_m(r) = \mu_m \mathbf{Z}'(\mu_m r)$, получим общую формулу

$$\int_a^b r\mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}(\mu_m r)dr = \frac{r\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r)\mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}'(\mu_m r)\right)\Big|_a^b}{\mu_m^2 - \mu_k^2}. \tag{12.15}$$

В случае, когда $\mu_k \neq \mu_m$ – корни уравнения (12.27), которое, как мы видели, равносильно выполнению краевых условий

$$\begin{cases} \alpha_1\mathbf{Z}(\mu_k a) + \mu_k\beta_1\mathbf{Z}'(\mu_k a) = 0, \\ \alpha_2\mathbf{Z}(\mu_k b) + \mu_k\beta_2\mathbf{Z}'(\mu_k b) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1\mathbf{Z}(\mu_m a) + \mu_m\beta_1\mathbf{Z}'(\mu_m a) = 0 \\ \alpha_2\mathbf{Z}(\mu_m b) + \mu_m\beta_2\mathbf{Z}'(\mu_m b) = 0 \end{cases}$$

получаем, что в случае $\beta_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} &\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r)\mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}'(\mu_m r)\right)\Bigg|^b = \\ &\qquad = \mathbf{Z}(\mu_m b)\underbrace{\mu_k\mathbf{Z}'(\mu_k b)}_{=-\frac{\alpha_2}{\beta_2}\mathbf{Z}(\mu_k b)} - \mathbf{Z}(\mu_k b)\underbrace{\mu_m\mathbf{Z}'(\mu_m b)}_{=-\frac{\alpha_2}{\beta_2}\mathbf{Z}(\mu_m b)} = \\ &\qquad = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}\Big(\mathbf{Z}(\mu_m b)\mathbf{Z}(\mu_k b) - \mathbf{Z}(\mu_k b)\mathbf{Z}(\mu_m b)\Big) \equiv 0. \end{aligned}$$

В случае $\beta_2 = 0$ картина еще проще:

$$\begin{aligned} &\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r)\mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}'(\mu_m r)\right)\Bigg|^b = \\ &\qquad = \mu_k\underbrace{\mathbf{Z}(\mu_m b)}_{=0}\mathbf{Z}'(\mu_k b) - \mu_m\underbrace{\mathbf{Z}(\mu_k b)}_{=0}\mathbf{Z}'(\mu_m b) \equiv 0. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left(\mu_k \mathbf{Z}(\mu_m r)\mathbf{Z}'(\mu_k r) - \mu_m \mathbf{Z}(\mu_k r)\mathbf{Z}'(\mu_m r)\right)\Bigg|_a \equiv 0.$$

Поэтому если $\mu_k \neq \mu_m$ – корни уравнения (12.27), значение интеграла

$$\int_a^b r\mathbf{X}_k(r)\mathbf{X}_m(r)dr = 0, \qquad \mu_k \neq \mu_m.$$

□

## 13. Примерные домашние задания и лабораторные работы

### Д/з 1 по УМФ для потока К-6

1) Вычислить преобразование Фурье $F(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$ для функций

$$\text{а)}\quad f(x) = e^{-\alpha|x|}, \qquad \text{б)}\quad f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$$

2) Найти соотношение между параметрами $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, при котором функция
$$u(x,t) = e^{\alpha x}\cos(\beta x + \gamma t)$$
является решением уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$. Записать это решение.

3) С помощью формулы Пуассона решить задачу Коши:
$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^x. \end{cases}$$

4) Решить задачу Коши, записав ответ через интеграл ошибок:
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad \text{где} \quad f(x) = \begin{cases} Q, & \alpha < x < \beta, \\ 0, & x \notin (\alpha,\beta). \end{cases}$$

5) **Лабораторная работа № 1.** Положив $a^2 = 1$, представить ответ в задаче 4 графически при помощи одного из компьютерных математических пакетов[1]. Изобразить решение при $t_0 = 0$, $t_1 = 10^{-4}$, $t_2 = 0.5$, $t_3 = 4$, $t_4 = 100$, $t_5 = 10000$ (можно заменить данные $t_k$ своими «выразительными» моментами времени). Параметры $\alpha$, $\beta$, $Q$ подобрать самостоятельно из соображений наибольшей наглядности. Оформить работу по схеме: титульный лист; рассчетные формулы; компьютерные графики.
Срок выполнения лабораторной работы — 2 недели.

