МИФИ МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Ю.Б. Иванов Е.П. Фетисов Ю.Д. Фивейский

ПРАКТИКУМ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Часть 1

МОСКВА 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Ю.Б. Иванов   Е.П. Фетисов   Ю.Д. Фивейский

ПРАКТИКУМ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Часть 1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Издание 2-е, стереотипное

Москва 2008

УДК 530.1(076.5)+531.19(076.5)
ББК 22.317.2я73
И 20

Иванов Ю.Б., Фетисов Е.П., Фивейский Ю.Д. *Практикум по статистической физике: Учебное пособие. Ч. 1. – Изд. 2-е, стер.* – М.: МИФИ, 2008. – 112 с.

Настоящий практикум является первой частью учебного пособия по статистической физике – одному из разделов читаемого в МИФИ курса теоретической физики. Содержит шесть глав, в которых приведены условия задач и рассмотрены методы их решения.

Предназначен для студентов физических факультетов МИФИ и физического колледжа.

Рецензент проф. д-р физ.-мат. наук *А.Б. Хмелинин*

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7262-1016-2

ВВЕДЕНИЕ

Практикум представляет собой первую часть учебного пособия по статистической физике – одному из разделов курса теоретической физики, читаемого в МИФИ студентам физических факультетов. В эту часть практикума включены задачи по основам термодинамики и статистики, распределению Гиббса и его применению для классического и идеального газа, а также соответствующий математический аппарат.

Каждая глава практикума начинается с краткого изложения основных понятий и формул, используемых при решении поставленных задач. Задачи каждой главы подразделяются на три категории (I, II, III). Задачи первой категории – типовые задачи, для каждой из которых приведено подробное решение. К задачам второй категории относятся сравнительно простые задачи, снабженные указаниями и ответами. Наконец, к третьей категории отнесены задачи более сложные, которые можно использовать в качестве домашнего задания при самостоятельных занятиях. Большинство таких задач снабжено лишь ответами.

Пособие рассчитано на студентов физических факультетов МИФИ и Физического колледжа.

§ 1. Специальные функции и часто встречающиеся интегралы

При решении задач, предлагаемых в этом практикуме, часто встречаются математические соотношения, сводящиеся, в конечном счете, к довольно ограниченному числу интегралов и специальных функций. Значение этих интегралов и специальных функций всегда можно найти, обратившись к соответствующей справочной литературе. Освободиться от необходимости частого использования справочников и существенно увеличить скорость решения задач можно, выполнив самостоятельно задания, предложенные в § 1.

Некоторые специальные функции

1. **Гамма-функция** – по определению:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt; \tag{1.1}$$

основное свойство:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \tag{1.2}$$

частные значения гамма-функции:

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Удобное соотношение, основанное на (1.2)

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n! \tag{1.3}$$

где n – натуральное число.

2. **Интеграл ошибок** – по определению:

$$\Phi(x) = erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt; \tag{1.4}$$

при $x \ll 1$
$$\Phi(x) \approx \frac{2x}{\sqrt{\pi}}.$$

При очень больших x функция стремится к единице. С интегралом ошибок связан интеграл Пуассона (см. ниже).

3. **Часто встречающийся интеграл**

$$\int_0^\infty \frac{z^{x-1}dz}{e^z+1} = \left(1-2^{1-x}\right)\Gamma(x)\,\varsigma(x) \qquad (x>0)$$

выражается через табулированную дзета-функцию Римана $\varsigma(x)$.

4. **Дельта-функция** – специфическая функция, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\delta(x-a)=0 \quad x\neq a;\\
&\delta(x-a)=\infty \quad x=a;\\
&\int_0^b \delta(x-a)\,dx=1 \quad 0<a<b;\\
&\int_0^b \delta(x-a)\,dx=0 \quad a<0;\ \ a>b.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Дельта-функция может быть представлена в различных формах. Мы будем использовать интегральное представление функции:

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,dk. \tag{1.6}$$

Дельта-функцию удобно использовать при вычислении интегралов, в частности:

$$\int_b^c f(x)\,\delta(x-a)\,dx=f(a), \qquad (b\le a\le c).$$

Задачи

1.1. Вычислить интеграл

$$I(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx.$$

(Он называется "интеграл Пуассона".)

1.2. Вычислить интеграл

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^2 \, dx.$$

Вычисление провести с использованием интеграла Пуассона.

1.3. Вычислить интеграл

$$I_n(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^n \, dx,$$

где n — натуральное число. Рассмотреть отдельно случаи четных и нечетных n.

1.4. Убедиться в том, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n!,$$

где n — натуральное число (включая $n = 0$).

1.5. Используя определение гамма-функции (1.1), непосредственным вычислением убедиться в том, что

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

и $\Gamma(n+1) = n!$, если n — натуральное число.

1.6. Связать гамма-функцию, интеграл ошибок и интегралы Пуассона, убедившись в том, что при определенных условиях они совпадают.

1.7. Записать формулу для приближенного вычисления факториала. Для этого вычислить сначала $\ln n!$, переходя от суммирования к интегрированию. Убедиться в том, что

$$n! \approx n^n e^{-n}.$$

1.8. Провести "численный эксперимент", используя приближенные формулы для вычисления факториала:

1) $n! = n^n e^{-n}$ — упрощенная формула Стирлинга;

2) $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ – формула Стирлинга для $n \approx 1$ $n > 1$ $n >> 1$, сравнивая результаты с табличными значениями факториала.

1.9. Убедиться в том, что выражение

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\, dk$$

обладает всеми свойствами дельта-функции, а именно:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0; \quad \delta(x) = \infty \text{ при } x = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

1.10. Выразить $\delta(-x)$ и $\delta(kx)$ через исходную $\delta(x)$.

1.11. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{e^x + 1}.$$

При суммировании ряда, получаемого в ходе вычислений, можно использовать сведения, полученные в математическом справочнике.

1.12. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x\, dx}{e^x - 1}.$$

1.13. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3\, dx}{e^x + 1}.$$

1.14. Вычислить интеграл

$$\int_0^{x} t^2 e^{-t^2}\, dt,$$

выразив его через интеграл ошибок $\Phi(x)$.

1.15. Известно, что объем трехмерной сферы равен

$$V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

а объем двухмерной сферы (площадь круга) равен

$$V_2 = \pi R^2.$$

Определить зависимость коэффициента при R^N от числа N. Найти V_N объем N-мерной сферы.

§ 2. Статистическое описание систем. Вероятности и функции распределения

При описании систем, содержащих большое количество частиц, целесообразно использовать статистический (вероятностный) подход. В соотношении

$$dW(x, y, z) = \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{1.7}$$

под dW будем понимать вероятность того, что переменные x, y, z заключены в интервалах:

$$[x;\ x + dx];\quad [y;\ y + dy];\quad [z;\ z + dz],$$

$\rho(x, y, z)$ называется плотностью вероятности, а $dx\,dy\,dz = dV$ – элементом объема.

В общем случае число переменных может быть сколь угодно большим.

Подразумевается, что

$$\int \rho(x, y, z)\,dV = 1. \tag{1.8}$$

Это соотношение называется условием нормировки.

Вероятности бывают непрерывными и дискретными. Равенство (1.7) относится к непрерывному распределению. Дискретные распределения подразумевают, что статистически описываемая величина может принимать только определенный ряд значений, которые можно пронумеровать. Величина W_n – вероятность того, что дискретная величина принимает n-значение.

Условие нормировки дискретного распределения –

$$\sum_n W_n = 1. \tag{1.9}$$

Суммирование производится по всем возможным значениям n.

При вероятностном описании основную роль играют средние значения случайных величин и их зависимость от параметров системы.

В задачах этого параграфа рассматриваются общие понятия и соотношения.

Среднее значение непрерывной функции $f(x)$ обозначается как $\overline{f(x)}$ или $\langle f(x)\rangle$.

Средние значения вычисляются посредством интеграла:

$$\overline{f(x)} = \langle f(x)\rangle = \int f(x)\,\rho(x)\,dx. \tag{1.10}$$

При дискретном распределении

$$\bar{f} = \langle f\rangle = \sum_n W_n f_n. \tag{1.11}$$

Дисперсией функции f называется величина Δf, определяемая из соотношения

$$\Delta f = \sqrt{\overline{(f - \langle f\rangle)^2}}. \tag{1.12}$$

Относительная дисперсии, или **флуктуация** равна:

$$\delta f = \frac{\Delta f}{\langle f\rangle}. \tag{1.13}$$

Заметную роль в статистическом описании играет **энтропия**. Эта величина будет неоднократно использоваться в следующих главах. Под **статистической** энтропией мы будем понимать величину σ, где

$$\sigma = -\int \rho \ln \rho \, dV \tag{1.14}$$

или $$\sigma = -\sum_n W_n \ln W_n \tag{1.15}$$

(энтропия, удовлетворяющая соотношению (1.14), определена с точностью до константы).

Если известна плотность вероятности для нескольких переменных, то плотность вероятности от меньшего числа переменных может быть получена путем интегрирования (или суммирования) по исключаемым переменным. В частности:

$$\sum_m W_{nm} = W_n;$$

$$\rho(x, y) = \int_B \rho(x, y, z)\, dz;$$

$$\rho(x) = \int_A \int_B \rho(x, y, z)\, dy\, dz.$$

Здесь A — область определения переменной z, а B — переменной y.

Между различными переменными возможна определенная зависимость, которая характеризуется коэффициентом корреляции

$$K = \langle (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \rangle$$

или, в общем случае, корреляционным моментом K_{mn}:

$$K_{mn} = \langle (x - \bar{x})^m (y - \bar{y})^n \rangle.$$

Можно показать, что если коэффициент корреляции (или, кратко, **корреляции**) равен нулю, то различные переменные друг от друга не зависимы и плотности вероятности, относящиеся к различным переменным, перемножаются:

$$\rho(x, y) = \rho(x)\, \rho(y).$$

Задачи

1.16. Плотность вероятности $\rho(x)$ постоянна на отрезке $[0, b]$ и равна нулю вне отрезка. Определить значения

$$\bar{x}, \quad \overline{x^2}, \quad \Delta x, \quad \delta x.$$

1.17. Плотность вероятности имеет вид

$$\rho(x) = A\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}}.$$

Определить нормировочный коэффициент A, а также вычислить $\bar{x}$ и Δx, связав их с параметрами x_0, σ.

1.18. Рассмотреть трехмерное распределение

$$\rho(x,\ y,\ z) = \rho(r) = A\,e^{-r^2/r_0^2},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Вычислить нормировочный коэффициент, средние значения $\bar{r}$, $\overline{r^2}$, а также дисперсию Δr и относительную дисперсию δr, связав их с параметром r_0.

1.19. На плоскости XY очерчен круг радиусом R. Все точки круга равнодоступны. Определить плотность вероятности $\rho(x)$.

1.20. Материальная точка колеблется по закону

$$x(t) = x_0 \cos \omega t.$$

Определить средние значения $\bar{x}$ и $\overline{x^2}$, а также дисперсию Δx и относительную флуктуацию δx.

