МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.А. Короткова

ФАКУЛЬТЕТ
КИБЕРНЕТИКИ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КОМБИНАТОРИКЕ

Москва 2000

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М. А. Короткова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КОМБИНАТОРИКЕ

Издание 2-е, исправленное

Москва 2000

УДК 519.1(075)
К-68

Короткова М. А. **Сборник задач по комбинаторике.** М.: МИФИ, 2000. - 48 с.

Дано краткое изложение необходимой для решения задач теории. Сборник задач может использоваться как на семинарских занятиях, так и для самостоятельной работы.

Предназначен для студентов, изучающих комбинаторику.

Рецензент: доц. М. В. Сергиевский

Рекомендован к изданию редсоветом института

ISBN 5-7262-0026-8

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная брошюра является вторым изданием сборника задач по комбинаторике, вышедшего в 1997 году. Автором внесены необходимые исправления.

Сборник задач не претендует на полноту изложения необходимого теоретического материала. Теория излагается в минимальном объеме, чтобы не могла возникнуть терминологическая путаница и введенные обозначения понимались однозначно.

Значительная часть задач дается в разделе "Разные задачи", так как четкое отнесение задачи к определенному разделу часто дает указание на путь ее решения. Тем не менее, и для задач, отнесенных к определенным комбинаторным подходам, не исключается применение методов других разделов.

Для большей части задач даны ответы или пояснения к решению.

Список литературы, из которой взята большая часть задач сборника, приведен в конце пособия.

C_n^r $C(n,r)$

1. ПРАВИЛО СУММЫ. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B другими n способами, то выбор "либо A, либо B" может быть осуществлен $m+n$ способами. В этом правиле выборы A и B являются взаимно исключающими.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами, и после каждого из таких выборов объект B, в свою очередь, может быть выбран n способами, то выбор "A и B" в указанном порядке может быть осуществлен mn способами.

Правило произведения наиболее часто используется в тех случаях, когда порядок выбора является несущественным, т.е. когда A и B оказываются независимыми. Не следует, однако, игнорировать наличие такой зависимости.

ЗАДАЧИ

1.1. Сколькими способами можно выбрать 1 фрукт из 5 попарно различных апельсинов и 4 различных яблок?

1.2. Сколькими способами можно выбрать 1 предмет из 7 различных ручек и 4 попарно различных карандашей?

1.3. В розыгрыше первенства принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотые и серебряные медали?

1.4. На вершину горы ведут 7 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на тот же вопрос, если подъем и спуск осуществляются разными путями.

1.5. Из пункта A в пункт B можно попасть 5 различными способами, из пункта B в пункт C – двумя различными способами. Сколькими способами можно попасть из пункта A в пункт C, если пути из A в B и из B в C не имеют общих точек, кроме пункта B?

1.6. Из пункта A в пункт B можно добраться либо через пункт C, либо через пункт D. Из A в C можно добраться 3 способами, из C в B – 2 способами, из A в D – 4 способами, из D в B – 1 способом. Сколькими способами можно добраться из A в B, если пути через C и D не имеют общих точек?

1.7. Имеются 5 видов конвертов и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для отправки одного письма?

1.8. Сколькими способами можно выбрать одну согласную и одну гласную из слова "камзол"?

1.9. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:

а) ни одна из цифр не повторяется?

б) цифры могут повторяться?

в) числа должны быть нечетными?

2. СОЧЕТАНИЯ. БИНОМ НЬЮТОНА. СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Произвольное k-элементное подмножество n-элементного множества называется сочетанием из n элементов по k. Порядок элементов в сочетании не имеет значения. Сочетание из n элементов по k будем обозначать $C(n, k)$:

$C(n, k) = n!/(k!\,(n-k)!)$.

Сочетаниями из m элементов по n элементов с повторениями называются группы, содержащие n элементов, причем каждый элемент принадлежит одному из m типов. Сочетания из m элементов по n с повторениями будем обозначать $C_п(m, n)$.

Например, из трех элементов a, b, c можно составить такие сочетания по 2 с повторениями, как aa, ab, ac, bb, bc, cc.

$C_п(m, n) = C(m+n-1, n) = C(m+n-1, m-1)$.

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, a^{n-k} b^k.$$

Биномиальные тождества:

$C(n, k) = C(n, n-k)$;

$C(n+1, k) = C(n, k) + C(n, k-1)$;

$$\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = 2^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k) = 0.$$

ЗАДАЧИ

2.1. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 5?

2.2. Сколькими способами из 7 человек можно выбрать комиссию, состоящую из трех человек?

2.3. В турнире принимали участие n шахматистов и каждая пара встретилась один раз. Сколько партий было сыграно в турнире?

2.4. В комнате n лампочек. Сколько всего способов освещения комнаты, при которых горит ровно k лампочек? Сколько всего различных способов освещения комнаты?

2.5. Даны n точек, никакие 3 из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?

2.6. В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого n-угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

2.7. В выпуклом n-угольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие 3 из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделился при этом n-угольник?

2.8. Рассмотрим прямоугольную сетку квадратов $m \cdot n$ ("шахматный город", состоящий из $m \cdot n$ кварталов, разделенных $n-1$ горизонтальными и $m-1$ вертикальными улицами). Каково число различных кратчайших путей, ведущих из левого нижнего угла (точки (0,0)) в правый верхний угол (точку (m, n))?

2.9. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра больше предыдущей?

2.10. Сколько имеется четырехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

2.11. Имеется p белых и q черных шаров. Сколькими способами можно выложить в ряд все шары, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

2.12. Сколько имеется костей домино, если они имеют пометки от 0 до m?

2.13. Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение: $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$?

2.14. Сколько целых положительных решений имеет уравнение: $x_1+x_2+...+x_m=n$?

2.15. Сколько целых неотрицательных решений имеет неравенство: $x_1+x_2+...+x_m \le n$?

2.16. Сколько целых положительных решений имеет неравенство: $x_1+x_2+...+x_m \le n$?

2.17. А. Доказать, что $C(n, k+1) > C(n, k)$ при $k<(n-1)/2$ и $C(n, k+1) < C(n, k)$ при $k>(n-1)/2$.

Б. Указать наибольшее среди чисел $C(n, k)$ $\{k=1,..., n\}$.

2.18. Найти n, если известно, что в разложении $(1+x)^n$ коэффициенты при x^5 и x^{12} равны.

2.19. Сколько рациональных членов содержит разложение $(2^{1/2}+3^{1/4})^{100}$?

2.20. Чему равен коэффициент при $x^2y^3z^2$ в выражении $(x+y+z)^7$?

2.21. Доказать, что

$C(n, r) = C(n-1, r-1)+ C(n-2,r-1)+...+ C(r-1, r-1)$.

2.22. Доказать, что

$C(n, 0)\, C(m, k)+C(n,1)\, C(m-1, k-1)+...+C(n, k)\, C(m, 0)=C(m+n, k)$.

2.23. Доказать, что

$(C(n, 0))^2 + (C(n, 1))^2 +... + (C(n, n))^2 = C(2n, n)$.

2.24. Доказать, что

$C(n, 0) + (1/2)\cdot C(n, 1)+... +(1/(n+1))\cdot C(n, n) = (2^{n+1} - 1)/(n+1)$.

2.25. Доказать, что

$C(n, 1) + 2C(n, 1) +... + n\cdot C(n, n) = n \cdot 2^{n-1}$

2.26. Доказать, что

$C(n, 1) - 2C(n, 1) +... + (-1)^{n-1}n\cdot C(n, n) = 0$

2.27. Доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n/2} C(n,2k) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} C(n,2k+1) = 2^{n-1}$$

2.28. Доказать, что

$$C(n-2,\ k-2)+2C(n-3,\ k-2)+\ldots+(n-k+1)\,C(k-2,\ k-2)=C(n,\ k).$$

2.29. Доказать, что

$$nC(n,\ r)=(r+1)\,C(n,\ r+1)+rC(n,\ r).$$

$nC_n^r =$

3. ПЕРЕСТАНОВКИ И РАЗМЕЩЕНИЯ

Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до n, где n — число элементов множества.