Ответы:

1) а) $F(\xi) = \dfrac{2\alpha}{\xi^2 + \alpha^2}$, б) $F(\xi) = \dfrac{2i\sin\pi\xi}{\xi^2 - 1}$.

2) $\beta = \alpha$, $\gamma = 2\alpha^2$, $u(x,t) = e^{\alpha x}\cos(\alpha x + 2\alpha^2 t)$ для $\forall\alpha > 0$.

3) $u(x,t) = e^{x+t}$.

4) $u(x,t) = \dfrac{Q}{2}\left(\Phi\left(\dfrac{x-\alpha}{2a\sqrt{t}}\right) + \Phi\left(\dfrac{\beta - x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)$, где $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\tau^2}\,d\tau$.

[1] Рекомендуется использовать бесплатные пакеты SciLab, Maxima, Sage и им подобные.

## Д/з 2  по УМФ для потока К-6

1) Вычислить косинус-преобразование Фурье

$$F_c(\xi) = \int\limits_0^\infty f(x)\cos(\xi x)\,dx$$

для

а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$  б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

2) Решить задачу на полупрямой:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = \mu(t), \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Указание: $U(\xi,t) = \int\limits_0^\infty u(x,t)\cos(\xi x)\,dx.$

3) С помощью формулы Пуассона решить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

(Сложная, но решаемая задача!!!)

<u>Ответы</u>:

1) а) $F_c(\xi) = \dfrac{1}{\xi^2}\left(1 - \cos\dfrac{\pi\xi}{2}\right)$,  б) $F_c(\xi) = \dfrac{1}{(1-\xi^2)}\cos\dfrac{\pi\xi}{2}$.

2) $u(x,t) = -\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \dfrac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\,\mu(\tau)\,d\tau.$

3) $u(x,t) = x(1+4t)^{-3/2}\,e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$

## Д/з 3  по УМФ для потока К-6

1) В шаре $r < R$ пространства $\mathbf{R}^n$ найти функцию $u = u(r)$ из соотношений:
$$\Delta u(r) = r^{\alpha} \quad \text{при} \quad r < R, \qquad u|_{r=R} = 0.$$
Здесь $\alpha \geqslant 0$ — фиксированная степень.

2) В пространстве $\mathbf{R}^3$ найти все <u>непрерывные</u> функции $u = u(r)$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u(r) = \ln r$.

3) В кольце $a < r < b$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ найти функцию $u = u(r)$ из соотношений:
$$\Delta u(r) = 0 \quad \text{при} \quad a < r < b, \qquad u|_{r=a} = T, \qquad (u_r + u)|_{r=b} = U.$$
Здесь $0 < a < b < +\infty$; $T, U$ — фиксированные константы.

4) Начальная температура однородного шара $0 \leqslant r \leqslant R$ в пространстве $\mathbf{R}^3$ равна $T$. Поверхность шара поддерживается при постоянной температуре $P$. Найти температуру шара $u = u(r,t)$ при $t > 0$. (№ 708(а) из [1].)

<u>Ответы</u>:

1) $$u(r) = \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+2)} \left(r^{\alpha+2} - R^{\alpha+2}\right).$$

2) $$u(r) = \frac{r^2}{6}\left(\ln r - \frac{5}{6}\right) + C,$$ где $C$ — произвольная константа.

3) $$u(r) = T + \frac{(U-T)\, b \ln \frac{r}{a}}{1 + b \ln \frac{b}{a}}.$$ (Привести свой ответ к указанному виду!)