1.21. Двумерное распределение характеризуется плотностью вероятности

$$\rho(x,\ y) = A\ \ (x^2 + y^2),$$

причем $x[0;\ a]$; $y[0;\ b]$.

Вычислить коэффициент корреляции

$$K = \langle (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \rangle,$$

а также плотность вероятности

$$\rho(x).$$

1.22. Полагая, что трехмерное распределение характеризуется в сферической системе координат плотностью вероятности

$$\rho(r,\ \theta,\ \varphi) = A\,R(r) \sin^2 \theta,$$

определить вероятность того, что частица находится в интервале угла $[\theta_0; \theta_0 + d\theta]$ при любых значениях r и φ.

1.23. Основываясь на принципе максимальности энтропии определить плотность вероятности $\rho(x)$, если известно, что $\bar{x} = x_0$ (x_0 – заданный параметр задачи), а функция определена при $x \geq 0$.

1.24. Плотность вероятности $\rho(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и равна нулю вне его. Основываясь на принципе максимальности энтропии определить $\rho(x)$.

1.25. Плотность вероятности $\rho(x)$ определена для любого x. Известно также, что $\bar{x} = x_0$ и $\Delta x = \sigma$ (где x_0 и σ – заданные параметры). Основываясь на принципе максимальности энтропии определить вид функции распределения.

1.26. Двухмерная система описывается плотностью вероятности $\rho(x, y)$, причем переменные x и y независимы, т. е.

$$K = \langle (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \rangle = 0.$$

Какими свойствами должна обладать функция $\rho(x, y)$?

1.27. Определить вероятность нахождения частицы в интервале $[a, b]$, если плотность вероятности имеет вид

$$\rho(x) = A\, e^{-x^2/\sigma}$$

(параметр σ – задан).

1.28. Дано трехмерное распределение

$$\rho(x, y, z) = A\, e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r_0^2}}.$$

Записать плотность вероятности для координаты x, а также вычислить $\bar{x}$, $\overline{x^2}$ и Δx.

1.29. Определить значение x^*, соответствующее условию

$$W(0, x^*) = W(x^*, \infty),$$

если плотность вероятности равна $\rho(x) = A\, e^{-x^2/\sigma}$.

1.30. В объеме V существует N невзаимодействующих частиц. Найти вероятность того, что в объеме $v \leq V$ находится $n \leq N$ частиц. (Соответствующее распределение называется распределением Бернулли.)

1.31. Рассмотреть предельный случай распределения Бернулли (задача 1.30), когда $n \ll N$. Соответствующий предельный переход приводит к распределению Пуассона.

1.32. Полагая, что в распределении Пуассона (задача 1.31) $n - \bar{n} = \Delta n$, $\Delta n \ll \bar{n}$, найти его предельное выражение.

Глава 2. ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО. ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. ЭНТРОПИЯ

Для описания систем, имеющих s степеней свободы, в статистической физике используется понятие фазового пространства. Это – фиктивное $2s$-мерное, введенное для удобства математического описания, пространство, на осях которого откладываются s обобщенных координат и s обобщенных импульсов. Каждая точка этого пространства, которая называется **фазовой** или **изобразительной** точкой, имеет в заданный момент времени $2s$-координат, соответствующих обобщенным координатам и импульсам описываемой системы. С течением времени фазовая точка описывает фазовую траекторию. Эта траектория отражает особенности поведения системы во времени. В частности, траектория может быть замкнутой. Она ограничивает в фазовом пространстве некоторые фазовые поверхности с определенной площадью.

Существует теорема Лиувилля, в соответствии с которой, фазовый объем, занимаемый определенным числом изобразительных точек, с течением времени может изменить свою форму, но не меняет величины. Понятие статистической энтропии вводилось в гл. 1. Если в замкнутой макроскопической системе выделить малую часть – подсистему, то для такой равновесной подсистемы можно ввести аналогичное понятие – энтропию, зависящую от средней энергии подсистемы $\bar{\bar{E}}$:

$$S\left(\bar{E}\right) = \ln \frac{\Delta p \, \Delta q}{(2\pi\hbar)^s}. \tag{2.1}$$

Здесь $\Delta p = p_1 \ldots \Delta p_s$ $\Delta q = \Delta q_1 \ldots \Delta q_s$ – постоянная Планка. Величина $\dfrac{\Delta r \, \Delta q}{(2\pi\hbar)^s}$ представляет собой число различных квантовых состояний подсистемы с энергией $\bar{\bar{E}}$. Число состояний будем обозначать $\Delta\Gamma\left(\bar{E}\right)$, так что

$$S\left(\bar{E}\right) = \ln \Delta\Gamma\left(\bar{E}\right). \tag{2.2}$$

В соответствии с (1.14) и (1.15) энтропии можно дать и другие определения:

$$S(\bar{E}) = -\sum_{n} W_n \ln W_n\,, \qquad (2.3)$$

где W_n – вероятность нахождения подсистемы в n-квантовом состоянии; в случае же квазиклассики

$$S(\bar{E}) = -\int \rho(p,\, q) \ln\left[(2\pi\hbar)^s \rho(pq)\right] dp\, dq. \qquad (2.4)$$

Здесь $\rho(p,\, q)$ – плотность вероятности, а

$$dW(p,\, q) = \rho(p,\, q)\, dp\, dq \quad -$$

вероятность того, что подсистема имеет обобщенные координаты q и импульсы p с разбросом dq и dp соответственно.

Задачи

I

2.1. Определить фазовую траекторию для частицы массой m, перемещающейся вдоль оси x с постоянной скоростью v_0.

2.2. Определить фазовую траекторию частицы массой m, перемещающуюся вдоль оси x с начальной скоростью v_0 при наличии силы сопротивления, пропорциональной скорости.

2.3. Изобразить графически в фазовом пространстве траектории материальных точек массой m, двигающихся вдоль оси z с ускорением g и проиллюстрировать справедливость теоремы Лиувилля.

2.4. Точка массой m движется на отрезке $0 \le x \le l$ и абсолютно упруго отражается от стенок при $x = 0$ и $x = l$. Требуется: а) изобразить фазовую траекторию; б) определить объем фазового пространства; в) найти число квантовых состояний с энергиями меньшими или равными E.

2.5.˙ Для одномерного гармонического осциллятора изобразить фазовую траекторию, отвечающую энергии ε.

2.6. Система может находиться в любом из N различных состояний. Вероятность каждого состояния равна W_i, причем $\sum_{i=1}^{N} W_i = 1$. Используя понятие энтропия (2.3), метод неопределенных множителей Лагранжа (1.14), (1.15), показать, что максимуму энтропии соответствует равновероятное распределение

$$W_1 = W_2 = \ldots = W_N = \frac{1}{N},$$

при котором $S = \ln N$.

II

2.7. Определить фазовую траекторию одномерного гармонического осциллятора с малым постоянным трением.

2.8. Проверить справедливость теоремы Лиувилля для системы материальных точек, двигающихся по инерции вдоль некоторого направления.

2.9. Координаты трех одномерных гармонических осцилляторов зависят от времени по заданному закону:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}} \sin\omega t, \quad x_2 = \sqrt{\frac{2(\varepsilon + \Delta\varepsilon)}{m\omega^2}} \sin\omega t, \quad x_3 = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}} \sin(\omega t + \delta).$$

Убедиться в справедливости теоремы Лиувилля.

2.10. Используя результаты задачи 2.4 убедиться в том, что величина фазового объема при заданной энергии не меняется при медленном движении стенки $x = l(t)$, (адиабатическая инвариантность).

2.11. Система характеризуется переменной $x_i \geq 0$, которая может принимать только дискретные значения. Определить вероятность W_i, если известно, что $\bar{x}_i = \sum x_i W_i = x_0$, а энтропия максимальна. Результат сравнить с решением задачи 1.23.

III

2.12. Определить фазовую траекторию частицы массой m и зарядом $-e$, движущейся под действием кулоновской силы к неподвижному заряду $+e_1$. Начальное расстояние равно r_0, начальная скорость равна нулю.

2.13. Проверить справедливость теоремы Лиувилля для абсолютно неупругого удара двух частиц.

2.14. Проверить справедливость теоремы Лиувилля для упругого центрального соударения двух частиц с различными массами.

2.15. Определить и начертить фазовую траекторию для физического маятника массой m, момент инерции которого равен I, а приведенная длина L. Рассмотреть случаи:

1) $\varepsilon_0 > 2mgl$; 2) $\varepsilon_0 = 2mgl$; 3) $\varepsilon_0 < 2mgl$,

где ε_0 – начальная энергия маятника.

2.16. Найти площадь, заключенную внутри фазовой траектории осциллятора, отвечающую энергиям меньшим или равным ε. Определить число квантовых состояний $\Gamma(\varepsilon)$.

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Термодинамический подход используется при описании систем, содержащих большое число частиц. Он основан на выявлении связи между термодинамическими параметрами. Для газов, не находящимися во внешних полях, такими параметрами являются: V – объем, P – давление, T – температура, S – термодинамическая энтропия.

Согласно первому закону термодинамики (первому **началу** термодинамики)

$$dQ = dE + dA. \tag{3.1}$$

Здесь dQ – количество тепла, переданного системе; dE – изменение ее внутренней энергии; dA – работа, совершаемая системой.

$$dA = p\,dV. \tag{3.2}$$

Второе начало термодинамики связывает количество тепла с энтропией и температурой:

$$dQ = T\,dS. \tag{3.3}$$

Объединение первого и второго соотношения приводит к дифференциальному выражению для внутренней энергии:

$$dE(S, V) = T\,dS - P\,dV. \tag{3.4}$$

Используются также функции:

$F(T, V)$ – свободная энергия, где $dF = -S\,dT - P\,dV$;

$W(S, P)$ – тепловая функция, или **энтальпия** $dW = T\,dS + V\,dP$;

$\Phi(T, P)$ – потенциал Гиббса, где $d\Phi = -S\,dT + V\,dP$.

E, F, W и Φ называются термодинамическими потенциалами.

Различные термодинамические параметры связаны между собой уравнениями состояния. Преобразование этих уравнений основано на математических законах преобразования функций нескольких переменных. В частности, если известны функции

$$u(x, y) \quad \text{и} \quad v(x, y),$$

где x и y выбраны в качестве независимых переменных, то переход к другой паре независимых переменных u, v осуществляется по закону:

$$dv\,du = \frac{D(v,\ u)}{D(x,\ y)}\,dx\,dy,$$

где $\dfrac{D(v,\ u)}{D(x,\ y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x}; & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}; & \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix}$ – функциональный определитель.