Различные упорядоченные множества, которые различаются лишь порядком элементов (т.е. могут быть получены из одного и того же множества), называются перестановками этого множества. Число перестановок множества из n элементов будем обозначать $P(n)$:

$P(n) = n!$

Упорядоченные k-элементные подмножества множества из n элементов называются размещениями из n элементов по k. Различные размещения из n по k различаются набором элементов или их порядком. Число различных размещений из n по k обозначим $A(n, k)$:

$A(n, k) = n!/(n-k)!$

Число различных перестановок, которые можно составить из n элементов, среди которых имеется k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа,..., k_m элементов m-го типа, равно

$P(k_1, k_2, \ldots, k_m) = n!/(k_1!\, k_2! \ldots k_m!)$

Полиномиальная теорема

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_k\right)^n = \sum_{r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n,\, r_i \ge 0} P(r_1, r_2, \ldots r_k)\, a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_k^{r_k}$$

ЗАДАЧИ

3.1. Сколькими способами можно расставить на полке 4 различные книги?

3.2. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, чтобы каждое четное число имело четный номер?

3.3. Сколькими способами можно переставить числа $1,2,..., n$ так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом в порядке возрастания?

3.4. На собрании должны выступить 5 человек A, B, C, D, E. Сколькими способами их можно расположить в списке ораторов, если B должен выступить после A?

3.5. На собрании должны выступить 5 человек: A, B, C, D, E. Сколькими способами их можно расположить в списке ораторов, если A должен выступить непосредственно перед B.

3.6. Сколькими способами можно разместить n гостей за круглым столом?

3.7. Сколькими способами можно посадить за круглый стол n мужчин и n женщин, чтобы никакие два лица одного пола не сидели рядом?

3.8. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1,2,..., n\}$ таким образом, чтобы каждое число, кратное 2, и каждое число, кратное 3, имели номера, кратные 2 и 3?

3.9. Если повернуть лист бумаги на 180 градусов, то цифры 0, 1 и 8 не изменятся, цифры 6 и 9 перейдут друг в друга, а остальные цифры теряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, значение которых не изменится при повороте бумаги на 180 градусов?

3.10. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одноцветных ладей так, чтобы они не били друг друга?

3.11. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове "мама"? Напишите эти слова.

3.12. Сколько слов можно составить, переставляя буквы в слове "математика"?

3.13. Сколько пятибуквенных слов можно составить из букв a, b, c, если известно, что буква a встречается в слове не более двух раз, буква b — не более одного раза, буква c — не более трех раз.

3.14. Сколькими способами можно разделить $m+n+s$ предметов на 3 группы, чтобы в первой было m предметов, во второй — n предметов, в третьей — s предметов?

3.15. Сколькими способами можно разделить $3n$ различных предметов между тремя людьми так, чтобы каждому досталось ровно n предметов?

3.16. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "комбинаторика"?

3.17. Сколькими способами можно переставить буквы слова "опоссум" так, чтобы буква "п" шла непосредственно после буквы "о"?

3.18. Сколько нечетных чисел можно составить из цифр числа 3594 (каждую цифру можно использовать не более одного раза)?

3.19. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых три цифры четные и три — нечетные?

3.20. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых три цифры четные и три — нечетные, но допускаются "числа", начинающиеся с 0?

3.21. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "обороноспособность", чтобы две буквы "о" не шли подряд?

3.22. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "каракули" так, чтобы никакие две гласные не шли подряд?

4. МЕТОД ВКЛЮЧЕНИЯ И ИСКЛЮЧЕНИЯ. ЧИСЛО БЕСПОРЯДКОВ

Пусть $N(A)$ – число элементов множества A. Тогда

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = N(A_1) + N(A_2) + \ldots + N(A_n) -$$
$$\{ N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \ldots + N(A_1 \cap A_n) + \ldots + N(A_{n-1} \cap A_n)\} +$$
$$\{ N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \ldots + N(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)\} - \ldots + (-1)^{n-1}$$
$$N(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n),$$

или: если из N объектов $N(a_1)$ обладают свойством a_1, $N(a_2)$ обладают свойством $a_2, \ldots,$ $N(a_n)$ обладают свойством a_n, то число объектов, не обладающих ни одним из свойств $a_1, a_2 \ldots a_n$, равно

$$N(a_1', a_2', \ldots, a_n') = N - \sum_{i=1}^{n} N(a_i) + \sum_{i \neq j} N(a_i a_j) - \ldots + (-1)^n N(a_1 a_2 \ldots a_n).$$

Задача о беспорядках. Сколько существует перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n$ чисел $1, 2, \ldots, j, \ldots n$, таких, что $a_i \neq i$ при любом i от 1 до n?

Здесь для n элементов имеется $n!$ перестановок. $P(a_i)$ означает, что $a_i = i$. Тогда $N(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}) = (n-r)!$ – число перестановок, оставляющих на месте r определенных символов. В $\Sigma N(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r})$ $C(n, r)$ слагаемых, по числу возможных выборов $i_1, i_2, \ldots, i_r$ из $1, 2, \ldots, n$. Тогда число беспорядков равно

$$D_n = N(0) = n! - n \cdot (n-1)! + C(n,2) \cdot (n-2)! + \ldots + (-1)^r C(n, r) \cdot (n-r)! +$$
$$+ \ldots + (-1)^n \cdot 1 = n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C(n,r)(n-r)! = n! \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \cdot \frac{1}{r!}$$

(полагая, что $0! = 1$)

ЗАДАЧИ

4.1. Каждый ученик класса – или девочка, или блондин, или любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика-блондина, математику из них любят 12. Всего учеников, которые любят математику,– 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в классе?

4.2. В классе – 35 учащихся. Из них 20 посещает математический кружок, 11 – физический, 10 – ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают математический и физический кружки? Сколько только математический?

4.3. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка – 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного языка?

4.4. Староста класса дал такие сведения об учениках: "В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично, и в то же время занимаются спортом." Где ошибка?

4.5. В отделе НИИ работают несколько человек, каждый знает хотя бы один иностранный язык. Английский знают 6 человек, немецкий – 6, французский – 7. Четверо знают английский и немецкий, трое – французский и немецкий, двое – французский и английский, и один – все три языка. Сколько человек в отделе? Сколько знают только английский? Только французский?

4.6. На загородную прогулку выехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38, с ветчиной – 42; с сыром и колбасой – 28; при этом с колбасой и ветчиной – 31, с сыром и ветчиной – 26, все три вида бутербродов – 25 человек, а несколько вместо бутербродов захватили пирожки. Сколько человек взяли с собой пирожки?

4.7. Сколько чисел от 1 до 100 не делится на 2, 3, 5?

4.8. Сколько простых чисел от 1 до 100?

36 = (20)+(24+12) =

100 – 28 – 30 – 42

4.9. По пустыне идет караван из 9 верблюдов. Путешествие длится много дней, и, наконец, всем надоедает видеть впереди себя одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел не тот, что раньше?

4.10. На карусели катается n ребят. Они решили пересесть так, чтобы впереди оказался не тот, что был раньше. Сколькими способами они это могут сделать?

4.11. Сколькими способами можно переставить цифры числа 12 341 234 так, чтобы никакие 2 одинаковые цифры не шли подряд?

4.12. Сколькими способами можно переставить цифры числа 12 345 254 так, чтобы никакие 2 одинаковые цифры не шли подряд?

5. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что решение задачи с n предметами выражается через решение задачи с меньшим числом предметов с помощью соотношения, которое называется рекуррентным (возвратным).

Например, для чисел Фибоначчи рекуррентное соотношение имеет вид $g(n) = g(n-1) + g(n-2)$, что позволяет установить их значения.

Производящей функцией последовательности $a_1, a_2, \ldots$, называется сумма формального ряда $A(s)$:

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n.$$

Раскладывая $A(s)$ в ряд и находя коэффициенты при s^n, тем самым находим a_n.

ЗАДАЧИ

5.1. Найти формулу для сочетаний с повторениями, используя рекуррентные соотношения.

5.2. Найти число частей, на которые n окружностей делят плоскость, если каждые две окружности имеют общую хорду и никакие три окружности не пересекаются в одной точке.

5.3. Найти все числа Фибоначчи, не превышающие 1000.

5.4. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

5.5. Пусть $a_n = 1$. Найти производящую функцию.

5.6. Показать, что

$$1/(1-x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$$

5.7. Показать, что производящей функцией последовательности $a_n=a^n$ является $A(s)=1/(1-as)$.

5.8. $A(s)=(1+s)^n$. Найти a_k.

5.9. $a_n = C(n+k, k)$. Найти $A(s)$.

5.10. $a_n = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \le n \le k \\ C(n,k) \text{ при } n > k \end{cases}$ Найти $A(s)$.

5.11. Найти формулу числа сочетаний с повторениями методом производящих функций.

5.12. Найти все члены последовательности Фибоначчи, задаваемой законом $B_0=1$, $B_1=2$, $B_{n+1}=B_n+B_{n-1}$.