4) $$u(r,t) = P + \frac{2R(T-P)}{\pi r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, e^{-\left(\frac{\pi k a}{R}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{R}\, r\right).$$

<u>Указание</u>: искать $u = u(r,t)$ из задачи
$$\begin{cases} u_t = \dfrac{a^2}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \quad u(R,t) = P, \\ u(r,0) = T. \end{cases}$$

## Д/з 4   по УМФ для потока К-6

1) Проработать и законспектировать вывод фундаметальной формулы Грина:

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} E(y-x)\Delta u(y)\,dy + \int\limits_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}\, u(y) - E(x-y)\,\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y} \right) dS_y.$$

2) В кольце $1 < x^2 + y^2 \equiv r^2 < 9$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ найти функцию $u = u(r)$ из соотношений:

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r}, \qquad u|_{r=1} = \alpha, \qquad u|_{r=3} = \beta.$$

Здесь $\alpha$, $\beta$ — заданные константы.

3) При $n \geqslant 3$ в области $r > 1$ пространства $\mathbf{R}^n$ записать общее решение уравнения Пуассона $\Delta u(r) = r^{-\alpha}$ с различными $\alpha > 0$. Указать отличие в поведении решений на бесконечности в зависимости от $\alpha$.
(В случае затруднений разобрать лишь случай $n = \alpha = 3$.)

4) В шаре $0 \leqslant r \leqslant R$ пространства $\mathbf{R}^3$ решить задачу теплопроводности с постоянными источниками:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left( r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) + Q, \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \quad u(R,t) = 0, \\ u(r,0) = T. \end{cases}$$

Здесь $Q$, $T$ — заданные константы.   (Ср. с № 709(а) из [1].)

Ответы:

1) См. конспекты лекций.

2) $u(r) = r + (\alpha - 1) + (\beta - \alpha - 2)\,\dfrac{\ln r}{\ln 3}$.

3) $\alpha > n \quad \Longrightarrow \quad u(r) = \dfrac{1}{(\alpha - n)(\alpha - 2)\, r^{\alpha-2}} + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (решения ограничены);

$\alpha = n \quad \Longrightarrow \quad u(r) = -\dfrac{1}{(n-2)r^{n-2}}\,\ln r + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (ограничены);

$2 < \alpha < n \quad \Longrightarrow \quad u(r) = -\dfrac{1}{(n-\alpha)(\alpha-2)\, r^{\alpha-2}} + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (ограничены);

$\alpha = 2 \quad \Longrightarrow \quad u(r) = \dfrac{1}{n-2}\,\ln r + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (растут как логарифмы);

$\alpha < 2 \quad \Longrightarrow \quad u(r) = \dfrac{1}{(n-\alpha)(2-\alpha)}\, r^{2-\alpha} + \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2$ (растут как степени).

4) $u(r,t) = \dfrac{Q}{6}(R^2 - r^2) +$
$$\frac{2R}{\pi r}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(T - \frac{QR^2}{(\pi k)^2}\right)e^{-\left(\frac{\pi k}{R}\right)^2 t}\,\sin\left(\frac{\pi k}{R}\,r\right).$$

Указание: $u(r,t) = \dfrac{v(r,t)}{r}$, затем $v(r,t) = w(r) + z(r,t)$, где $w(r)$ — решение вспомогательной стационарной задачи.

## Д/з 5  по УМФ для потока К-6

1) В пространстве $\mathbf{R}^3$ с координатами $(x_1, x_2, x_3)$ построить функцию Грина для верхнего полупространства $x_3 > 0$.

2) Вывести формулу Пуассона для задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, \qquad x = (x_1, x_2, x_3), \qquad x_3 > 0, \\ u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2). \end{cases}$$

3) В полуплоскости $y > 0$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ с координатами $(x, y)$ решить по формуле Пуассона задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \qquad y > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases}$$

для следующих краевых функций

а) $\varphi(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x > 0; \end{cases}$  б) $\varphi(x) = \sin 2x;$  в) $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}.$

4) Решить задачу о нагревании шара:

$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 \leqslant r < R, \quad t > 0, \\ |u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = t, \\ u(r, 0) = 0. \end{cases}$$

Нарисовать примерный график решения (в зависимости от $r$) при больших $t$.