Для функциональных определителей справедливы соотношения, напоминающие соотношения для обычных дробей. "Числитель" и "знаменатель" можно "сокращать", или "умножать" на одну и ту же величину:

$$\frac{D(u,\ v)}{D(x,\ y)} = \frac{D(u,\ v)}{D(x,\ v)}\,\frac{D(x,\ v)}{D(x,\ y)}.$$

Определители с совпадающими элементами сводятся к обычным частным производным:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y = \frac{D(v,\ y)}{D(x,\ y)} = -\frac{D(y,\ v)}{D(x,\ y)}.$$

Используя симметрию вторых производных можно получать перекрестные соотношения:

$$dF(x,\ y) = u(x,\ y)\,dx + v(x,\ y)\,dy;$$

$$u(x,\ y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y; \qquad v(x,\ y) = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_y;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y.$$

Указанные математические правила используются при решении термодинамических задач.

Задачи

I

3.1. Убедиться в справедливости соотношения

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$

3.2. Убедиться в справедливости соотношения

$$C_P - C_V = -T\frac{(\partial P/\partial T)_V^2}{(\partial P/\partial V)_T}.$$

3.3. Убедиться в справедливости соотношения

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \frac{C_P}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T.$$

3.4. Используя перекрестные соотношения, выразить

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$$

через производные при постоянном объеме.

3.5. Найти зависимость скорости звука в идеальном газе от температуры.

3.6. Найти зависимость адиабатического коэффициента объемного расширения от температуры для идеального газа.

3.7. Идеальный газ помещен в два различных изолированных сосуда с одинаковым давлением и температурой. Определить, как изменится энтропия системы, если сосуды соединить.

3.8. Определить работу, количество тепла и коэффициент полезного действия в цикле Карно, т. е. в процессе, состоящем из двух изотерм и двух адиабат.

3.9. Определить работу и количество тепла в идеальном газе при циклическом процессе, состоящем из двух изохор и двух изобар.

3.10. Убедиться в справедливости соотношения

$$\left(\frac{\partial C_P}{\partial P}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_P .$$

3.11. Доказать соотношение

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = -C_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S - P .$$

3.12. Убедиться в том, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V = \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V .$$

3.13. Показать, что

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V .$$

3.14. Убедиться в том, что энергия идеального газа зависит от числа частиц и температуры и не зависит от объема.

3.15. Определить работу и получаемое газом тепло при сжатии идеального газа при политропическом процессе:

$$P\,V^n = \mathrm{const}.$$

3.16. Определить общий вид уравнения состояния вещества, теплоемкость которого не зависит от объема, но зависит от температуры.

3.17. Определить коэффициент полезного действия цикла Клапейрона, состоящего из двух изотерм и двух изохор.

3.18. Определить изменение энтропии идеального газа, изотермически расширяющегося от V_1 до V_2.

3.19. Два баллона одинакового объема содержат идеальный газ с различным давлением и температурой. Определить изменение энтропии после соединения газов.

3.20. Показать, что при адиабатическом уменьшении давления его температура понижается, если коэффициент объемного расширения положителен, и наоборот.

3.21. Определить коэффициент Джоуля–Томпсона $\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_W$ (здесь W – тепловая функция), выразив его через уравнение состояния $P(T, V)$.

3.22. Два идеальных газа с фиксированными объемами V_1 и V_2 и теплоемкостями имеют в начальный момент температуры T_1 и T_2. Работающая тепловая машина в цикле Карно использует первый газ в качестве нагревателя, а второй – в качестве охладителя. Процесс продолжается до момента выравнивания температур. Получить выражение для совершенной работы. Как изменится при этом энтропия?

3.23. Выразить коэффициент объемного расширения

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

через изотермическую сжимаемость $-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, используя уравнение состояния $P(V, T)$.

3.24. Полагая, что

$$a_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_P; \quad a_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_v; \quad b_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_T; \quad b_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T,$$

доказать соотношение

$$\frac{a_v}{b_v} + \frac{a_P}{b_P} = 1.$$

3.25. Показать, что величина $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ удовлетворяет соотношениям

$$\gamma = \frac{(\partial P/\partial V)_a}{(\partial P/\partial V)_T}; \qquad \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{(\partial P/\partial T)_a}{(\partial P/\partial T)_T},$$

где индекс a обозначает величину, постоянную для данного адиабатического процесса.

3.26. Показать, что

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P - \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

3.27. Показать, что

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)_T = (C_V - C_P)\, T.$$

3.28. Выразить $(\partial P/\partial T)_V$ через коэффициент объемного расширения и изотермическую сжимаемость.

3.29. Определить коэффициент объемного расширения и изотермическую сжимаемость для идеального квантового газа, уравнение состояния которого $PV = AT^4$, где A – постоянная.

3.30. Показать, что энтальпия идеального газа не зависит от давления и определяется только температурой.

3.31. Доказать, что из условия устойчивости

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0; \qquad C_V > 0$$

следует, что $C_P > 0$, причем $C_P > C_V$.

3.32. Цикл состоит из двух изобар и двух изохор. Показать, что для вещества с постоянными теплоемкостями имеет место соотношение

$$T_1 T_3 = T_2 T_4,$$

где $T_{i\ldots}$ – температуры "угловых" точек процесса.

Глава 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА (КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ)

Распределение Гиббса является одним из основных соотношений в статистической физике. В случае дискретного спектра энергии (в этом случае говорят о **квантовой статистике**) распределение имеет вид

$$W_n = A\, e^{-E_n/T}. \tag{4.1}$$

Здесь W_n – вероятность того, что некоторая подсистема находится в n-м квантовом состоянии с энергией E_n, T – температура термостата. (Полная система считается замкнутой, ее температура постоянна и однородна, т. е. одинакова во всех точках пространства.) A – нормировочная константа; число частиц подсистемы считается постоянным.

Используется **термодинамическая** температура T, которая связана с **абсолютной** температурой T_a соотношением $T = kT_a$, где k – константа Больцмана. Средняя энергия частицы в этой температурной шкале равна:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}T.$$

В квазиклассическом приближении распределение Гиббса имеет вид

$$dW(p,\, q) = A\, e^{-\frac{E(p,\, q)}{T}} \frac{dp\, dq}{(2\pi\hbar)^f}. \tag{4.2}$$

Здесь $E(p,\, q)$ – энергия подсистемы, выраженная через все обобщенные импульсы p_i и координаты q_i частиц, входящих в подсистему; f – число степеней свободы; $\hbar$ – постоянная Планка; A – нормировочная константа. $dW(p,\, q)$ есть вероятность того, что обобщенные импульсы и обобщенные координаты лежат в интервалах $p,\, p + dp$ и $q,\, q + dq$ соответственно.

Соотношения (4.1) и (4.2) используются для вычисления средних значений физических величин. Например, если Φ есть такая физическая величина, то для случая квантовой статистики $\bar{\Phi} = \sum \Phi_n W_n$, в то время как в квазиклассическом приближении $\bar{\Phi} = \int \Phi(p, q)\, dW(p, q)$.

В частности, средняя энергия подсистемы равна:

$$\bar{E} = \sum E_n W_n, \tag{4.3}$$

в квантовой статистике и

$$\bar{E} = \int E(p, q)\, dW(p, q) \tag{4.4}$$

в квазиклассическом приближении.

Отметим, что константа A в распределении Гиббса определяется из условия нормировки:

$$\sum_n W_n = 1; \quad A = \frac{1}{\sum\limits_n e^{-E_n/T}}$$

или

$$\int dW(p, q) = 1; \quad A = \frac{1}{\int e^{-\frac{E(p,q)}{T}} \frac{dp\,dq}{(2\pi\hbar)^f}}.$$

Величина

$$Z = \sum_n e^{-E_n/T} \tag{4.5}$$

называется **статистической суммой** системы, а

$$Z = \int e^{-\frac{E(p,q)}{T}} \frac{dp\,dq}{(2\pi\hbar)^f} \tag{4.6}$$

– статистическим интегралом.

Величины Z зависят от температуры и от одного из параметров системы, в частности, от объема или давления. Все термодинамические функции подсистемы, упомянутые в гл. 3, могут быть выражены через $Z(T, V)$ посредством соотношения

$$F = -T \ln Z(T,\ V). \tag{4.7}$$

Здесь F – свободная энергия подсистемы.

Подсистемы с переменным числом частиц описываются **большим** каноническим распределением Гиббса. Вид этого распределения приводится в следующих главах.

Замкнутые системы подчиняются микроканоническому распределению, имеющему вид

$$d\,W(p,\ q) = \text{const}\ \delta\left(E - E_0\right)\frac{d\,p\,d\,q}{(2\pi\hbar)^f}. \tag{4.8}$$

Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция, свойства которой рассмотрены в гл. 1; $E(p,\ q)$ – энергия системы, которая благодаря δ-функции остается постоянной и равной E_0. Из микроканонического распределения следует, в частности, макроканоническое распределение для подсистемы.

Задачи

I

4.1. Рассматривая квантовый гармонический осциллятор с частотой ω в качестве подсистемы, записать для него распределение Гиббса.

4.2. Рассматривая идеальный одноатомный газ с объемом V, температурой T и числом частиц N в качестве подсистемы, найти для такого газа распределение по энергиям $d\,W(E)$.

4.3. Используя микроканоническое распределение, получить распределение Гиббса в квазиклассическом приближении, полагая, что термостат – идеальный газ, имеющий температуру T, а число частиц термостата очень велико.

4.4. Имеется столб одноатомного идеального газа в поле тяжести. Определить статистический интеграл этого газа. Вычислить свободную, внутреннюю энергию и теплоемкость. Рассмотреть предельные случаи высокого и низкого столба газа.

4.5. Определить нормировочный множитель в микроскопическом распределении (4.8) для системы из N невзаимодействующих частиц (идеального газа).

4.6. Определить термодинамические функции релятивистского идеального газа содержащего N частиц в объеме V. Зависимость энергии ε частицы газа от импульса p имеет вид

$$\varepsilon = \sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2}.$$

Температура газа T; m – масса частицы; c – скорость света.

4.7. N магнитных моментов электронов во внешнем магнитном поле образуют подсистему. Взаимодействием магнитных моментов между собой пренебречь. Каждый такой магнитный момент в магнитном поле может иметь лишь две ориентации и соответственно два значения энергии ε_1 и ε_2. Найти для такой подсистемы:

а) распределение Гиббса. Для простоты принять, что $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$;

б) статистическую сумму;

в) свободную энергию, энтропию и среднюю энергию;

г) выразить энтропию S через среднюю энергию $\bar{E}$ и, принимая во внимание определение температуры $\frac{1}{T} = \frac{\partial S(\bar{E})}{\partial \bar{E}}$, убедиться в том, что температура T подсистемы может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Изобразить графически зависимость S от $\bar{E}$;

д) зная зависимость средней энергии $\bar{E}$ от температуры T, найти теплоемкость C_V и выяснить величину этой теплоемкости для $T \to 0$ и $T \to \infty$.

4.8. Найти среднее значение $\overline{E^n}$ $(n > 0)$ для одноатомного идеального газа, содержащего N частиц (n – целое число).

4.9. Используя результат задачи 4.1, получить среднюю энергию осциллятора $\bar{\varepsilon}(T)$, а также теплоемкость $C_V(T)$. Рассмотреть предельные случаи низких $(T \to 0)$ и высоких температур $(T \to \infty)$.