5.13. Производящая функция для сочетаний из трех предметов, в которые каждый предмет может входить 0 или 1 раз, имеет вид $(1+a_1s)(1+a_2s)(1+a_3s)=1+(a_1+a_2+a_3)s+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)s^2+a_1a_2a_3s^3$.

Тогда коэффициент при s^i, дает все возможные сочетания по i предметов трех видов с указанными ограничениями, а его значение при $a_i=1$ — число таких сочетаний.

Рассмотреть сочетания из 3 предметов, где первый и второй могут встречаться не более 2 раз, а третий - не более одного раза.

5.14. Рассмотреть все сочетания из трех предметов, в которых первый предмет встречается 2, 4 или 6 раз, второй — не более двух раз, третий — не более одного.

5.15. Вычислить производящую функцию последовательности

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ при } 0 \le n \le N \\ 0, \text{ при } n > N \end{cases}$$

5.16. Вычислить производящую функцию последовательности

$$a_n = \begin{cases} q^n, \text{ при } 0 \le n \le N \\ 0, \text{ при } n > N \end{cases}$$

5.17. Пусть производящая функция последовательности a_n равна $A(s)$. Найти производящую функцию последовательности b_n, если:

1) $b_n = 0$ при $n < r$, a_{n-r} при $n \geq r$;

2) $b_n = c \cdot a_n$;

3) $b_n = a_n + b$;

4) $b_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0$.

Логика

6. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предположим, что в некоторой ситуации имеется n возможных взаимоисключающих исходов. Припишем исходу X_i некоторое действительное число $p_i = p(X_i)$, $p_i \geq 0$ и $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Если событие E происходит при одном из исходов $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, и не происходит в других случаях, то определим вероятность события E равенством $p(E) = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k}$.

Существует много практических ситуаций, в которых представляется разумным рассматривать n исходов как равновозможные. Тогда принимаем $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$. При этом $p(E) = k/n$ и вычисление $p(E)$ становится чисто комбинаторной задачей.

Рассмотрим задачу. Пусть имеется N урн, пронумерованных от 1 до N. Разместим в урнах произвольным образом n шаров, где $n<N$. Найдем вероятность события E, состоящего в том, что каждая урна от 1 до n содержит ровно 1 шар. Эта вероятность зависит от двух условий:

1) различимы шары или нет;

2) имеет ли место принцип исключения, который не позволяет положить в урну второй шар, когда там уже есть один.

Если шары различимы и принцип исключения не имеет места, то

$$p(E) = n!/(N^n). \qquad (6.1)$$

Если шары различимы и принцип исключения имеет место, то

$$p(E) = n!/A(N, N-n) = 1/C(N, n) \qquad (6.2)$$

Если шары неразличимы и принцип исключения не имеет места, то

$$p(E) = 1/C(N+n-1, n) \qquad (6.3)$$

Если шары неразличимы и принцип исключения имеет место, то

$$p(E) = 1/C(N, n). \tag{6.4}$$

В статистической физике рассматривается совокупность из n частиц, которые могут быть в одном из N состояний. Макроскопическое состояние этой системы из n частиц задается вектором $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$, где x_i – число частиц в i-м состоянии. Вероятность макроскопического состояния зависит от того, различимы ли частицы и подчиняются ли они принципу исключения Паули, который гласит, что никакие две (неразличимые) частицы не могут находиться в одном и том же состоянии.

Если частицы различимы и не подчиняются принципу исключения, то это статистика Максвелла–Больцмана и вероятность состояния дается формулой (6.1). Если частицы неразличимы и не подчиняются принципу исключения, то это статистика Бозе–Эйнштейна (формула 6.3). Фотоны и пи-мезоны подчиняются этой статистике. Если частицы неразличимы и подчиняются принципу исключения, то это статистика Ферми–Дирака и вероятность дается формулой (6.4). Электроны, протоны и нейтроны подчиняются этой статистике.

ЗАДАЧИ

6.1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирают одну, а затем из оставшихся четырех – вторую. Найти вероятность того, что

а) в первый раз будет выбрана нечетная цифра;

б) во второй раз будет выбрана нечетная цифра;

в) оба раза будет выбрана нечетная цифра.

6.2. Монетку бросают до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Каждому возможному исходу, имеющемуся на n-м шаге, припишем вероятность $1/(2^{n-1})$. Найти вероятности событий:

а) опыт кончился до шестого бросания;

б) потребуется четное число бросаний.

6.3. Числа 1, 2,..., n расположены в случайном порядке. Найти вероятность того, что:

а) числа 1 и 2 расположены в указанном порядке;

б) числа 1, 2, 3 расположены в указанном порядке.

6.4. Игрок A бросает 6 игральных костей и выигрывает, если выпадет хотя бы одна единица; игрок В бросает 12 игральных костей и выигрывает, если выпадут хотя бы две единицы. У кого больше вероятность выиграть?

6.5. Найти вероятность p_r того, что среди r случайно выбранных цифр нет равных.

6.6. Найти вероятность того, что при случайном размещении n шаров по n ящикам ровно 1 ящик останется пустым.

6.7. Чему равна вероятность того, что среди k случайно выбранных цифр не встретится:

а) 0;

б) 1;

в) ни 0, ни 1;

г) хотя бы одна из цифр 0 и 1?

6.8. На автомобильной стоянке 12 мест расположено в ряд. Оказалось, что 8 мест заняты и 4 свободных примыкают друг к другу (событие E). Найти $p(E)$.

6.9. Человек пытается открыть дверь. Имеется n ключей, из которых один подходит. Он проверяет ключи последовательно (выбор без возвращений). Может потребоваться 1, 2,..., n испытаний. Найти вероятность того, что потребуется ровно k испытаний.

6.10. Некий профессор оштрафован 12 раз за незаконную ночную стоянку автомобиля. Все 12 штрафов налагались во вторник и четверг.

А. Найти вероятность этого события.

Б. Из 12 штрафов ни один не был наложен в воскресенье. Какова вероятность того, что в воскресенье не штрафуют?

6.11. Ящик содержит 90 хороших и 10 дефектных шурупов. Если использовать 10 шурупов, то какова вероятность, что среди них нет дефектных.

6.12. Чему равна вероятность того, что два бросания трех игральных костей дадут один и тот же результат, если кости:

а) различимы;

б) неразличимы.

6.13. Показать, что более вероятно получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей (событие A), чем хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух игральных костей (событие B).

6.14. Распространение слухов. В городе проживают $n+1$ человек. Один из них, узнав новость, сообщает ее другому, тот — третьему, и т.д., причем каждый человек для передачи новости случайным образом выбирает любого из жителей города. Найти вероятность того, что новость будет передана r раз:

а) без возвращения к человеку, который узнал ее первым;

б) без повторения сообщения кому-либо.

Решить ту же задачу, когда на каждом шаге новость сообщается одним человеком группе из N человек.

6.15. Найти вероятность того, что дни рождения:

а) 12 человек придутся на 12 разных месяцев года;

б) шести человек придутся в точности на 2 месяца (считаем все месяцы равновероятными).

6.16. Найти вероятность того, что для данных 30 человек шесть из 12 месяцев содержат по 2 дня рождения, и шесть — по три.

6.17. В чулане лежит n пар ботинок. Случайно выбираются $2r$ ботинок ($2r<n$). Чему равна вероятность того, что среди них:

а) не будет ни одной пары (p_0);

б) будет не менее одной пары (p_A);

в) ровно одна пара (p_1);

г) не менее двух пар (p_B)

д) ровно 2 пары (p_2)?

6.18. На автомобильной стоянке N мест расположены в один ряд. Прибывший на стоянку занимает одно из свободных мест (не с краю). По возвращении он обнаруживает, что занято ровно r мест. Какова вероятность, что оба соседних места свободны?

6.19. Группа из $2N$ мальчиков и $2N$ девочек делится на две равные части. Найти вероятность того, что каждая часть содержит одинаковое количество мальчиков и девочек.

6.20. Пусть a, b, c, d — целые числа, такие, что $a+b+c+d=13$. Найти вероятность $q(a, b, c, d)$ того, что один из игроков в бридж имеет a пик, b треф, c бубен и d черв (выбираются 13 из 52 карт).

6.21. Найти вероятность того, что у игрока в покер (выбираются 5 из 52 карт) будет:

а) флеш ройяль (10, валет, дама, король и туз одной масти);

б) каре (4 карты одного значения);

в) фул (3 карты одного значения и 2 – другого);

г) стрит (5 последовательных по значению карт произвольных мастей);

д) тройка (3 карты одного значения и 2 других различных значений);

е) две двойки (две пары карт одного значения в каждой паре и карта отличного от них значения);

ж) одна двойка (две карты одного значения и 3 карты других значений, различных между собой).