Ответы:

1) $$G(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|} + \frac{1}{4\pi|x-y^*|}, \quad \text{где} \quad y^* = (y_1, y_2, -y_3).$$

2) $$u(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_3}{2\pi} \iint\limits_{\mathbf{R}^2} \frac{\varphi(s,\tau)\, ds\, d\tau}{\big((x_1-s)^2 + (x_2-\tau)^2 + x_3^2\big)^{3/2}}.$$

3) а) $u(x,y) = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{2}$, б) $u(x,y) = e^{-2y} \sin 2x$,

в) $u(x,y) = \dfrac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}$.

Указания:
б) использовать интеграл Лапласа

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha s}{s^2 + \beta^2}\, ds = \frac{\pi}{\beta}\, e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

в) использовать теорию вычетов.

4) $$u(r,t) = t + \frac{1}{6}(r^2 - R^2) + \frac{2R^3}{\pi^3\, r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} e^{-\left(\frac{\pi k}{R}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\pi k}{R}\, r\right).$$

Указание: $u(r,t) = t + U(r,t)$,
затем воспользоваться идеей последней задачи из предыдущего д/з 4.

## Д/з 6 по УМФ для потока К-6

1) Найти объемный потенциал в пространстве $\mathbf{R}^3$, порожденный шаром $0 \leqslant r \leqslant R$ с плотностью $\rho(r) = R^2 - r^2$.

2) Найти ньютонов потенциал в $\mathbf{R}^3$, порожденный шаром $0 \leqslant r \leqslant 10$ с плотностью
$$\rho(r) = \begin{cases} 2, & 0 \leqslant r < 5, \\ 1, & 5 < r \leqslant 10. \end{cases}$$
Вычислить радиальную составляющую силы тяжести при $r = 9$ и $r = 11$. Где сила тяжести будет больше? Сколько процентов от $|F_N(11)|$ составляет $|F_N(9)|$?

3) Решить задачу теплопроводности в шаре:
$$\begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{t}{r}\sin\left(\dfrac{3\pi}{R}r\right), & 0 \leqslant r < R, \quad t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \quad u(R,t) = 0, \\ u(r,0) = 0. \end{cases}$$

<u>Ответы</u>:

1) $$u(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{60}(10R^2r^2 - 3r^4 - 15R^4), & 0 \leqslant r \leqslant R, \\ -\dfrac{2}{15}\dfrac{R^5}{r}, & r \geqslant R. \end{cases}$$

2) $$u_N(r) = \begin{cases} \left(250 - \dfrac{4}{3}r^2\right)\pi, & 0 \leqslant r \leqslant 5, \\ \left(200 + \dfrac{500}{3r} - \dfrac{2}{3}r^2\right)\pi, & 5 \leqslant r \leqslant 10, \\ \dfrac{1500}{r}\pi, & 10 \leqslant r < \infty. \end{cases}$$

$F_N(9) = -\dfrac{3416}{243}\pi, \quad F_N(11) = -\dfrac{1500}{121}\pi,$
$|F_N(9)|$ есть $113.4\,\%$ от $|F_N(11)|$.

3) $$u(r,t) = \frac{1}{r}\left(\left(\frac{R}{3\pi}\right)^4\left(e^{-\left(\frac{3\pi}{R}\right)^2 t} - 1\right) + \left(\frac{R}{3\pi}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{3\pi}{R}r\right).$$

## Д/з 7 по УМФ для потока К-6

1) Вычислить по определению и составить таблицу полиномов Лежандра

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dt^n} \left[(t^2-1)^n\right], \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4.$$

2) Проверить непосредственно, что $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} P_2(t)P_4(t)\, dt = 0.$

3) Выразить основные полиномы $1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ t^4$ через полиномы Лежандра.