4.10. Опираясь на микроканоническое распределение, получить распределение Гиббса в квазиклассическом приближении, считая, что термостат – набор одномерных невзаимодействующих осцилляторов с заданными частотами. Температура термостата T, число осцилляторов $N_T \gg 1$.

4.11. Определить нормировочный множитель в микроканоническом распределении (4.8) для системы из N независимых линейных гармонических осцилляторов.

4.12. Энергия идеального газа может быть представлена в виде $E = \sum\limits_i \varepsilon_i$, где ε_i – энергия отдельной молекулы. Выразить статистический интеграл газа через статистический интеграл отдельной молекулы. Найти среднюю энергию газа, а также его энтропию и давление.

4.13. N частиц идеального газа, находящихся в объеме V, описываются микроканоническим распределением (4.8). Энергия газа E. Вычислить для такого газа фазовый объем γ, энтропию S и температуру T. Найти уравнение состояния такого газа.

4.14. Показать, что для системы с большим числом частиц имеет место равенство $\overline{E^m} \approx \left(\bar{E}\right)^m$, где m – целое положительное число.

4.15. Показать, что каноническое распределение переходит в микроканоническое для систем с очень большим числом частиц.

4.16. Показать, что для подсистемы с большим числом невзаимодействующих частиц N $(N \to \infty)$ наивероятнейшая энергия $E_{\max}$ совпадает со средней энергией $\bar{E}$.

4.17. Обычно энтропия системы определяется формулой $S\left(\bar{E}\right) = \ln \Delta\Gamma\left(\bar{E}\right)$, где $\Delta\Gamma\left(\bar{E}\right)$ – число состояний системы, находящейся в равновесии и обладающей равновесной (средней) энергией $\bar{E}$. Иногда удобно определять энтропию с помощью формулы $S = \ln \int\limits_0^{\bar{E}} d\Gamma(E)$. Оба эти определения энтропии практически совпадают. Это свойство получило название нечувствительности формулы Больцмана. Доказать свойство нечувствительности формулы Больцмана для частного случая идеального газа, подчиняющегося закону равнораспределения.

4.18. Показать, что если энтропия системы выражается формулой $S = -\sum\limits_i W_i \ln W_i$, где W_i – вероятность нахождения системы в i-м состоянии с энергией E_i, то те значения W_i, при которых энтропия максимальна, подчиняются каноническому распределению.

4.18, а. Получить термодинамические функции для подсистемы – трехмерного квантового гармонического осциллятора, энергия которого $\varepsilon_n = \hbar\omega\,(n + 3/2)$ имеет кратность вырождения $g_n = \; = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Квантовое число n может принимать значения 0, 1, 2,... .

III

4.19. Дан идеальный одноатомный газ с числом части N и температурой T в объеме V. Используя распределение Гиббса в квазиклассическом приближении (масса частиц газа известна), найти:

а) распределение по энергиям такого газа как целого;

б) энергию газа $E_{\max}$, отвечающую максимуму функции распределения;

в) используя результат а), отыскать среднюю энергию газа $\bar{E}$ и сравнить ее с $E_{\max}$, имея в виду, что число частиц газа $N \gg 1$;

г) используя результат а), отыскать вид функции распределения по энергиям вблизи $E_{\max}$. Убедиться в том, что для $N \gg 1$ ширина функции распределения по энергиям много меньше $E_{\max}$.

4.20. Дан идеальный газ, у частиц которого связь кинетической энергии частицы ε с импульсом p имеет вид $\varepsilon = \alpha p^l$, где l и α – постоянные положительные величины. Вычислить статистический интеграл такого газа и, зная его, найти термодинамические функции газа: свободную энергию, энтропию, среднюю внутреннюю энергию, теплоемкости C_V и C_p. Найти также уравнение состояния такого газа. Сделать предельные переходы к случаям обычного одноатомного газа из нерелятивистских частиц и одноатомного газа из ультрарелятивистских частиц.

4.21. Для подсистемы, имеющей f степеней свободы и находящейся вблизи равновесия, выразить число состояний с энергий в интервале E, $E + dE$ через энтропию подсистемы.

4.22. Зная результат предыдущей задачи, найти число состояний с энергией E в интервале E, $E + dE$ для подсистемы, у которой:

а) $\bar{E} = \frac{3}{2} N T$ (трехмерный одноатомный идеальный газ);

б) $\bar{E} = N T$ (двухмерный одноатомный идеальный газ);

в) связь $\bar{E}$ и T имеет вид $\bar{E} = a T^n$ $(n \geq 2)$. Число частиц в системе велико (n – целое).

4.23. Дан двухатомный идеальный газ, молекулы которого обладают электрическим дипольным моментом $\vec{d}$ $\left\{|\vec{d}| = d_0 = \text{const}\right\}$. Газ находится в постоянном однородном электрическом поле $\vec{\varepsilon}_0$ и имеет температуру T. Требуется:

а) найти добавок к свободной энергии рассматриваемого идеального газа, обусловленный взаимодействием дипольных моментов $\vec{d}$ с электрическим полем ε_0. Число молекул в газе N, объем газа V;

б) зная результат пункта а), найти вклад в теплоемкость газа, обусловленный взаимодействием диполей $\vec{d}$ с полем $\vec{\varepsilon}_0$;

в) найти распределение по углам электрических дипольных моментов $\vec{d}$ в поле $\vec{\varepsilon}_0$;

г) зная результат пункта в), найти выражение для диэлектрической проницаемости газа в случае слабого поля $\vec{\varepsilon}_0$.

4.24. Найти вклад в теплоемкость идеального газа из двухатомных молекул, обусловленный ангармоничностью колебаний молекул. Потенциальную энергию двухатомной молекулы взять в виде $U = \frac{\varkappa q^2}{2} + \alpha q^3 + \beta q^4$, где $\varkappa$, α и β постоянные величины; q – отклонение размера молекулы от равновесного значения. Число молекул в газе N, объем газа V, температура газа T.

4.25. Дан одноатомный идеальный газ в объеме V. Температура газа T, число частиц N, масса атома m. Требуется:

а) найти величину фазового объема такого газа, имея в виду, что газ находится в равновесии, и выразить ее через $\bar{E} = E_{max}$, N и V;

б) найти энтропию такого газа, используя результат пункта а);

в) используя определение равновесной температуры тела, выразить $\bar{E}$ газа через T и записать энтропию газа через T, N и V.

Глава 5. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА)

Идеальным принято называть такой газ, взаимодействие между частицами (молекулами) которого настолько слабо, что им можно пренебрегать. Отсутствие взаимодействия между частицами газа позволяет свести квантово-механическую проблему определения уровней энергии всего газа в целом к проблеме определения уровней энергии отдельной частицы.

Важнейшей характеристикой идеального газа является величина $\bar{n}_k$ – среднее число частиц в данном квантовом состоянии k. Для достаточно разреженного газа $\bar{n}_k$ имеет вид

$$\bar{n}_k = e^{\frac{\mu - \varepsilon_k}{T}} \tag{5.1}$$

и удовлетворяет условию $\bar{n}_k \ll 1$, где μ – химический потенциал газа; ε_k – энергия частицы в данном квантовом состоянии k, T – температура газа, измеряемая в энергетических единицах.

Распределение частиц по различным квантовым состояниям, определяемое формулой (5.1), называется распределением Больцмана. Все обычные атомные и молекулярные газы при нормальных условиях подчиняются этому распределению.

В квазиклассическом приближении вместо формулы (5.1) имеет место выражение

$$d\bar{N} = e^{\frac{\mu - \varepsilon(p,q)}{T}} \frac{dp\,dq}{(2\pi\hbar)^r}, \tag{5.2}$$

где $d\bar{N}$ – среднее число частиц в идеальном газе, имеющих обобщенный импульсы и координаты в интервалах от p до $p + dp$ и от q до $q + dq$ соответственно; $\varepsilon(p, q)$ – энергия отдельного атома или молекулы, выраженная через p и q; $\hbar$ – постоянная Планка; r – число степеней свободы атома или молекулы.

Распределения (5.1) и (5.2) имеют место, если выполняется условие

$$\left(\frac{N_0}{V}\right)\left(\frac{\hbar^2}{m\,T}\right)^{3/2} \ll 1,$$

где m – масса частицы; N_0 – число частиц в газе; V – объем газа.

Задачи

I

5.1. Используя распределение Больцмана в квазиклассическом приближении, получить в декартовой системе координат распределение Максвелла по импульсам и скоростям для одноатомного газа.

5.2. Используя распределение Максвелла по скоростям в декартовой системе координат для одноатомного газа, получить распределение Максвелла в цилиндрической и сферической системах координат.

5.3. Используя распределение Максвелла по скоростям, найти средние значения:

а) $\overline{v_x}$; б) $\overline{v}$; в) $\overline{v_x^2}$.

5.4. Найти число частиц в единице объема идеального газа, v_z-компонента скорости которых лежит в интервале $0 \le v_z \le v_z^0$, в то время как компоненты скорости v_x и v_y лежат в интервалах от v_x до $v_x + dv_x$ и от v_y до $v_y + dv_y$.

5.5. Найти число ударов о стенку (в единицу времени и на единицу поверхности):

а) частицами газа, v_z-компонента скорости которых лежит в интервале от v_z до $v_z + dv_z$, в то время как компоненты скорости v_x и v_y лежат в интервалах $-\infty \le v_x \le +\infty$, $-\infty \le v_y \le +\infty$ соответственно (ось z перпендикулярна к стенке);

б) частицами газа, двигающимися к стенке в элементе телесного угла $d\Omega$, в то время как значения абсолютной величины скорости v заключены в интервале от v до $v + dv$.

5.6. Найти наиболее вероятную скорость атома в одноатомном идеальном газе.

5.7. Найти распределение по импульсам для ультрарелятивистского одноатомного идеального газа.

5.8. Найти число столкновений молекулы с остальными молекулами в единицу времени, считая молекулы абсолютно твердыми шариками радиусом a.

5.9. Найти средний размер $\bar{l}$ двухатомной молекулы, совершающей гармонические колебания около положения равновесия.

5.10. В квазиклассическом приближении получить распределение Больцмана для одноатомного идеального газа, находящегося в поле тяжести.

II

5.11. Получить распределение Максвелла по кинетическим энергиям частиц для одноатомного газа.

5.12. Найти число частиц в единице объема газа с кинетическими энергиями ε в интервале $\varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$ (газ одноатомный).

5.13. Найти число частиц в одноатомном газе, имеющих кинетическую энергию бо́льшую, чем заданная энергия ε_0. Считать при этом, что $\varepsilon_0 \gg T$.

5.14. Найти наиболее вероятную кинетическую энергию частицы в одноатомном идеальном газе.

5.15. Найти химический потенциал одноатомного идеального газа, используя распределение Больцмана.

5.16. Как изменится распределение Максвелла, если газ как целое будет совершать движение со скоростью $\vec{u}$?