7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

7.1. Сколькими способами 7 человек могут расположиться в очереди в кассу?

7.2. В классе изучают 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник, если в этот день должно быть 6 различных уроков?

7.3. Сколько имеется пятизначных чисел, делящихся на 5?

7.4. На одной из боковых сторон треугольника взято m точек, на другой — n точек. Каждая из вершин при основании соединена прямыми с точками на противоположной стороне.

а) Сколько точек пересечения этих прямых образуется внутри треугольника?

б) На сколько частей делят треугольник эти прямые?

7.5. Сколько есть двузначных чисел, у которых все цифры четные?

7.6. Сколько есть пятизначных чисел, у которых все цифры нечетные?

7.7. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5? Найти сумму всех этих чисел.

7.8. Сколько существует трехзначных чисел, которые записываются с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 и делятся на 3?

7.9. Сколько есть пятизначных чисел, которые одинаково читаются справа налево и слева направо (например, 24342 и 17971)?

7.10. 5 мальчиков и 5 девочек садятся в ряд на 10 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с нечетными номерами, а девочки — на места с четными номерами. Сколькими способами это можно сделать?

7.11. Автомобильный номер составляют из одной, двух или трех букв и 4 цифр. Сколько можно составить номеров, используя 32 буквы русского алфавита?

7.12. В селении 1500 жителей. Доказать, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковые инициалы.

7.13. Сколько разных делителей имеет число $3^5 \cdot 5^4$?

7.14. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – различные простые числа. Сколько делителей имеет число $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – натуральные числа?

7.15. В прямоугольной матрице размером $m \cdot n$ a_{ij} из $\{-1, 1\}$. Известно, что произведение элементов в каждой строке и каждом столбце равно 1. Сколькими способами можно заполнить матрицу?

7.16. Пять девушек и три юноши играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды, если в каждой команде должно быть хотя бы по одному юноше?

7.17. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный? Если нет ограничений на цвет квадратов?

7.18. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной горизонтали и вертикали?

7.19. Флаг составляется из 13 горизонтальных полос красного, белого и синего цвета, причем любые две соседние полосы должны быть разных цветов. Сколькими способами это можно сделать?

7.20. На плоскости проведено n прямых так, что никакие 2 из них не параллельны и никакие 3 не пересекаются в одной точке.

А. Найти количество точек пересечения этих прямых.

Б. Сколько треугольников образуют эти прямые?

В. На сколько частей делят плоскость эти прямые?

Г. Сколько среди частей плоскости ограниченных и неограниченных?

7.21. В классе изучают $2n$ предметов. Все ученики учатся на 4 и 5. Никакие два ученика не учатся одинаково и ни о каких двух нельзя сказать, что один из них учится хуже другого. Показать, что число учащихся не превышает $C(2n, n)$.

7.22. Сколькими способами можно n одинаковых подарков раздать r детям:

а) без ограничений;

б) если каждый ребенок должен получить хотя бы один подарок?

7.23. Вычислить сумму

$$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \ldots + (-1)^m C(n, m).$$

7.24. Вычислить сумму

$$C(2n, 0) - C(2n-1, 1) + C(2n-2, 2) - \ldots + (-1)^n C(n, n).$$

7.25. Вычислить сумму

$$(C(n, 0))^2 - (C(n, 1))^2 + (C(n, 2))^2 - \ldots + (-1)^n (C(n, n))^2.$$

7.26. Вычислить сумму

$$C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \ldots .$$

7.27. Вычислить сумму

$$C(n, 1) + C(n, 3) + C(n, 5) + \ldots .$$

7.28. У мужа 12 знакомых – 5 женщин и 7 мужчин, а у жены – 7 женщин и 5 мужчин. Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин, чтобы 6 человек пригласила жена и 6 – муж? Считаем, что у мужа и жены нет общих знакомых.

7.29. Берутся домино от (0, 0) до (n, n). Показать, что число домино с суммой очков $n-r$ равно числу домино с суммой очков $n+r$. Найти это число.

7.30. Сколько различных браслетов можно сделать из 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров (в браслет входят все 18 камней)?

7.31. Сколькими способами можно из 5 одинаковых изумрудов, 6 одинаковых рубинов и 7 одинаковых сапфиров выбрать 3 камня для кольца?

7.32. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

7.33. Дана функция от n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Сколько существует различных частных производных порядка r?

7.34. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены оценки, если известно, что ни один из них не получил неудовлетворительную оценку?

7.35. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 2 разноцветные ладьи, чтобы они били друг друга? Не били друг друга?

7.36. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черные поля шахматной доски так, чтобы это положение было симметричным относительно центра доски?

7.37. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черные поля шахматной доски так, чтобы это положение было симметричным относительно центра доски, но симметрично каждой шашке стояла шашка противоположного цвета?

7.38. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "юпитер" так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке.

7.39. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "параллелизм" так, чтобы не менялся порядок гласных букв?

7.40. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "пастух" так, чтобы между двумя гласными были две согласные буквы?

7.41. Сколькими способами можно выбрать из слова "логарифм" две согласные и одну гласную букву? Та же задача, если среди выбранных есть буква "ф"?

7.42. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "огород" так, чтобы три буквы "о" не шли подряд?

7.43. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "огород" так, чтобы две буквы "о" не шли подряд?

7.44. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "перешеек" так, чтобы четыре буквы "е" не шли подряд?

7.45. Сколько чисел, меньших, чем миллион, можно записать с помощью цифр 8 и 9? С помощью цифр 7, 8, и 9?

7.46. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых сумма цифр четная (предполагается, что первая цифра отлична от нуля)? Сколько чисел от 1 до 999999 имеют четную сумму цифр?

7.47. Сколько имеется девятизначных чисел, у которых все цифры различны?

7.48. Сколькими способами можно переставить цифры числа 1 234 114 546 так, чтобы три одинаковые цифры не шли подряд? Две одинаковые цифры не шли подряд?

7.49. Сколькими способами можно представить число 1 000 000 в виде произведения трех сомножителей? Представления, различающиеся порядком сомножителей, считаем различными.

7.50. Сколькими способами можно представить число 1 000 000 в виде произведения трех сомножителей, если не учитывается порядок сомножителей?

7.51. n предметов расположены в ряд. Сколькими способами можно из них выбрать три предмета, чтобы никакие два не стояли рядом?

7.52. Сколькими способами можно разложить 10 книг на 5 бандеролей по две книги, если порядок бандеролей не учитывается?

7.53. Сколькими способами можно разложить 9 книг на 4 бандероли по 2 книги и 1 бандероль в одну книгу?

7.54. Сколькими способами можно разложить 9 книг на три бандероли по три книги?

7.55. Сколькими способами 3 человека могут разделить между собой 6 одинаковых яблок, 1 апельсин, 1 сливу, 1 лимон, 1 грушу, 1 айву и 1 финик, если:

а) никаких ограничений на способ раздела не накладывается;

б) каждый должен получить 4 фрукта?

7.56. Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой пачке было по 2 туза?

7.57. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку? 4 игрокам по 13 карт каждому?

7.58. Пусть дано множество U, такое, что $|U| = n$, $n \geq 3$. Сколько существует пар $\langle X, Y\rangle$ подмножеств множества U, если $X \subseteq Y$ и $|Y \setminus X| = 3$?

7.59. Сколько существует треугольников, вершины которых являются вершинами данного выпуклого шестиугольника?

• **7.60.** Сколько существует треугольников, каждая из сторон которых имеет длину, равную 4, 5 , 6 или 7 см?

7.61. Сколько существует прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых равна целому числу сантиметров от 1 до 10?

7.62. Найти число различных способов размещения i неразличимых предметов одного вида и j неразличимых предметов другого вида по k ящикам?

7.63. Сколько существует различных исходов совместного бросания i игральных костей (6 исходов на кость) и j монет?

7.64. На плоскости проведено n прямых линий, из которых через точку A проходят p линий, q линий проходят через точку B и, кроме точек A и B, никакие три прямые не проходят через одну точку, ни одна прямая не проходит через обе точки А и В, никакие две прямые не параллельны. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

7.65. К обеду приглашено n пар враждующих рыцарей. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом?

7.66. Требуется рассадить за круглым столом n супружеских пар таким образом, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие супруги не сидели рядом. Сколькими способами это можно сделать?

7.67. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной?

7.68. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три различных числа так, чтобы их сумма была четной?

7.69. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размером $n \times n$ n одноцветных ладей, чтобы они не били друг друга?