4) Решить внутреннюю задачу Дирихле в трехмерном шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leqslant r < R, \\ u|_{r=R} = f(\cos\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ u = u(r,\theta) =? \end{cases}$$

5) Построить (без вычисления интегралов!) функцию $u(r,\theta)$, гармоническую в шаре радиуса $R$ и удовлетворяющую граничному условию:

а) $\quad u|_{r=R} = 3 + 5\cos^2\theta$; $\qquad$ б) $\quad u|_{r=R} = 3\cos^3\theta - \cos\theta$. (№ 790 а), в) из [1].)

6) Повторение: выразить через интеграл ошибок следующий интеграл

$$I(\sigma,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/(4t)}\, e^{\sigma|s|}\, ds, \qquad \sigma \in \mathbf{R}, \qquad t > 0.$$

Ответы:

1) $P_0(t) \equiv 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \quad P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t),$
$P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3).$

2) $$\int\limits_{-1}^{1} P_2(t)P_4(t)\,dt = \frac{1}{8}\int\limits_{0}^{1}(3t^2-1)\,(35t^4 - 30t^2 + 3)\,dt = \{\text{вычисления}\} = 0.$$

3) $1 = P_0(t), \quad t = P_1(t), \quad t^2 = \frac{1}{3}(P_0(t){+}2P_2(t)), \quad t^3 = \frac{1}{5}(3P_1(t){+}2P_3(t)),$
$t^4 = \frac{1}{35}(7P_0(t) + 20P_2(t) + 8P_4(t)).$

4) $$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant R,$$

где $$C_n = \frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(t)P_n(t)\,dt.$$

5) а) $u(r,\theta) = \dfrac{14}{3} + \dfrac{10}{3}\,P_2(\cos\theta)\left(\dfrac{r}{R}\right)^2;$
б) $u(r,\theta) = \dfrac{4}{5}\,P_1(\cos\theta)\,\dfrac{r}{R} + \dfrac{6}{5}\,P_3(\cos\theta)\left(\dfrac{r}{R}\right)^3.$

6) $$I(\sigma,t) = (1 + \Phi(\sigma\sqrt{t}\,))\,e^{\sigma^2 t}, \quad \text{где} \quad \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{z} e^{-\tau^2}\,d\tau.$$

## Д/з 8 по УМФ для потока К-6

1) Найти стационарную температуру $u(r,\theta)$ в шаре $r < R$, если на границе

$$u|_{r=R} = \begin{cases} A, & 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}, \\ B, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

где $A$, $B$ — константы.

2) Записать в декартовых координатах следующие шаровые и внешаровые функции:

$$P_2(\cos\theta)\, r^2, \qquad P_3(\cos\theta)\, r^3, \qquad \frac{P_1(\cos\theta)}{r^2}, \qquad \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}.$$

3) Найти гармоническую функцию $u = u(x,y,z)$ в шаре $r < R$, если $u|_{r=R} = z^3$.

4) Найти гармоническую функцию $u = u(x,y,z)$ вне шара при $r > R$, если $u|_{r=R} = z^3$.

5) Найти гармоническую функцию $u = u(x,y,z)$ в шаровом слое $1 < r < 2$, если

$$u|_{r=1} = 1, \qquad u|_{r=2} = z.$$

<u>Ответы</u>:

1) $$u(r,\theta) = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k}(0)\,\frac{4k+3}{2k+2}\,P_{2k+1}(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1},$$
$$0 \leqslant r \leqslant R.$$

2) $$P_2(\cos\theta)\,r^2 = \frac{1}{2}\,(2z^2 - x^2 - y^2), \quad P_3(\cos\theta)\,r^3 = \frac{1}{2}\,(2z^3 - 3z(x^2+y^2)),$$
$$\frac{P_1(\cos\theta)}{r^2} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.$$