5.17. Найти среднюю потенциальную энергию частицы одноатомного идеального газа, находящегося во вращающемся цилиндре (радиус цилиндра R, угловая скорость вращения цилиндра вокруг своей оси ω, масса частицы m).

5.18. Энергия частицы идеального релятивистского газа ε связана с импульсом p соотношением $\varepsilon = \sqrt{(m c^2)^2 + (p c)^2}$. Найти распределение Максвелла в данном случае.

5.19. Найти распределение Максвелла по относительным скоростям (одной частицы относительно другой).

5.20. Получить распределение Максвелла по скоростям для случая двухмерного одноатомного идеального газа; найти среднюю скорость атомов, а также средний квадрат скорости.

5.21. Показать, что среднее число ударов частиц одноатомного идеального газа о стенку может быть записано в виде

$$\nu = \frac{n\bar{v}}{4},$$

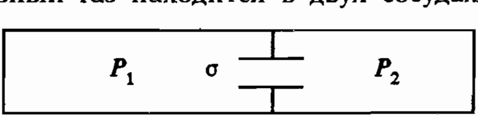
где n – среднее число частиц в единице объема газа, $\bar{v}$ – средняя скорость частиц газа.

5.22. Электроны, испаряющиеся с раскаленной нити и образующие газ с плотностью n, пролетают через последовательность щелей, образующих направленный пучок площадью 1 см^2. Пучок проходит через задерживающее электрическое поле, останавливающее часть электронов. Считая газ электронов идеальным, найти число электронов, проходящих через задерживающее поле в единицу времени.

5.23. Атомарный пучок выходит из узкой щели в откачанный сосуд. Найти $\bar{v}$ и $\overline{v^2}$ в пучке, считая атомарный газ идеальным.

5.24. Найти распределение частиц по импульсам для релятивистского одноатомного идеального газа.

5.25. Идеальный газ находится в двух сосудах



при одинаковой температуре T и различных давлениях P_1 и P_2. Сосуды расположены рядом и в перегородке между ними имеется узкое отверстие с площадью σ. Требуется:

а) вычислить количество газа, протекающего в единицу времени в сторону меньшего давления в стационарном случае ($P_1 = \text{const}$ и $P_2 = \text{const}$);

б) вычислить энергию, переносимую в единицу времени;

в) определить среднюю энергию, переносимую одной частицей. Почему она больше, чем $3/2\,T$?

д) определить, что надо сделать, чтобы условия опыта сохранились постоянными.

5.26. Показать, что для идеального газа с зависимостью кинетической энергии ε частицы от импульса $\vec{p}$ в виде $\varepsilon(\vec{p})$ давление газа определяется соотношением

$$P = \frac{4\pi}{3}\frac{N}{V}\int_0^{\infty}\frac{\partial\varepsilon}{\partial|\vec{p}|}\,|\vec{p}|^3 f(\vec{p})\,d|\vec{p}|,$$

где $f(\vec{p})$ – функция распределения по импульсам.

5.27. Найти центр масс столба идеального газа в однородном поле тяготения, если ускорение свободного падения $g = \mathrm{const}$, масса молекулы m, температура газа T. Для простоты принять, что высота столба газа велика.

5.28. Пусть величина $4\pi\,v^2 f(v^2)\,dv$ представляет собой вероятность того, что абсолютное значение скорости v частицы лежит в интервале $(v,\ v + dv)$, причем $f(v^2)$ – дифференцируемая функция, вид которой не задан. Получить распределение Максвелла по скоростям в предположении, что распределения вероятности для декартовых компонент вектора скорости:

а) независимы; б) идентичны.

5.29. Найти среднее значение потенциальной энергии одной частицы в равновесном столбе идеального газа высотой H. Газ находится при температуре T в однородном поле тяжести с ускорением $g = \mathrm{const}$, масса молекулы газа m.

5.30. Найти $\overline{r^2}$ частиц идеального газа от оси центрифуги радиусом R. Масса частицы газа m, температура газа T, угловая скорость вращения центрифуги ω. Показать, что не существует наивероятнейшего расстояния до оси.

5.31. Получить распределение частиц идеального газа по координатам в вертикальном цилиндре радиусом R, высотой H, находящегося в однородном поле тяжести с ускорением $g = \mathrm{const}$ и вращающегося вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Масса частицы m, температура газа T.

5.32. Найти среднюю потенциальную энергию молекулы двухатомного идеального газа, помещенного в постоянное однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}$. Электрический дипольный момент молекулы $\vec{d}_0$, температура газа T.

5.33. Атомы в двухатомной молекуле взаимодействуют по закону $U(r) = \dfrac{A}{r^{12}} - \dfrac{B}{r^6}$ $(B, A > 0)$. Определить коэффициент линейного расширения такой молекулы. Температура газа T.

Глава 6. КВАНТОВЫЕ ГАЗЫ (РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ И БОЗЕ)

Если при заданной плотности газа $\frac{N_0}{V}$ понижать температуру газа T, то условие $\left(\frac{N_0}{V}\right)\left(\frac{\hbar^2}{mT}\right)^{3/2} \ll 1$, при котором имеет место распределение Больцмана, в конце концов нарушится и распределение Больцмана потеряет смысл. В этом случае средние значения частиц $\bar{n}_k$ в данном квантовом состоянии k могут быть получены, если известен спин частиц (газ по-прежнему остается идеальным). Для полуцелого спина частицы:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}} + 1} \tag{6.1}$$

(обозначения те же, что и в формуле (5.1) в разделе "Идеальный газ"). Соответственно в квазиклассическом приближении

$$d\bar{N} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(p,q)-\mu}{T}} + 1} \frac{g\,dp\,dq}{(2\pi\hbar)^r}. \tag{6.2}$$

(Обозначения те же, что и в формуле (5.2).)

Выражения (6.1) и (6.2) представляют собой распределение Ферми.

Если же спин частицы газа является целым, то величина $\bar{n}_k$ принимает вид

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{T}} - 1} \tag{6.3}$$

и, соответственно, в квазиклассическом приближении

$$d\bar{N} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(p,q)-\mu}{T}} - 1} \frac{g\,dp\,dq}{(2\pi\hbar)^r}. \tag{6.4}$$

Выражения (6.3) и (6.4) представляют собой распределение Бозе.

Отметим, что в формулах (6.2) и (6.4) g – количество проекций спина на некоторое направление.

Задачи

I

6.1. Для абсолютно вырожденного газа электронов ($T = 0$) найти:

а) химический потенциал газа $\mu(P, 0)$; б) среднюю энергию газа $\bar{E}$; в) давление газа P; г) связь P и $\bar{E}$ и убедиться в том, что эта связь такая же, как и для случая обычного идеального атомарного газа при нормальных условиях.

6.2. Определить число состояний $\Omega(\varepsilon)d\varepsilon$, импульс Ферми и энергию Ферми для абсолютно вырожденного ультрарелятивистского газа электронов из N_0 частиц в объеме V (энергия частиц ε связана с импульсом p соотношением $\varepsilon = pc$, где c – скорость света).

6.3. Для газа фермионов при абсолютном нуле температуры найти среднюю скорость частиц, среднюю квадратичную скорость, а также среднее значение обратной скорости.

6.4. Найти поправочный член в уравнении состояния идеального газа, обусловленный квантовой статистикой.

6.5. Найти связь между давлением и средней плотностью энергии для бозе-газа в нерелятивистском случае.

6.6. Оценить теплоемкость C_p равновесного черного излучения.

6.7. Вывести формулу Планка для черного излучения в диспергирующей среде, в которой показатель преломления зависит от частоты излучения.

II

6.8. Для абсолютно вырожденного газа электронов ($T = 0$) найти число ударов о стенку (в единицу времени и о единицу поверхности).

6.9. Для абсолютно вырожденного газа электронов ($T = 0$) найти число ударов о стенку электронами (в единицу времени и о единицу поверхности), направления движения которых лежат внутри телесного угла $d\Omega$, в то время как абсолютное значение скорости электронов лежит в пределах $0 \le v \le \dfrac{p_0}{m}$, где p_0 – импульс Ферми, m – масса электрона.

6.10. Показать, что если химический потенциал ферми-газа отрицателен $\mu(P, T) < 0$ и выполняется условие $\dfrac{|\mu|}{T} \gg 1$, то распределение Ферми переходит в распределение Больцмана.

6.11. Показать, что если химический потенциал бозе-газа удовлетворяет условию $\dfrac{|\mu|}{T} \gg 1$, то распределение Бозе переходит в распределение Больцмана.

6.12. Вычислить химический потенциал сильновырожденного электронного газа при температуре, отличной от абсолютного нуля.

6.13. Вывести формулу для спектральной плотности равновесного излучения в двухмерном случае.

6.14. Получить термодинамические функции черного излучения в двухмерном случае.

6.15. Дана одномерная система из N частиц со спином $1/2$. Взаимодействуют лишь соседние частицы. Энергия взаимодействия есть ε, если спины соседних частиц параллельны, и $-\varepsilon$, если антипараллельны. Найти статистическую сумму для такой системы.

6.16. Вычислить энтропию ферми-газа при низких температурах.

6.17. Найти отношение температур вырождения электронов и протонов внутри звезды, состоящей из полностью ионизованного водорода.

6.18. Чему равно давление электронного газа в серебре при $T = 0$ (в $1\ см^3$ серебра находится $6 \cdot 10^{22}$ электронов).

6.19. Получить распределение Ферми, используя распределение Гиббса для подсистемы с переменным числом частиц

$$w_k = e^{\frac{\Omega_k + n_k(\mu - \varepsilon_k)}{T}},$$

где k – совокупность квантовых чисел, определяющих состояние фермиона; Ω_k – термодинамический потенциал частиц в состоянии k; n_k – числа заполнения (число ферминов в состоянии k); μ – химический потенциал; ε_k – энергия фермиона в состоянии k; T – температура ферми-газа.

6.20. Получить распределение Бозе, используя распределение Гиббса для системы с переменным числом частиц

$$w_k = e^{\frac{\Omega_k + n_k(\mu - \varepsilon_k)}{T}}.$$

(Все обозначения в данном выражении тождественно совпадают с обозначениями предыдущей задачи).

6.21. Найти уравнение состояния абсолютно вырожденного ($T = 0$) ультрарелятивистского газа электронов.

6.22. Для абсолютно вырожденного ультрарелятивистского газа электронов ($T = 0$) найти число ударов о стенку электронов (в единицу времени и о единицу поверхности).

6.23. Найти температурную зависимость $C_p - C_V$ при $T \to 0$ для вырожденного газа электронов, энтропия которого обращается в нуль по закону $S(P, T) = f(P)T^n$, где f – некоторая функция давления P, n – целое положительное число.

6.24. Найти связь между давлением P и средней энергией $\bar{E}$ для абсолютно вырожденного ($T = 0$) ультрарелятивистского газа электронов.

6.25. Получить выражение для средней энергии $\bar{E}$ и давления P для слабовырожденного газа электронов.