7.70. Сколькими способами можно расставить на доске размером $n \times n$ k одноцветных ладей $k \leq \min\{m,n\}$, чтобы они не били друг друга?

7.71. Сколькими способами можно расставить 20 книг в книжном шкафу с 5 полками, если каждая полка может вместить все 20 книг?

7.72. 30 человек голосуют по 5 предложениям. Сколькими способами могут распределиться голоса, если каждый голосует ровно за 1 предложение и учитывается только количество голосов, поданных за каждое предложение?

• **7.73.** Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

• **7.74.** Сколькими способами можно посадить рядом 3 англичан, 3 французов и 3 турок так, чтобы никакие 3 соотечественника не сидели рядом?

7.75. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 20 белых шашек так, чтобы это расположение переходило само в себя при повороте доски на 90 градусов?

7.76. Сколько шестизначных чисел содержат ровно 3 различные цифры?

7.77. Каких чисел от 1 до 10 000 000 больше: в записи которых встречается 1 или в записи которых не встречается 1?

7.78. Имеется 7 экземпляров одной книги, 8 – другой, и 9 – третьей. Сколькими способами их можно разделить между двумя лицами, чтобы каждый получил 12 книг?

ОТВЕТЫ И ПОЯСНЕНИЯ

Раздел 1

1.1. $5+4=9$.

1.2. $7+4=11$.

1.3. Золотую медаль может получить одна из 16 команд. После того как владелец золотой медали определен, серебряную медаль может получить одна из оставшихся 15 команд. Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая и серебряная медали, равно $16 \cdot 15 = 240$.

1.4. Если дороги могут повторяться, то дорогу на гору турист может выбрать 7 способами, и дорогу с горы также 7 способами, всего $7 \cdot 7 = 49$ способов. Если дороги различны, то $7 \cdot 6 = 42$ способа.

1.5. $5 \cdot 2 = 10$.

1.6. $3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10$.

1.7. 20.

1.8. $4 \cdot 2=8$.

1.9. а) Первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (не 0), после выбора первой цифры вторую можно выбрать 5 способами, третью — 4 способами, четвертую — 3. Общее число способов $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$;

б) первой цифрой может быть одна из цифр 1, 2, 3, 4, 5, каждая из оставшихся может быть любой из шести. Всего $5 \cdot 6^3 = 1080$;

в) если цифры могут повторяться, то $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$ чисел; если цифры не должны повторяться, то $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 144$ числа.

Раздел 2

2.1. Число способов равно числу трехэлементных подмножеств множества из 5 элементов: $C\,(5, 3)= 5!/(3!\,2!)= 10$.

2.2. $C\,(7, 3)=35$.

2.3. Партий было столько, сколько можно выделить двухэлементных подмножеств в множестве из n элементов: $C(n, 2) = n(n-1)/2$.

2.4. Способов освещения комнаты, когда горит k лампочек, $C(n, k)$. Всего способов освещения комнаты:

$$C(n, 1) + C(n, 2) + \ldots + C(n, n-1) + C(n, n) = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) - C(n, 0) = 2^n - 1.$$

2.5. $C(n, 2)$.

2.6. Каждой точке пересечения диагоналей соответствуют 4 вершины n-угольника, а каждым 4 вершинам n-угольника соответствует 1 точка пересечения диагоналей. Поэтому число всех точек пересечения диагоналей равно числу способов выбрать среди n вершин 4 различных вершины: $C(n, 4) = n(n-1)(n-2)(n-3)/24$.

2.7. Когда не проведено ни одной диагонали, имеем 1 часть. Если последовательно проводить диагонали, заметим, что при проведении диагонали число частей увеличивается на 1 плюс количество точек пересечения с теми диагоналями, которые уже проведены. Поэтому число частей, которые получаются после проведения всех диагоналей, равно 1 плюс число точек пересечения диагоналей плюс число диагоналей. Число точек пересечения диагоналей равно $C(n, 4)$. Число диагоналей — $n(n-3)/2$.

$$1 + C(n, 4) + n(n-3)/2 = (n-1)(n-2)\left(n^2 - 3n + 12\right)/24.$$

2.8. $C(m+n, n) = C(m+n, m)$. Каждый кратчайший путь состоит из $m+n$ отрезков, из них n горизонтальных и m вертикальных. Разные пути различаются порядком чередования отрезков. Поэтому число путей равно числу способов выбрать из $m+n$ отрезков m вертикальных (или n горизонтальных).

2.9. $C(9, 4) = 126$.

2.10. $C(10, 4) = 210$.

2.11. Расположим p белых шаров в ряд. Имеется $p+1$ место для расположения q черных шаров. Всего получаем $C(p+1, q)$ способов расположения. Задача имеет решение при $q \leq p+1$.

2.12. $C_п(m+1, 2) = C(m+2, 2) = (m+2)(m+1)/2$.

2.13. Решение уравнения соответствует выбору n элементов (с повторениями) m типов:

$C_{п}(m, n) = C(m+n-1, n)$

2.14. $C_{п}(m, m-n) = C(n-1, n-m) = C(n-1, m-1)$. Решение существует при $n \geq m$.

2.15. Число целых неотрицательных решений неравенства $x_1+x_2+...+x_m \leq n$ соответствует числу неотрицательных целых решений уравнения $x_1+x_2+...+x_{m+1}=n$. $C_{п}(m+1, n) = C(m+n, m)$.

2.16. Число целых положительных решений неравенства $x_1+x_2+...+x_m \leq n$ соответствует числу целых неотрицательных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_{m+1}=n-m$. $C_{п}(m+1, n-m)= C(n, n-m)=C(n, m)$.

2.18. 17; $n!/((n-5)!5!)=n!/((n-12)!12!)$

2.19. 26.

2.21. Разобьем все r элементные подмножества множества $A=\{a_1,a_2,... a_n\}$ (их $C(n, r)$) на классы $T(1)$, $T(2)$,.., $T(n-r+1)$, где классу $T(k)$ принадлежат подмножества, в которых наименьший индекс элемента равен k. $T(k)$ состоит из $C(n-k, r-1)$ подмножеств. Отсюда получаем требуемое равенство.

2.22. Воспользоваться равенством $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$.

2.23. Положить в равенстве задачи 2.22 $m = n$.

2.24. Так как $(n+1)/(k+1) \cdot C(n, k)= C(n+1, k+1)$

$$C(n, 0) + 1/2\, C(n, 1) + ... + 1/(n+1) \cdot C(n, n) =$$

$$1/(n+1)(C(n+1, 1) + C(n+1, 2)+...+C(n+1, n+1))=1/(n+1)(2^{n+1}-1).$$

2.25. Использовать равенство $k\,C(n, k)=n\,C(n-1, k-1)$.

2.26. Использовать $(1-1)^n=0$.

2.28. Рассмотрим все k элементные подмножества множества $\{1,..., n\}$. Разобьем их на классы $T(k-1)$, $T(k)$,..., $T(n-1)$, отнеся к классу $T(m)$ множества, для которых максимальная разность двух элементов равна m. Будем считать, что элементы упорядочены в порядке возрастания их значений. Каждое подмножество, входящее в $T(m)$, начинается с некоторого i и кончается $i+m$, остальные k-2 элемента выбираются из $i+1,...,i+m-1$ (это можно сделать C(m, k-2) способами). Следовательно, $T(m)$ состоит из (n-m)C(m-1, k-2) подмножеств. Поэтому

$$C(n,k)=\sum_{m=k-1}^{n-1}(n-m)C(m-1,k-2)$$

Раздел 3

3.1. P(4)=24.

3.2. $(n!)^2$.

3.3. P(n-2)=(n-2)!.

3.4. 3·4·5=60.

3.5. P(4)=24.

3.6. $n!$.

3.7. $2(n!)^2$.

3.8. $\left[\frac{n}{6}\right]!\left(\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{6}\right]\right)!\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{6}\right]\right)!\left(n-\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]\right)!$

3.9. 300.

3.10. 8!=40320. Так как ладей 8, то все вертикали и все горизонтали будут заняты. Поэтому достаточно для каждой из вертикалей выбрать одну из возможных горизонталей.

3.11. P(2, 2)=4!/2!2!=6.

3.12. P(2, 3, 2, 1, 1, 1)=151 200.

3.13. P(2, 1, 2)+P(1, 1, 3)+P(2, 3)=60.

3.14. P(n, m, s).

3.15. P(n, n, n).

3.16. P(2, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 1, 1)=13!/16=389 188 800.

3.17. 6!/2!=360.

3.18. 3·3·2+3·3·2+3·3+3=48.