3) $$u(x,y,z) = \frac{3}{5}\,z(R^2 - x^2 - y^2 - z^2) + z^3 = \frac{3}{5}\,z(R^2 - x^2 - y^2) + \frac{2}{5}\,z^3.$$

4) $$u(x,y,z) = \frac{3}{5}\,\frac{R^5\,z(x^2+y^2+z^2-R^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{R^7\,z^3}{(x^2+y^2+z^2)^{7/2}}.$$

5) $$u(x,y,z) = -1 + \frac{8}{7}\,z + \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} - \frac{8}{7}\,\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

## Д/з 9   по УМФ для потока К-6

1) Найти гармоническую функцию $u(x, y, z)$ при $r > R$, если $u|_{r=R} = R^2 - z^2$.

2) Решить общую внутреннюю задачу Дирихле в трехмерном шаре:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \qquad 0 \leqslant r < R, \\ u|_{r=R} = f(\theta, \varphi), \end{cases} \qquad\qquad u = u(r, \theta, \varphi) = ?$$

Полностью провести все действия методом разделения переменных.

3) Вычислить явно функции Лежандра $P_n^m(t) = (1 - t^2)^{m/2} \dfrac{d^m}{dt^m} P_n(t)$ для

$$P_1^1(t), \quad P_2^1(t), \quad P_2^2(t), \quad P_3^1(t), \quad P_3^2(t), \quad P_3^3(t).$$

4) Вычислить шаровые функции в сферических и декартовых координатах:

$$rP_1(\cos\theta), \quad rP_1^1(\cos\theta)\cos\varphi, \quad rP_1^1(\cos\theta)\sin\varphi,$$
$$r^2P_2^1(\cos\theta)\sin\varphi, \quad r^3P_3^2(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

5) Показать, что шаровая функция $u(r, \theta, \varphi) = r^n P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ представима в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = [r^m (\sin\theta)^m \cos m\varphi] \cdot \left[ r^{n-m} \frac{d^m}{dt^m} P_n(t) \right] \bigg|_{t=\cos\theta} \equiv v(r, \theta, \varphi) \cdot w(r, \theta).$$

6) Показать, что функция $v(r, \theta, \varphi)$ из задачи 5 есть однородный полином степени $m$ от $x$, $y$.

7) Показать, что функция $w(r, \theta)$ из задачи 5 есть однородный полином степени $(n - m)$ от $x$, $y$, $z$.

8) Показать, что шаровая функция из задачи 5 есть однородный полином степени $n$ от $x$, $y$, $z$.

Ответы:

1) $$u(x,y,z) = \frac{R^3}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{R^2\,(2z^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right).$$

2) $$u(r,\theta,\varphi) = A_0 +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{n}\left(A_n^m \cos m\varphi + B_n^m \sin m\varphi\right) P_n^m(\cos\theta)\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n,$$
$$A_n = \frac{(2n+1)}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$
$$A_n^m = \frac{(2n+1)}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\cos m\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta,$$
$$B_n^m = \frac{(2n+1)}{2\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\int_0^{2\pi}\sin m\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta,\varphi)\, P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta.$$

3) $$P_1^1(t) = \sqrt{1-t^2},\quad P_2^1(t) = 3t\sqrt{1-t^2},\quad P_2^2(t) = 3(1-t^2),$$
$$P_3^1(t) = \frac{3}{2}(5t^2-1)\sqrt{1-t^2},\quad P_3^2(t) = 15t(1-t^2),$$
$$P_3^3(t) = 15(1-t^2)^{3/2}.$$

4) $$r\cos\theta = z,\quad r\sin\theta\cos\varphi = x,\quad r\sin\theta\sin\varphi = y,$$
$$3r^2\cos\theta\sin\theta\sin\varphi = 3yz,\quad 15r^3\cos\theta\sin^2\theta\cos 2\varphi = 15z(x^2-y^2).$$

5) Указание: использовать определение $P_n^m(t)$.