6.26. Опираясь на формулу Планка, получить для черного излучения:

а) среднюю энергию $\bar{E}$; б) теплоемкость C_V; в) энтропию S;

г) свободную энергию F и уравнение состояния.

6.27. Определить давление вырожденного электронного газа для $T \to 0$.

6.28. Найти изотермическую сжимаемость $\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ абсолютно вырожденного электронного газа.

6.29. Показать, что нейтронную звезду, если она достаточно плотная, можно рассматривать как абсолютно вырожденный газ релятивистских фермионов. Вывести выражение, связывающее массу и радиус такой звезды.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1. Вычислим квадрат искомого интеграла:

$$(I(\alpha))^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha r^2}\,r\,dr\,d\varphi = \frac{2\pi}{2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha y}\,dy = \frac{\pi}{\alpha}.$$

1.2. Дифференцируя интеграл Пуассона по параметру α, получим:

$$-\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = -\frac{d}{d\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}.$$

1.3. При n нечетном интеграл $I_n(x) = 0$, вследствие антисимметрии подынтегрального выражения. Пусть $n = 2k$ (четное). Дифференцируя интеграл Пуассона по параметру k раз, получаем:

$$I_{2k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2}\,dx = (-1)^k \frac{d^k}{d\alpha^k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = (-1)^k\sqrt{\pi}\,\frac{d^k}{d\alpha^k}\left(\alpha^{-1/2}\right).$$

Окончательно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{(2k-1)!}{2^k}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-1/2(2k+1)}.$$

1.4. Вычислим интеграл по частям:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^n\,dx = -x^4 e^{-x}\Big|_0^{\infty} + n\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx = n(n-1)(n-2)\ldots\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\,dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^n\,dx = \Gamma(n+1) = n!$$

Вычислим $\Gamma(1/2)$:

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2}\, dt.$$

После замены переменных $t = y^2$ интеграл сводится к известному интегралу Пуассона:

$$2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

1.6. Свяжем интеграл Пуассона с гамма-функцией:

$$I_{2k}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} \int_0^\infty e^{-y} y^{k-1/2} dy = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\alpha^{k+1/2}}.$$

Здесь произведена замена переменных $\alpha x^2 = y$; $dx = \dfrac{dy}{2\sqrt{\alpha y}}$.

Предельное значение интеграла ошибок $\Phi(\infty)$ выражается через интеграл Пуассона:

$$\Phi(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 1.$$

1.7. Вычислим сначала логарифм факториала:

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n.$$

Заменим сумму интегрированием. Это можно сделать при достаточно больших значениях n:

$$\sum_{n=1}^{n} \ln n \approx \int_1^n \ln x\, dx = (x\ln x - x)\Big|_1^n.$$

Следовательно, $\ln n! = \ln(n^n e^{-n})$, откуда $n! \approx n^n e^{-n}$.

Полученная формула удовлетворительна при очень больших значениях n. Существуют методы, позволяющие более корректно переходить от суммирования к интегрированию. Соответствующая уточненная формула имеет вид:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Она называется формулой Стирлинга.

1.9. Введем малую величину α, и преобразуем интеграл, определяющий дельта-функции к виду

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \lim_{|\alpha| \to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{(ix+\alpha)k} dk + \int_{0}^{+\infty} e^{(ix-\alpha)k} dk \right\}.$$

Проведем интегрирование

$$f(x) = \lim_{|\alpha| \to 0} \left[\frac{1}{\alpha + ix} + \frac{1}{\alpha - ix} \right] = \lim_{|\alpha| \to 0} \frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

При $\qquad x = 0, \quad f(x=0) = \lim\limits_{|\alpha| \to 0} \dfrac{2}{\alpha} = \infty.$

При $\qquad x \neq 0, \quad f(x) = \lim\limits_{|\alpha| \to 0} \dfrac{2\alpha}{x^2} = 0.$

Проинтегрируем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{|\alpha| \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\alpha\, dx}{\alpha^2 + x^2} = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk\, dx = 1.$$

Таким образом, функция $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi} f(x)$ обладает всеми свойствами дельта-функции. Те же результаты можно получить используя методы теории функции комплексного переменного.

1.10. Дельта-функция – четная функция:

$$\delta(-x) = \delta(x).$$

Действительно

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim \frac{2\alpha}{\alpha^2 + x^2} = \delta(-x).$$

Кроме того,

$$\int \delta(kx)\, dx = \frac{1}{k} \int \delta(y)\, dy, \quad \delta(kx) = \frac{1}{k} \delta(x).$$

1.11. Вычисляем интеграл по частям:

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{e^x + 1} = \frac{x^2}{2(e^x+1)}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}\, dx.$$

Воспользуемся соотношением, получаемым из ряда Тейлора:

$$\frac{1}{(1+t)^2} = 1 - 2t + 3t^2 - \ldots \sum_{k=0}^\infty (-1)^k (k+1)\, t^k.$$

Подставим $t \to e^{-x}$. Откуда

$$\frac{1}{2} \int \sum_{k=1}^\infty x^2 (-1)^{k+1} e^{-kx} k\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2} \int_0^\infty e^{-y} y^2\, dy = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots = \sum (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}.$$

Суммируем получившийся ряд. Для этого можно воспользоваться математическим справочником, из которого следует, что

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Окончательно

$$\int_0^\infty \frac{x\, dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^2}{12}.$$

1.12. Интеграл вычисляется с использованием соотношения

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2 + \ldots,$$

из которого следует, что

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \int \frac{x e^{-x}\,dx}{1 - e^{-x}} = \int_0^\infty x e^{-x}\left(1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots\right) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty x e^{-(n+1)x}\,dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} \int_0^\infty y e^{-y}\,dy = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots\,.$$

Из математического справочника следует, что

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi}{6}.$$

Окончательно имеем:

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

1.13. Решение аналогично решению задачи 1.11:

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x + 1} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1}{k^4} \int_0^\infty e^{-y} y^4\,dy = 6\left[1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \ldots\right].$$

Воспользуемся соотношением

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^{k+1} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{48}.$$

Окончательно имеем:

$$\int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x + 1} = \frac{\pi^4}{8}.$$

Аналогично, с использованием разложения в ряд подынтегральных функций и суммируя получившиеся ряды, можно вычислять и другие подобные интегралы.

1.14. Обозначим

$$\Phi_1(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt.$$

Введем функцию

$$\Phi(\alpha, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \Phi\left(\sqrt{\alpha}\, x\right).$$

Будем рассматривать функцию $\Phi_1(x)$ как предел $(\alpha \to 1)$:

$$\Phi_1(x) = \lim_{\alpha \to 1} \left(-\frac{\partial \Phi(\alpha, x)}{\partial \alpha} \right).$$

Произведем дифференцирование по α:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\alpha^{3/2}} \Phi\left(\sqrt{\alpha}\, x\right) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{d\Phi}{d\left(\sqrt{\alpha}\, x\right)} \frac{d\sqrt{\alpha}\, x}{d\alpha}.$$

Примем во внимание, что

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \qquad \frac{d\sqrt{\alpha}\, x}{d\alpha} = x \frac{1}{2} \alpha^{-1/2}.$$

Следовательно, при $\alpha \to 1$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Phi(x) + \frac{x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

Откуда
$$\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Phi(x) - \frac{x}{2} e^{-x^2}.$$

Аналогично решаются задачи по вычислению интеграла вида

$$\Phi_k(x) = \int_0^x t^{2k} e^{-t^2} dt.$$

При $x \to \infty$ эти интегралы переходят в интеграл Пуассона и его модификации.

1.15. Введем коэффициент C_n, подлежащий определению

$$V_n = C_n r^n.$$

Степень r очевидна из размерности.

Введем поверхность многомерной сферы

$$dV_n = \frac{dV_n}{dr} dr = S_n dr, \quad S_n = n C_n r^{n-1}.$$

Вычислим многомерный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)} dx_1 dx_2 dx_3 \ldots = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)^n.$$

Преобразуем дифференциал объема в подынтегральном выражении и вычислим интеграл снова:

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} n C_n r^{n-1} dr = \frac{n C_n}{2} \alpha^{-n/2} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{n-2}{2}} dy = \frac{n}{2} C_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = C_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

Здесь использована Г-функция.

Учитывая, что при $n = 2k$ $\quad \Gamma\left(\frac{2k}{2} + 1\right) = k!$

при $n = 2k + 1$ $\quad \Gamma\left(k + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} [2k + 1]!!,$

получим окончательно:

для $n = 2k$ $\quad V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} r^{2k},$

для $n = 2k + 1$ $\quad V_{2k+1} = \frac{\pi^k 2^{k+1}}{(2k + 1)!!} r^{2k+1}.$

Легко убедиться в том, что $C_n = \pi$ при $n = 2$ и $C_n = \frac{4\pi}{3}$ при $n = 3$.

1.16. Нормировочный коэффициент вычисляется из условия

$$\rho(x) = A, \quad \int_a^b A\,dx = 1, \quad \text{откуда} \quad A = \frac{1}{b-a}.$$

Среднее значение $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Среднее от квадрата $\overline{x^2}$:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(a-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

Откуда дисперсия

$$(\Delta x)^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad \Delta x = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Относительная дисперсия δx равна:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{b-a}{\sqrt{3}\,(a+b)}.$$

1.17. Нормировочный коэффициент A (с использованием интеграла Пуассона) равен: $A = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\,\sigma}}$.