3.19. Мест для нечетных цифр - C (6, 3). Каждую цифру можно выбрать 5-ю способами. Всего - $20\cdot5^6$ чисел. Из них с 0 начинаются $10\cdot5^5$ чисел. Значит, условию задачи отвечают $90\cdot5^5$= 281250 чисел.

3.20. $C(6, 3) \cdot 5^6 = 312\,500$.

3.21. $P(2, 3, 1, 1, 2, 1, 1) \cdot C(12, 7) = 1\,317\,254\,400$

3.22. $P(2, 1, 1) \cdot C(5, 4) \cdot P(2, 1, 1) = 720$.

Раздел 4

4.1. N (Д) — число девочек, N (М) — число любящих математику, N (Б) — число блондинов, тогда

N (Д U Б U М) = N (Д) + N (М) + N (Б) - N (Д & М) - N (Б & М) - N (Б & Д) + N (Д & М & Б) = 20 + 24 + 17 - (12 + 6 + 12) + 1 = 32.

4.2. N = 35 - (20 + 11) + N (М & Ф); N (М & Ф) = 6;

N(М\Ф) = 20 - 6 = 14.

4.3. 20.

4.4. Проверим, сколько девочек не занимается спортом и не учатся на хорошо и отлично. Пусть М - мальчики, О -учащиеся на хорошо и отлично, С — спортсмены. Тогда N (М) = 25, N (О) = 30, N (С) = 28, N (МО) = 16, N (МС) = 18, N (ОС) = 17, N (МОС) = 15, N (М'О'С') = 45 - (25 + 28 + 30) + + (16 + 18 + 17) - 15 = -2.

4.5. 11, 1, 3.

4.6. 25.

4.7. Пусть $N(a)$ — число чисел, делящихся на a, тогда

N (2'3'5') = N - (N (5) + N (3) + N (2)) + (N (2 · 3) + + N (3 · 5) + N (2 · 5)) - N (2 · 3 · 5).

Так как N (a) = [N/a], N (2'3'5') =100 - 50 - 33 - 20 + 16 + 10 + 6 - 3 = 26.

4.8. Все составные числа от 1 до N делятся на простые числа от 1 до $[N^{1/2}]$. N [2'3'5'7'] = 100 - (N (2) + N (3) + N (5) + N (7)) + (N (2 · 3) + N (2 · 5) + N (3 · 5) + N (2 · 7) + N (3 · 7) + N (5 · 7)) - (N (2 · 3 · 5) + N (2 · 5 · 7) + N (3 · 5 · 7) + N (2 · 3 · 7)) + N (2 · 3 · 5 · 7) = 100 - (50 + 33 + 20 + 14) + (16 + 10 + 6 + 7 +4+2) - (3 + 1 + 0 + 2) + 0 = 22.
$N_{пр}$=22+4-1=25.

4.9. Надо из всех возможных перестановок вычесть те, в которых сохраняется не менее одной пары (их $C(8, 1) \cdot P(8)$), добавить те, в которых сохраняется не менее двух пар (их $C(8, 2) \cdot P(7)$) и т.д, итого:

$P(9) - C(8, 1) \cdot P(8) + C(8, 2) \cdot P(7) - C(8, 3) \cdot P(6) + C(8,4) \cdot P(5) - C(8, 5) \cdot P(4) + C(8, 6) \cdot P(3) - C(8, 7) \cdot P(2) + C(8, 8) \cdot P(1) =$ 148 329.

4.10. Здесь всего пересадок - $(n - 1)!$ (так как карусель вертится). Запрещенных пар - n: (1, 2), (2, 3),..., $(n - 1, n)$, $(n, 1)$; искомое число пересадок:

$P(n - 1) - C(n, 1) \cdot P(n - 2) + C(n, 2) \cdot P(n - 3) - ... + (-1)^n C(n, n)$.

4.11. $P(2, 2, 2, 2) - C(4, 1) \cdot P(2, 2, 2, 1) + C(4, 2) \cdot P(2, 2, 1, 1) - C(4, 3) \cdot P(2, 1, 1, 1) + P(1, 1, 1, 1) = 624$.

4.12. $P(2, 2, 2, 1, 1) - C(3, 1) \cdot P(2, 2, 1, 1, 1) + C(3, 2) \cdot P(2, 1, 1, 1, 1) - P(1, 1, 1, 1, 1) = 2220$.

Раздел 5

5.1. Пусть надо найти число сочетаний из n предметов $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ по r с повторениями. Обозначим это число $f(n, r)$. Каждое из сочетаний содержит, либо не содержит a_1. Число сочетаний, не содержащих a_1, $f(n - 1, r)$. Сочетаний, содержащих a_1, $f(n, r - 1)$. Отсюда $f(n, r) = f(n-1, r) + f(n, r-1)$. Тогда $f(n, r) = f(n, r-1) + f(n-1, r) = f(n, r-1) + f(n-1, r-1) + ... + f(2, r-1) + f(1, r)$. Очевидно, что $f(n, 1) = n$, $f(1, r) = 1$. При $r = 2$ $f(n, 2) = C(n + 1, 2)$. Повторяя эти шаги, получаем $f(n, r) = C(n + r - 1, r)$.

5.2. Пусть $A(n)$ - искомое число частей. Проведем $(n + 1)$-ю окружность. Она пересечется с каждой из n окружностей в двух точках и разделится точками пересечения на $2n$ дуг, каждая из которых разделит на две части одну из частей, имеющихся в $A(n)$, значит, $A(n + 1) = A(n) + 2n$. Отсюда: $A(n) = A(n - 1) + + 2(n - 1) = 2(n - 1) + 2(n - 2) + ... + 2 \cdot 1 + A(1)$, но $A(1) = 2$, следовательно, $A(n) = n^2 - n + 2$.

5.3. 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987.

5.4. $S_n = 1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + ... + 1/(n \cdot (n + 1)) = (1 - 1/2) + + (1/2 - 1/3) + ... + (1/n - 1/(n+1)) = 1 - 1/(n + 1)$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$$

5.5. $\sum_{k=0}^{\infty} s^k = 1+s+\ldots+s^k+\ldots=1/(1-s)$, т.к. $\sum_{k=0}^{n} s^k$ $(1-s^n)/(1-s)$, а $\lim\limits_{n\to\infty}(1-s^n)/(1-s)=1/(1-s)$.

5.6. Так как $1/(1-x)^{n+1} = 1/(1-x)^n\cdot 1/(1-x)=(1 + C(n, 1)\cdot x+C(n,2)\cdot x^2+\ldots+C(n+k-1)\cdot x^k + \ldots)(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)$, коэффициент при x^k равен $C(n-1, 0)+C(n, 1)+\ldots+C(n+k-1, k)= C(n+k, k)$ (см. задачу 2.21).

5.8. $a_k=C(n, k)$ при $k\le n$, 0 при $k>n$.

5.9. $A(s)= 1/(1-s)^{n+1}$ (следует из задачи 5.6).

5.10. $A(s)=s^k/(1-s)^{k-1}$. Действительно,

$$A(s)=\sum_{n=k}^{\infty}C(n,k)s^k = s^k\sum_{i=0}^{\infty}C(k+i,i)s^i=\frac{s^k}{(1-s)^{k+1}}$$

5.11. Пусть $A_n(s)=\sum_{r=0}^{\infty}f(n,r)s^r$. Известно, что $f(n, r)=f(n, r-1)+ f(n-1, r)$. Умножим обе части на s^r и сложим почленно все равенства. Получим

$$\sum_{r=1}^{\infty}f(n,r)s^r = s\sum_{r=1}^{\infty}f(n,r-1)s^{r-1}+\sum_{r=1}^{\infty}f(n-1,r)s^r$$

Известно, $\sum_{r=1}^{\infty}f(n,r)s^r = A_n(s)-1$

$$\sum_{r=1}^{\infty}f(n,r-1)s^{r-1}=\sum_{r=0}^{\infty}f(n,r)s^r = A_n(s)$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}f(n-1,r)s^r = A_{n-1}(s)-1$$

Получаем $A_n(s)-1= sA_n(s) + A_{n-1}(s)-1$, откуда $A_n(s) = 1/(1 - s)\, A_{n-1}(s)$ и $A_n(s)= 1/(1-s)^{n-1}\cdot A_1(s)$. Так как $A_1(s)=\sum_{r=1}^{\infty}f(1,r)s^r=\sum_{r=1}^{\infty}s^r=\frac{1}{1-s}$,

$A_n(s)= 1/(1-s)^{n-1}$.