6) Указание: $v(r,\theta,\varphi) \equiv r^m(\sin\theta)^m\cos m\varphi = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^m \cos m\varphi = \mathrm{Re}\,\left[(x+iy)^m\right]$ по ф-ле Муавра.

7) Указание: заметить, что
$$\frac{d^m}{dt^m}P_n(t) = \alpha\, t^{n-m} + \beta\, t^{n-m-2} + \gamma\, t^{n-m-4} + \ \ldots\ ;$$

затем
$$w(r,\theta) = \alpha\, r^{n-m}(\cos\theta)^{n-m} +$$
$$+\,\beta\, r^{n-m}(\cos\theta)^{n-m-2} + \gamma\, r^{n-m}(\cos\theta)^{n-m-4} + \ \ldots\ ;$$

далее отдельно рассмотреть случаи $n-m=2k$ и $n-m=2k+1$.

8) Указание: использовать результаты из задач 6 и 7.

## Д/з 10 по УМФ для потока К-6

1) Найти гармоническую функцию $u = u(x, y, z)$ в шаре $r < 2$, если

$$u|_{r=2} = z^4.$$

Записать результат «как в ответе». Проверить ответ подстановкой в исходное краевое условие (потренироваться для контрольной!).

2) Законспектировать основные сведения про *функции Бесселя*. (По книге [1], приложение IV «Некоторые специальные функции», пп. 2 и 4.)

3) **Лабораторная работа № 2.** «Графическое представление функций Бесселя».

I) Построить графики функций $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$ на общей координатной плоскости. Взять достаточно большой промежуток $0 \leqslant x \leqslant l$. Обратить внимание на взаимное расположение нулей; на поведение функций вблизи нуля и при $x \to +\infty$. (мспользовать встроенные в математический пакет функции Бесселя.)

II) Сравнить на нескольких графиках поведение встроенной функции $J_0(x)$ с частичными суммами степенного ряда

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Поэкспериментировать с малым, средним и большим количествами слагаемых. Убедиться, что есть некое «критическое» значение $x = x_0$, после которого функцию Бесселя практически нельзя восстановить при помощи степенного ряда.

III) При $x \to +\infty$ сравнить поведение встроенной функции $J_0(x)$ с частичными суммами асимптотического разложения

$$J_0(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!\,(8x)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4!\,(8x)^4} - \ldots \right] + \right.$$
$$\left. + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \left[\frac{1^2}{1!\,(8x)} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!\,(8x)^3} + \ldots \right] \right\}.$$

Взять приближения:

а) $J_0(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ (одно слагаемое);

б) $J_0(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \left\{\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{8x} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ (два слагаемых);

в) $J_0(x) \approx \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \left\{\left(1 - \dfrac{9}{2\,(8x)^2}\right) \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{1}{8x} \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$ (три слагаемых);

г) очень много слагаемых.

Ответ:

1) $$u(r,\theta) = \frac{16}{5}\,P_0(\cos\theta) + \frac{16}{7}\,P_2(\cos\theta)r^2 + \frac{8}{35}\,P_4(\cos\theta)r^4, \quad \text{откуда}$$

$$u(x,y,z) = \frac{16}{5} + \frac{8}{7}\,\left(2z^2 - x^2 - y^2\right) + \\ + \frac{1}{35}\,\left(8z^4 - 24z^2(x^2+y^2) + 3(x^2+y^2)^2\right).$$

## Д/з 11 по УМФ для потока К-6

1) Пусть $x^2 w''(x) + x w'(x) + (x^2 - \nu^2) w(x) = 0$. Полагая $w(x) = x^{\alpha} z(x)$, записать уравнение для функции $z(x)$. Отдельно рассмотреть случай $\alpha = \nu$.

2) Пусть $z'' + xz = 0$. Полагая $z(x) = \sqrt{x}\, w\left(\frac{2}{3}\, x\sqrt{x}\right)$, а затем $t = \frac{2}{3}\, x\sqrt{x}$, привести уравнение к некоторому уравнению Бесселя. Записать общее решение исходного уравнения через функции Бесселя.