При вычислении среднего x используется замена переменных

$$y = x - x_0.$$

При этом $$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma}}\,dx = \frac{x_0}{\sqrt{\pi\,\sigma}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{\sigma}}\,dy = x_0.$$

Аналогично $$\overline{x^2} = \frac{\sigma}{2} + x_0^2.$$

Откуда $$2(\Delta x)^2 = \sigma.$$

И окончательно имеем:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\Delta x)^2}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2(\Delta x)^2}}.$$

1.18. Перейдем к сферической системе координат:

$$dW(x, y, z) = A e^{-r^2/r_0^2} dx\,dy\,dz = A e^{-r^2/r_0^2} r^2\,dr \sin\theta\,d\theta\,d\varphi.$$

Освободимся от угловой зависимости, проинтегрировав по углам θ и φ. В результате получим:

$$dW(r) = 4\pi A e^{-r^2/r_0^2} r^2\,dr.$$

Вычислим нормировочный коэффициент:

$$1 = \int_0^\infty dW(r) = 4\pi A \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} r^2\,dr = \frac{4\pi A r_0^3 \sqrt{\pi}}{4}.$$

Окончательно получим:

$$dW(r) = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, r_0^3} e^{-r^2/r_0^2} r^2\,dr.$$

Вычисляем $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, r_0^3} \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} r^3\,dr = \frac{4 r_0^4}{\sqrt{\pi}\, r_0^3\, 2} \int_0^\infty e^{-y} y\,dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} r_0.$$

Вычисляем $\overline{r^2}$:

$$\overline{r^2} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, r_0^3} \int_0^\infty e^{-r^2/r_0^2} r^4\,dr = \frac{4 r_0^5}{\sqrt{\pi}\, r_0^3} \int_0^\infty e^{-y^2} y^4\,dr = \frac{3}{2} r_0^2.$$

Дисперсия Δr равна:

$$\Delta r = \sqrt{\frac{3}{2} r_0^2 - \frac{4}{\pi} r_0^2}.$$

Относительная дисперсия:

$$\delta r = \frac{\sqrt{3\pi - 8}}{2\sqrt{2}} \approx 42\,\%.$$

1.19. Если все точки круга равновероятны, то

$$d\,W(x,\ y) = \frac{1}{\pi R^2}\,d x\,d y.$$

Освободимся от зависимости от y:

$$d\,W(x) = \frac{1}{\pi R^2}\left(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} d y\right) d x.$$

Окончательно $$d\,W(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}\,d x.$$

Проверим нормировку:

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}\,d x = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1 - y^2}\,d y = 1.$$

1.20. Вероятность нахождения частицы в интервале $d x$ пропорциональна времени нахождения в этом интервале. Откуда

$$d\,W(x) = A\,\frac{d x}{\upsilon(x)},$$

где $\upsilon(x)$ – скорость в точке x. Таким образом,

$$\upsilon(x) = \frac{d x}{d t} = \hat{\omega}\,x_0 \sin\omega t = \omega\,x_0\sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}};$$

$$d\,W(x) = \frac{A}{\omega x_0}\,\frac{d x}{\sqrt{1 - x^2/x_0^2}};\qquad A = \frac{\omega}{\pi}.$$

Окончательно $$d\,W(x) = \frac{1}{\pi x_0}\,\frac{d x}{\sqrt{1 - x^2/x_0^2}}.$$

Вычислим $\bar{x}$: $$\bar{x} = \int_{-x_0}^{x_0} x\, d\, W(x) = 0.$$

Вычислим $\bar{x}^2$: $$\bar{x}^2 = \frac{x_0^2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{y^2\, dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x_0^2}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{x_0^2}{2}.$$

1.21. Вычислим нормировочную константу:

$$A \int_0^a \int_0^b \left(x^2 + y^2\right) dx\, dy = A\left(\frac{a^3 b}{3} + \frac{a b^3}{3}\right) = 1.$$

Откуда $$A = \frac{3}{ab\left(a^2 + b^2\right)}.$$

Коэффициент корреляции зависит от $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\overline{xy}$:

$$K = \langle xy - x\bar{y} - \bar{x}y + \bar{x}\bar{y} \rangle = \overline{xy} - \bar{x}\bar{y}.$$

Вычислим $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{3}{ab\left(a^2 + b^2\right)} \int_0^a \int_0^b \left(x^3 + xy^2\right) dx\, dy = \frac{a\left(3a^2 + 2b^2\right)}{4\left(a^2 + b^2\right)}.$$

Вычислим $\bar{y}$: $$\bar{y} = \frac{b\left(2a^2 + 3b^2\right)}{4\left(a^2 + b^2\right)}.$$

Среднее $\overline{xy}$ равно:

$$\overline{xy} = \frac{3}{ab\left(a^2 + b^2\right)} \int_0^a \int_0^b \left(x^3 y + xy^3\right) dx\, dy = \frac{3}{8} ab.$$

Коэффициент корреляции получается подстановкой вычисленных $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\overline{xy}$, откуда

$$K = -\frac{a^2 b^3}{16\left(a^2 + b^2\right)^2}.$$

(Физический смысл имеет модуль полученной величины.)

$$d\,W(x) = \frac{3}{a\,b\,(a^2+b^2)}\left[\int_0^b (x^2+y^2)\,d\,y\right]d\,x = \frac{(3x^2+b^2)}{a\,(a^2+b^2)}\,d\,x.$$

Следовательно,

$$\rho\,(x) = \frac{(3x^2+b^2)}{a\,(a^2+b^2)}.$$

1.22. $$d\,W = \rho\,d\,V = A\,R(r)\sin^2\theta\,d\,V.$$

В сферической системе координат

$$d\,W(r,\ \theta,\ \varphi) = A\,R(r)\sin^2\theta\,r^2\,d\,r\sin\theta\,d\,\theta\,d\,\varphi\,.$$

Освободимся от переменных r и φ:

$$d\,W(\theta) = \int_0^\infty R(r)\,r^2\,d\,r\int_0^{2\pi} d\,\varphi\,A\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\,\theta;$$

$$d\,W(\theta) = 2\pi\int_0^\infty R(r)\,r^2\,d\,r\,A\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\,\theta.$$

Нормировочную константу A определим из условия

$$2\pi\,A\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\,\theta = 1; \qquad \int_0^\pi \sin^3\theta\,d\,\theta = \frac{4}{3}.$$

Окончательно имеем: $$d\,W(\theta) = \frac{3}{4}\sin^3\theta\,d\,\theta.$$

При этом подразумевалась нормировка радиальной зависимости функции распределения

$$\int_0^\infty R(r)\,r^2\,d\,r = 1.$$

1.23. Так как искомая функция должна удовлетворять заданным условиям, введем параметр α, отражающий отличие ее от остальных функций. Функция $\rho(x, \alpha)$ удовлетворяет условию нормировки и заданному среднему значению $\bar{x} = x_0$:

$$\int_0^\infty \rho(x, \alpha)\, dx = 1; \qquad \bar{x} = \int_0^\infty x\, \rho(x, \alpha)\, dx = x_0.$$

Кроме того, должна быть максимальна энтропия

$$\sigma(\alpha) = -\int_0^\infty \rho(x, \alpha) \ln \rho(x, \alpha)\, dx.$$

Введем

$$I(\alpha) = \int_0^\infty [-\rho \ln \rho + \mu \rho + \lambda x \rho]\, dx.$$

Здесь μ и λ **интегрирующие или лагранжевы** множители. Так как $I(\alpha)$ должна быть максимальна, то

$$\delta I(\alpha) = \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} \delta\alpha = 0.$$

Введем $\delta\rho = \dfrac{d\rho}{d\alpha} \delta\alpha$. Продифференцируем подынтегральное выражение по параметру α, умножим на $\delta\alpha$:

$$\delta I(\alpha) = \int [-\ln \rho(x, \alpha) - 1 + \mu + \lambda x]\, \delta\rho\, dx = 0.$$

Так как $\delta\rho$ произвольна, из условия $\delta I = 0$ следует

$$-\ln \rho(x, \alpha) = 1 - \mu + \lambda x$$

$$\text{и} \quad \rho(x, \alpha) = e^{-\lambda x + \mu - 1} = A e^{-\lambda x}.$$

Вычислим A и λ используя величину x_0:

$$1 = \int_0^\infty A e^{-\lambda x} = \frac{A}{\lambda} \qquad A = \lambda \qquad \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda} = x_0.$$

Окончательно имеем:

$$\rho(x) = \frac{1}{x_0} e^{-x/x_0}.$$

Такое распределение называется **распределением Пуассона.**

1.24. Решение задачи аналогично 1.21:

$$1 = \int_a^b \rho(x, \alpha)\, dx \qquad I(\alpha) = \int_a^b (-\rho \ln \rho + \lambda \rho)\, dx;$$

$$\delta I(\alpha) = \int_a^b (-\ln \rho - 1 + \lambda)\, \delta \rho\, dx; \qquad \ln \rho = \lambda - 1 = \text{const}.$$

Окончательно
$$\rho(x) = \frac{1}{b - a}.$$

1.25. Решение задачи аналогично 1.21:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x, \alpha)\, dx; \qquad \bar{x} = x_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x \rho(x, \alpha)\, dx;$$

$$(\Delta x)^2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 \rho(x, \alpha)\, dx;$$

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\rho \ln \rho + \lambda \rho + \mu x \rho + \nu (x - x_0)^2 \rho\right] dx;$$

$$\delta I(\alpha) = 0; \qquad \rho(x) = A e^{-ax^2 + bx}.$$

Здесь a и b — определенные функции исходных интегрирующих множителей λ, μ и ν.

Используя решение задачи 1.17 окончательно получим:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

1.26.
$$\langle (x - \bar{x})(y - \bar{y}) \rangle = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y} = 0;$$

$$\int xy \rho(x, y)\, dx\, dy = \int x \rho(x)\, dx \int y \rho(y)\, dy.$$

Это равенство выполняется при условии, что $\rho(x, y) = \rho(x)\rho(y)$. Плотности вероятности независимых переменных перемножаются.

1.27. Вычислим нормировочный коэффициент $A = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}$. Искомая вероятность записывается в виде интеграла

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}}\int_a^b e^{-x^2/\sigma}\,dx.$$

Воспользуемся интегралом ошибок

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Заменяя переменные, получим

$$W(a, b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{a/\sqrt{\sigma}}^{b/\sqrt{\sigma}} e^{-y^2}\,dy.$$

Окончательно

$$W(a, b) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{\sigma}}\right)\right].$$

В частности, если $a = 0$, а $b = \infty$, то вероятность равна $1/2$. Это очевидно, так как полная вероятность равна нулю, а данная функция распределения – симметрична.

1.28. Вычислим нормировочный коэффициент A:

$$A\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{r_0^2}}\,dx\,dy\,dz = A\left(\sqrt{\pi}\,r_0\right)^3 = 1.$$

Освободимся от переменных y и z:

$$dW(x) = \left[\iint dW(x, y, z)\,dy\,dz\right]dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,r_0}e^{-x^2/r_0^2}\,dx.$$

Так как распределение антисимметрично по x, то среднее значение $\bar{x}$ равно нулю:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\, r_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/r_0} dx = \frac{r_0^2}{2}; \qquad \Delta x = \sqrt{\overline{x^2}} = \frac{r_0}{\sqrt{2}}.$$

1.29. Так как распределение по $\bar{x}$ симметрично, то вероятность

$$W(0,\ x^*) = \frac{1}{4}.$$

Воспользуемся результатом решения задачи 1.27:

$$W(0,\ x^*) = \frac{1}{2}\, \Phi\left(\frac{x^*}{\sqrt{\sigma}}\right) = \frac{1}{4}.$$

Воспользовавшись таблицей значений интеграла ошибок, получим y^* для которого $\Phi(y^*) = \frac{1}{2}$. Как оказалось, $y^* = 0{,}477$.

Следовательно, для данной плотности вероятности

$$x^* = 0{,}477 \cdot \sqrt{\sigma}.$$

1.30. Вероятность того, что в объеме $v \le V$ находится одна частица равна $p = \frac{v}{V}$.

Вероятность того, что частица **не** находится в этом объеме равна $(1 - p)$.