5.12. $B(s)=\sum_{n=0}^{\infty}B_ns^n$, $\sum_{n=2}^{\infty}B_ns^n=s\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-1}s^{n-1}+s^2\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-2}s^{n-2}$.

$\sum_{n=2}^{\infty}B_ns^n=B(s)-1-2s$; $\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-1}s^{n-1}=\sum_{m=1}^{\infty}B_ms^m=B(s)-1$; $\sum_{n=2}^{\infty}B_{n-2}s^{n-2}=B(s)$;

$B(s)$-1-2s=s($B(s)$-1)+$s^2B(s)$;

$B(s)$=(s+1)/(1-s-s^2)=-(s+1)/((s-s^1)(s-s_2)), где $s_1=1/2\,(-1-\sqrt{5})$, $s_1=1/2\,(-1+\sqrt{5})$. Разложив $B(s)$ в ряд, получаем $B_n=5^{-1/2}\,((1+\sqrt{5})^{n+2}-(1-\sqrt{5})^{n+2})/2^{n+2}$.

5.13. $(1+a_1s+a_1^2s^2)(1+a_2s+a_2^2s^2)(1+a_3s)=1+(a_1+a_2+a_3)s+(a_1^2+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3+a_2^2)s^2+(a_1^2a_2+a_1a_2^2+a_1^2a_3+a_1a_2a_3+a_2^2a_3)s^3+(a_1^2a_2^2+a_1^2a_2a_3+a_1a_2^2a_3)s^4+a_1^2a_2^2a_3s^5$.

5.14. $(a_1^2s^2+a_1^4s^4+a_1^6s^6)(1+a_2s+a_2^2s^2)(1+a_3s)=a_1^2s^2+(a_1^2a_2+a_1^2a_3)s^3+(a_1^2a_2^2+a_1^4+a_1^2a_2a_3)s^4+(a_1^4a_2+a_1^4a_2+a_1^2a_2^2a_3)s^5+(a_1^4a_2^2+a_1^6+a_1^4a_2a_3)s^6+(a_1^6a_2+a_1^6a_3+a_1^4a_2^2a_3)s^7+(a_1^6a_2^2+a_1^6a_2a_3)s^8+a_1^6a_2^2a_3s^9$.

5.15. $A(s)=\sum_{k=0}^{N}s^n=\frac{1-s^{N+1}}{1-s}$

5.16. $A(s)=\sum_{k=0}^{N}q^ns^n=\frac{1-q^{N+1}q^{N+1}}{1-qs}$

5.17. 1) B(s)=$\sum_{n=r}^{\infty}a_{n-r}s^n=s^r\sum_{j=0}^{\infty}a_js^j=s^rA(s)$; 2) B(s)=cA(s);

3) $B(s)$=$A(s)$+b/(1-s).

Раздел 6

6.1. а) 3/5; б) 3/5; в) 3/10.

6.2. а) 15/16; б) 2/3.

6.3. а) 1/n; б)1/(n(n - 1)).

6.4. $p_A=(5/6)^6$; $p_B=1-((5/6)^{12}+12\,(5/6)^{11}\,(1/6))$; $p_A>p_B$.

6.5. $p_r = 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (10-r+1)/10^r$.

6.6. $C(n, 2) \cdot n!/n^n$.

6.7. а) $(9/10)^k$; б) $(9/10)^k$; в) $(8/10)^k$; г) $2(9/10)^k - (8/10)^k$.

6.8. $p(E) = 9/C(12, 8) = 1/55$.

6.9. $p_k = (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-k)/(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)) = 1/n$.

6.10. а) $p(E) = (2/7)^{12} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-6}$; б) $(6/7)^{12} = 1/6$.

6.12. а) для каждого из бросаний - 6^3 исходов; значит, $p(E) = 1/6^3 = 1/216$; б) всего благоприятных исходов: при трех разных значениях на трех костях - $C(6, 3) \cdot (3!)^2$, при двух одинаковых и другом значении - $6 \cdot 5 \cdot 3^2$, при трех одинаковых - $C(6, 1) = 6$; всего исходов - 6^6, $p(E) = 83/3888$.

6.13. $p(A) = 1 - (5/6)^4 \approx 0{,}517747\ldots$, $p(B) = 1 - (35/36)^{24} \approx 0{,}491404\ldots$.

6.14. а) $(1-N/n)^{r-1}$; б) $n(n-1)\ldots(n-Nr+1)/((n \cdot (n-1)\ldots(n-N))^r$.

6.15. а) $12/(12)^{12} \approx 0{,}54 \cdot 10^4$; б) $C(12, 2) \cdot (2^6-2) \cdot 12^{-6} \approx 0{,}00137$.

6.16. $C(12, 6) \cdot 30!/(12^{30} \cdot 2^6 \cdot 6^6) \approx 0{,}00035$.

6.17. а) $p_0 = C(n, 2r) \cdot 2^r/C(2n, 2r)$; б) $1 - p_0$;

в) $p_1 = nC(n-1, 2r-2) \cdot 2^{2r-2}/C(2n, 2r)$; г) $1 - p_0 - p_1$;

д) $C(n, 2)\, C(n-2, 2r-4) \cdot 2^{2r-4}/C(2n, 2r)$.

6.18. $C(N-3, r-1)/C(n-1, r-1)$.

6.19. $(C(2N, N))^2/C(4N, 2N)$.

6.20. $C(13, a) \cdot C(13, b) \cdot C(13, c) \cdot C(13, d)/C(52, 13)$.

6.21. Пусть $q = 1/C(52, 5) = 1/2\,598\,960$, тогда: а) $4q$; б) $13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot q = 4/4165$; в) $13 \cdot 4 \cdot \cdot 12 \cdot C(4, 2) \cdot q = 6/4165$; г) $9 \cdot 4 \cdot q = 768/216580$; д) $13 \cdot 4 \cdot C(12, 2) \cdot 4^2 \cdot q = 88/4165$; е) $C(13, 2) \cdot (C(4, 2))^2 \cdot 11 \cdot 4q = 198/4165$; ж) $13 \cdot 6 \cdot C(12, 3) \cdot 4^3 \cdot q = 1760/4165$.

Раздел 7

7.1. 7!

7.2. $10 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 = 151200$.

7.3. 18000.

7.4. а) $m \cdot n$; б) $(m+1)(n+1)$

7.5. $4 \cdot 5 = 20$.

7.6. $5^5 = 3125$.

7.7. 1179900.

7.8. $5 \cdot 6 \cdot 2 = 60$.

7.9. $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

7.10. $(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^2 = 14400$.

7.11. $(32 + 32 \cdot 32 + 32 \cdot 32 \cdot 32) \cdot 10^4 = 338\,240\,000$.

7.12. $32 \cdot 32 < 1500$.

7.13. 30.

7.14. $(a_1+1) \cdot (a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_n+1)$.

7.15. $2^{(m-1) \cdot (n-1)}$.

7.16. 30.

7.17. 1024; 2016.

7.18. 768.

7.19. $3 \cdot 2^{12} = 12\,288$.

7.20. А. $C(n, 2)$; Б. $C(n, 3)$.

В. Будем проводить прямые последовательно одну за другой. Когда проводится k-я прямая, то общее число частей плоскости увеличивается на $(k-1)+1$, где $(k-1)$ — количество точек пересечения этой прямой с ранее проведенными прямыми. Отсюда следует, что если провести все n прямых, то общее число частей плоскости увеличится на число точек пересечения (их $C(n, 2)$) плюс количество прямых. Вначале была одна часть (вся плоскость). Поэтому после проведения прямых получим $1 + C(n, 2) + n = (n^2 + n + 2)/2$ частей.

Г. Если провести окружность, охватывающую все ограниченные части плоскости, то из нее будут выходить $2n$ лучей. Значит, имеется $2n$ неограниченных частей плоскости. Ограниченных частей будет $(n^2-3n+2)/2$.

7.21. Так как ни один из учеников не учится хуже другого, то у каждого из них одинаковое число четверок (а значит, и пятерок). Пусть у каждого из них k четверок и $2n-k$ пятерок. Так как никакие два ученика не учатся одинаково, то число учеников не превышает $C(2n, k)$, но известно, что $C(2n, k) \leq C(2n, n)$ [см. задачу **2.17**].

7.22. а) $C_п(r, n)=C(n+r-1, n)$; б) $C_п(r-n, n)=C(r-1, n)$.

7.23. $(-1)^m \cdot C(n-1, m)$ при $m\leq n-1$; 0 при $m>n$.

7.24. 1 при $n=3k$; 0 при $n=3k+1$; -1 при $n=3k-1$.

7.25. Вычислить коэффициент при x^n в обеих частях равенства $(1-x)^n(1+x)^n=(1-x^2)^n$.