3) Записать общее решение задачи о колебаниях круглой мембраны:

$$\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \qquad 0 < r < R, \qquad t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \qquad u(R,t) = 0, \\ u(r,0) = f(r), \qquad u_t(r,0) = g(r). \end{cases} \qquad u = u(r,t) = ?$$

Полностью провести все действия методом разделения переменных.

4) Решить следующие задачи теплопроводности в бесконечном цилиндре:

$$\text{а)} \quad \begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right), \quad 0 < r < R, \ \ t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \qquad u(R,t) = 1, \\ u(r,0) = \left(\dfrac{r}{R}\right)^2; \end{cases}$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} u_t = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + t, \quad 0 < r < R, \ \ t > 0, \\ |u(0,t)| < \infty, \qquad u(R,t) = 0, \\ u(r,0) = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1) $x^2z'' + (2\alpha+1)xz' + (x^2+\alpha^2-\nu^2)z = 0$; при $\alpha = \nu$ получаем $xz'' + (2\nu+1)z' + xz = 0$.

2) $$t^2w''(t) + tw'(t) + \left(t^2 - \frac{1}{9}\right)w(t) = 0,$$

$$z(x) = \sqrt{x}\left(C_1J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\right) + C_2J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,x\sqrt{x}\right)\right).$$

3) $$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\cos\frac{\mu_k t}{R} + B_k\sin\frac{\mu_k t}{R}\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right),$$

$$A_k = \frac{2}{R^2(J_1(\mu_k))^2}\int_0^R rf(r)\,J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right)\,dr,$$

$$B_k = \frac{2}{\mu_k R(J_1(\mu_k))^2}\int_0^R rg(r)\,J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right)\,dr,$$

где $\mu_k$ — положительные корни функции $J_0(x)$.

4) а) $$u(r,t) = 1 - 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3J_1(\mu_k)}\,e^{-(\mu_k/R)^2t}\,J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right);$$

б) $$u(r,t) = 2R^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^3J_1(\mu_k)}\left(t + \frac{R^2}{\mu_k^2}\left(e^{-(\mu_k/R)^2t} - 1\right)\right)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\,r\right).$$

## Список литературы


[1] *Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф.* **Сборник задач по уравнениям математической физики.** – М.: «Наука», 1984.

[2] *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* **Сборник задач по математической физике.** – М.: Физматлит, 2003.

[3] *Ватсон Дж. Н.* **Теория Бесселевых функций.** – М., Изд-во. иностр. лит-ры, 1949.

[4] *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* **Уравнения математической физики.** – М.: Физматлит, 2000.

[5] *Костин А. Б., Тихонов И. В., Ткаченко Д. С.* **Уравнения математической физики. Пособие по практическим занятиям. Часть I.** – М.: МИФИ, 2007.

[6] *Курант Р., Гильберт Д.* **Методы математической физики. Т. 1.** – М.-Л.: ГТТИ, 1933.

[7] *Курант Р., Гильберт Д.* **Методы математической физики. Т. 2.** – М.-Л.: ГТТИ, 1945.

[8] *Михайлов В. П.* **Дифференциальные уравнения в частных производных.** – М.: «Наука», 1983.

[9] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* **Уравнения математической физики.** – М.: Изд-во МГУ, 1999.

Андрей Борисович Костин

Иван Владимирович Тихонов

Дмитрий Сергеевич Ткаченко

# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## Пособие по практическим занятиям
## Часть II

Редактор Е. Е. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен Д. С. Ткаченко

Подписано в печать 18.11.2008. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$
Печ. л. 20,5. Уч.-изд. л. 20,5. Тираж 150 экз.

Изд. № 4/66. Заказ № ________.

Московский инженерно–физический институт
(государственный университет),
115409, Москва, Каширское ш., д. 31.

Типография издательства «Тровант»,
г. Троицк Московской области