7.26. 2^{n-1}.

7.27. 2^{n-1}.

7.28. Если муж пригласит k женщин, то мужчин он пригласит $6-k$. Тогда жена пригласит $6-k$ женщин и k мужчин. Всего

$$\sum_{n=0}^{5} (C(5, k))^2 (C(7, 6-k))^2 = 267\,148$$ способов.

7.29. $[(n-r)/2]+1$.

7.30. Камни можно переставлять $P(5, 6, 7)$ способами. При циклических перестановках и при симметриях браслет остается неизменным. Получаем $P(5, 6,7)/36= 408408$.

7.31. $3+3\cdot2+1=10$.

7.32. $C(32, 12)\cdot C(20, 12)$.

7.33. $C_п(n, r)=C(n+r-1, r)$.

7.34. $3^4=81$.

7.35. $64\cdot14=896$; $64\cdot(64-15)=3136$.

7.36. $C(16, 6)\cdot C(10, 6) = 1\,681\,680$.

7.37. Выбор полей для 12 шашек - $C(16, 12)$. Выбор цветов - 2^{12}. Всего способов - 7 454 720.

7.38. 120.

7.39. $A(11, 7)/P(3) = 277\,200$.

7.40. 144.

7.41. $C(5, 2)\cdot C(3, 1) = 10\cdot 3 = 30$; 12.

7.42. $P(3, 1, 1, 1) - 4\cdot P(3) = 96$.

7.43. $3!\cdot 4 = 24$.

7.44. 1560.

7.45. 126; 1092.

7.46. 450000; 499999.

7.47. $9!\cdot 9$.

7.48. $P(3, 3, 1, 1, 1, 1) - 2P(3, 1, 1, 1, 1, 1) + P(1, 1, 1, 1, 1, 1) = 88080$; для двух цифр аналогично получаем 20 040.

7.49. $(C_п(3, 6))^2 = 784$.

7.50. Из 784 разложений предыдущей задачи одно из разложений (100 · 100 · 100) будет соответствовать одному разложению без учета порядка. Одно разложение в данной задаче с двумя одинаковыми и третьим отличным от них множителем будет соответствовать трем разложениям задачи **7.49**, в зависимости от положения третьего сомножителя. Наконец, разложение с тремя различными сомножителями может быть записано шестью способами и соответствует 6 разложениям задачи **7.49.** Посчитаем число разложений с двумя сомножителями вида $2^a \cdot 5^b$. Считаем, что третий сомножитель имеет вид $2^c \cdot 5^d$. Имеем $2a+c = 2b+d = 6$. Решения в целых числах для $2x + y = 6$: $\{x = 0, y = 6\}$, $\{x = 1, y = 4\}$, $\{x = 2, y = 2\}$, $\{x = 3, y = 0\}$. Каждое a с каждым c дает 16 решений, но $a = b = 2$ — лишнее. Итого 15 разложений. С учетом порядка сомножителей это было 45 разложений. Разложений с тремя различными сомножителями без учета порядка $(784 - 1 - 45)/6 = 123$. Следовательно, всего разложений без учета порядка $123 + 15 + 1 = 139$.

7.51. $C(n - 2, 3) = ((n - 2)(n - 3)(n - 4))/6$.

7.52. $(C(10, 2) \cdot C(8, 2) \cdot C(6, 2) \cdot C(4, 2) \cdot C(2, 2))/5! = 945$.

7.53. 945.

7.54. 280.

7.55. а) $C_п(3, 6) \cdot 3^6 = 20\,412$; б) $3!\,C(6, 2) + C(6, 3) \cdot P(2, 1) + 3C(6, 1) \cdot C(5, 1) + 6C(6, 1) \cdot C(5, 2) + C(6, 2) \cdot C(4, 2) = 690$.

7.56. $C(3, 1) \cdot C(32, 16)$.

7.57. $52!/((4!)^{13})$; $52!/((13!)^4)$.

7.58. $C(n, 3) \cdot 2^{n-3}$.

7.59. $C(6, 3) = 20$.

7.60. $C_п(4, 3) = 20$.

7.61. $C_п(10, 3) = C(12, 3) = 220$.

7.62. $C(i+k-1, i) \cdot C(j+k-1, j)$.

7.63. $C(i+5, 5) \cdot (j + 1)$.

7.64. $C(n, 2) - C(p, 2) - C(q, 2) + 2$.

7.65. $N(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) = (2n)! - C(n, 1) \cdot 2^2 \cdot n \cdot (2n-2)! + C(n, 2) \cdot 2^3 \cdot n \cdot (2n-3)! - \ldots - (-1)^k \cdot C(n,k) \cdot 2^{k-1} \cdot n \cdot (2n-k-1)! + \ldots - (-1)^n \cdot 2^{n+1} \cdot n!$

7.66. $N = 2\,((n!)^2 - C(n, 1) \cdot (2n-1) \cdot ((n-1)!)^2 + C(n, 2) \cdot (2n-2)(2n-3)((n-2)!)^2 - \ldots) = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C(n,k) \cdot (2n-k)_k ((n-k)!)^2$, где $(i)_k = i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot (i-(k-1))$.

7.67. 100.

7.68. $C(15, 3) + C(15, 1) \cdot C(15, 2) = 2030$.

7.69. Так как ладьи не бьют друг друга, то каждая стоит на своей вертикали, и на каждой вертикали ровно 1 ладья. Для ладьи на первой вертикали n возможных выборов горизонтали, для ладьи на второй вертикали - $n - 1$ и т.д. Всего $n!$ расстановок.

7.70. Выбор горизонталей - $C(m, k)$ способов. Выбор вертикалей - $C(n, k)$ способов. На получившемся поле $k \times k$ — $k!$ расстановок. Всего $C(n, k) \cdot C(m, k) \cdot k!$ способов.

7.71. $20! \cdot C(24, 4)$.

7.72. $C_{п}(30, 30) = C(33, 30) = 5\,456$.

7.73. $3^{12} - 3 \cdot 2^{12} + 3 = 519\,156$.

7.74. $9! - 3! \cdot C(3, 1) \cdot 7! + C(3, 2) \cdot (3!)^2 \cdot 5! - C(3, 3) \cdot (3!)^4 = 283\,824$.

7.75. Если не учитывать цвета полей доски, то $C(16, 5) = 4368$. Если учитывать цвет полей доски, то таких расположений нет.

7.76. Чисел без 0: способов выбрать 3 цифры $C(9, 3) = 84$. Чисел, содержащих ровно 3 выбранные цифры,- $3^6 - C(3, 1) \cdot 2^6 + C(3, 1) \cdot 1^6 = 540$. Всего таких чисел - $84 \cdot 540 = 45360$.

Числа с 0: способов выбрать остальные две цифры $C(9, 2) = 36$. Чисел, содержащих все три цифры $2 \cdot (3^5 - C(2, 1) \cdot 2^5 + 1^6) = 360$. Всего таких чисел 12960.

Значит, всех чисел, соответствующих условию задачи, 58 320.

7.77. Чисел, в записи которых не встречается 1, существует $8\cdot(1 + 9 + 9^2 +...+ 9^6) = 9^7 - 1 = 4\ 782\ 968$. Значит, чисел, содержащих в своей записи 1, больше.

7.78. Для 1-й книги: $(1 + t + t^2 +...+ t^7)$. Для 2-й книги: $(1 + t + t^2 +...+t^8)$. Для 3-й книги: $(1 + t + t^2 +...+ t^9)$. Коэффициент при t^{12} — число способов разделения.

$$(1 - t^7)(1 - t^9)(1 - t^{10})/(1-t)^3 = (1 - t^8 - t^9 - t^{10} + t^{17} +...)\times(1 + 3t + 6t^2 + 10t^3 + 15t^4 +...+91t^{12} +...).$$

Коэффициент при $t^{12} = - 6 - 10 - 15 + 91 = 60$. Значит, существует 60 способов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И.* Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.

2. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. М.: Изд-во иностр. литер., 1963.

3. *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

4. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. М.: Наука, 1969.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.

Мария Александровна Коротнкова

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КОМБИНАТОРИКЕ

Издание второе, исправленное

Редактор и техн. редактор *М.В. Макарова*
Корректор *Е.Н. Кочубей*
Компьютерная верстка С. *В. Тялиной*

ЛР №020676 от 09.12.97 г. Подписано в печать 7.06.2000
Формат 60x84 1/16. Уч.-изд.л.2,0. Печ.л. 3,0.
Тираж 300 экз. Изд. №028-1 Заказ № 604

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское шоссе, 31