Искомая вероятность имеет вид

$$W_n = C_{n,N} \left(\frac{v}{V}\right)^n \left(1 - \frac{v}{V}\right)^{N-n}.$$

Определим коэффициент $C_{n,N}$. Воспользуемся условием $\sum\limits_{n=0}^{N} W_n = 1$. Известно, что

$$(a + b)^N = \sum_{k=0}^{N} C_N^k\, a^{N-k} b^k.$$

Здесь C_N^k – биномиальный коэффициент:

$$C_N^k = \frac{N!}{(N-k)!\,k!}.$$

В нашем случае

$$[p+(1-p)]^N \equiv 1 = \sum C_N^k p^{N-k}(1-p)^k.$$

Поэтому естественно принять

$$C_{nN} = C_N^n = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}.$$

Окончательно

$$W_v(n) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}\left(\frac{v}{V}\right)^n\left(1-\frac{v}{V}\right)^{N-n}.$$

Полученное распределение называется **биномиальным распределением, или распределением Бернулли.**

1.31. Используем неравенство $n \ll N$,

$$W_v(n) = \frac{N^n}{n!}p^n(1-p)^N.$$

Введем $\bar{n} = N\dfrac{v}{V}$.

Известно, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{a}{N}\right)^N = e^{-a},$$

откуда

$$W_n = \frac{\bar{n}^n e^{-\bar{n}}}{n!}.$$

Полученное распределение называется **распределением Пуассона.**

1.32. Прологарифмируем распределение Пуассона:

$$\ln W_n = n\,\mathrm{kn}\,\bar{n} - \bar{n} - \ln n!$$

При вычислении $\ln n!$ воспользуемся простейшим выражением для формулы Стирлинга:

$$n! = n^n e^{-n}.$$

Введем $\Delta n = n - \bar{n} \quad \Delta n \ll \bar{n}$.

Разложим $\ln\left(1 + \frac{\Delta n}{\bar{n}}\right)$ по малому параметру $\frac{\Delta n}{\bar{n}}$.

Учитывая, что $$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots,$$

получим $$\ln W(n) = -\frac{(\Delta n)^2}{2\bar{n}}.$$

Окончательно $$W_n = A\, e^{-\frac{\Delta n^2}{2\bar{n}}}.$$

С учетом условия нормировки –

$$\Sigma W_n = 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-y^2/2\bar{n}}\, dy$$

формула приобретает стандартный вид **распределения Гаусса:**

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}\, e^{-\frac{(\bar{n}-n)^2}{2\bar{n}}}; \quad W(n)\,dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{n}}}\, e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2\bar{n}}} \cdot dn$$

Глава 2

I

2.1. Движение частицы вдоль оси x – движение одномерное, для которого соответствующее фазовое пространство является двухмерным (в нем есть оси x и p_x). Так как движение вдоль оси x происходит с постоянной скоростью v_0, импульс частицы так же постоянен и равен $p_x = m v_0$. Фазовой траекторией оказывается прямая, параллельная оси x (рис. 2.1).

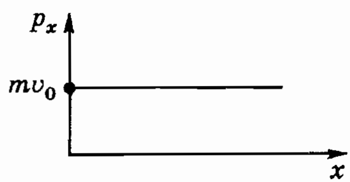


Рис. 2.1

2.2. В рассматриваемой задаче движение происходит вдоль оси x – движение является одномерным, и следовательно, соответствующее фазовое пространство является двухмерным. Для изображения в этом фазовом пространстве фазовой траектории частицы, двигающейся с трением, найдем сначала импульс и координату частицы как функцию времени. Для этого запишем уравнение движения $m\dfrac{dv_x}{dt} = -\gamma v_x$, где γ – коэффициент трения. Интегрирование уравнения движения приводит к $v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\gamma}{m}t}$, где v_0 – начальная скорость. Импульс частицы при этом равен $p_x(t) = m v_0 e^{-\frac{\gamma t}{m}}$. Интегрируя далее по времени выражение $v_x(t)$, получим $x(t) = \dfrac{m v_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma t}{m}}\right)$. Наконец, выражая отсюда экспоненту $e^{-\frac{\gamma t}{m}} = 1 - \dfrac{\gamma x}{m v_0}$ и подставляя ее в выражение для импульса, будем иметь уравнение фазовой траектории $p_x = m v_0 - \gamma x$. Эта фазовая траектория есть прямая линия с угловым коэффициентом $-\gamma$. Расстояние l определяется условием $p_x = 0$ и равно $l = \dfrac{m v_0}{\gamma}$ (рис. 2.2).

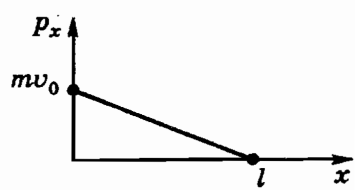


Рис. 2.2

2.3. Рассмотрим сначала одномерное движение одной материальной точки массой m вдоль оси z в поле тяжести с ускорением $g = \text{const}$. Соответствующее фазовое пространство является двухмерным. Для изображения фазовой траектории частицы в таком фазовом пространстве найдем сначала зависимость импульса и координаты частицы от времени. Для этого запишем уравнение движения частицы (ось z направлена по ускорению g): $\dfrac{dp_z}{dt} = mg$. Так как $p_z = m v_z$, то из уравнения движения следует $v_z(t) = gt + v_0$, где v_0 – постоянная интегрирования. Временно положим $v_0 = 0$. Далее, интегрируя по времени выражение $v_z(t)$, получим $z = \dfrac{gt^2}{2} + z_0$. Полагая временно $z_0 = 0$, будем иметь $p_z(t)=mgt$ и $z=\frac{gt^2}{2}$. Выражая t через z и подставляя в p_z, получим окончательно $p_z=\sqrt{2gm^2}\sqrt{z}$. Последнее равенство означает, что фазовой траекторией в рассматриваемом случае является парабола с вершиной на оси z.

Теперь проиллюстрируем справедливость теоремы Лиувилля, используя полученный выше результат. Теорема Лиувилля гласит: для механической системы, подчиняющейся уравнению Гамильтона, фазовый объем остается постоянным при движении системы.

Чтобы выполнить поставленную задачу, рассмотрим совокупность материальных точек с одинаковыми массами m, но с различными начальными импульсами $p_0=mv_0$ и координатами z_0, двигающимися вдоль оси z с ускорением g. Пусть эти различные p_0 и z_0 таковы, что соответствующие фазовые точки в начальный момент времени $t=0$ плотно заполняют прямоугольник $ABCD$ на фазовой плоскости $p_z z$. Координаты вершин прямоугольника $ABCD$ указаны на рис. 2.3.

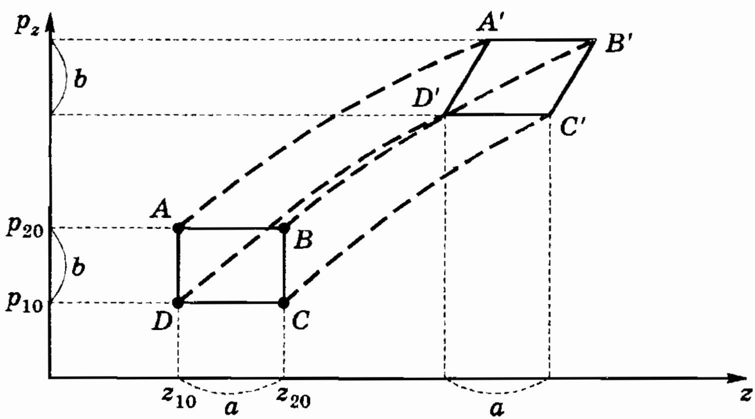


Рис. 2.3

За время $t>0$ вершины A, B, C, D сместятся из своего начального положения и перейдут в положение A', B', C', D', координаты которых имеют вид:

$$z_{A'} = z_A + \frac{p_{20}}{m} t + \frac{g t^2}{2}; \qquad p_{A'} = p_{20} + m g t;$$

$$z_{B'} = z_B + \frac{p_{20}}{m} t + \frac{g t^2}{2}; \qquad p_{B'} = p_{20} + m g t;$$

$$z_{C'} = z_C + \frac{p_{10}}{m} t + \frac{g t^2}{2}; \qquad p_{C'} = p_{10} + m g t;$$

$$z_{D'} = z_D + \frac{p_{10}}{m} t + \frac{g t^2}{2}; \qquad p_{D'} = p_{10} + m g t.$$

Из этих выражений следует, что отрезок $A'B'$ перемещается по фазовой плоскости все время параллельно отрезку AB, а отрезок $D'C'$ – параллельно отрезку DC, причем "скорости" движения $A'B'$ и $D'C'$ вдоль вертикальной оси p_z одинаковы, так что за время $t > 0$ эти отрезки проходят одинаковые пути в направлении p_z. В самом деле, $p_{A'} - p_{D'} = p_A - p_D = b$ и $p_{B'} - p_{C'} = p_B - p_C = b$. Однако "скорости" смещения отрезков $A'B'$ и $D'C'$ вдоль оси z различны. Действительно, если в момент $t = 0$ $z_A = z_D$ и $z_B = z_C$, то в момент $t > 0$ $z_{A'} > z_{D'}$ и $z_{B'} > z_{C'}$, что следует из явного вида $z_{A'}$, $z_{B'}$, $z_{C'}$, и $z_{D'}$, приведенных выше, поскольку по условию $p_{20} > p_{10}$. При этом выполняются равенства $z_{B'} - z_{A'} = z_B - z_A = a$ и $z_{C'} - z_{D'} = z_C - z_D = a$. Таким образом, при рассматриваемом смещении фазовых точек отрезки $A'B'$ и $D'C'$ смещаются параллельно оси z, но отрезок $A'B'$ смещается быстрее вдоль оси z, чем отрезок $D'C'$. В результате в момент времени $t > 0$ на фазовой плоскости имеет место параллелограмм $A'B'C'D'$. И если в начальный момент времени $t = 0$ фазовые точки располагались в прямоугольнике $ABCD$, площадь которого есть $S\,(t = 0) = ab$, то в моменты времени $t > 0$ все фазовые точки перейдут в новые положения (каждая фазовая точка по своей параболической фазовой траектории), и займут свои места в параллелограмме $A'B'C'D'$, площадь которого есть $S\,(t > 0) = ab$. Равенство $S\,(t > 0) = S\,(t = 0)$ и означает справедливость теоремы Лиувилля. В общем случае можно утверждать, что с течением времени фазовый объем механической системы может менять лишь форму при неизменной величине объема.

2.4. а) Движение точечной массы m на отрезке $0 \le x \le l$ между стенками, от которых она абсолютно упруго отражается, есть одномерное движение. Поэтому соответствующее фазовое пространство будет иметь два измерения. Так как движение между стенками является свободным, кинетическая энергия материальной точки сохраняется и равна $\varepsilon_0 = \frac{p_0^2}{2m}$. При этом движение вдоль оси x происходит с импульсом $p_x = p_0$, а движение против оси x, после абсолютно упругого удара о стенку в точке $x = l$, происходит с импульсом $p_x = -p_0$. Аналогичная ситуация имеет место при соударении со стенкой в точке $x = 0$. Имея это в виду, изобразим графически фазовую траекторию частицы в рассматриваемой задаче (рис. 2.4).

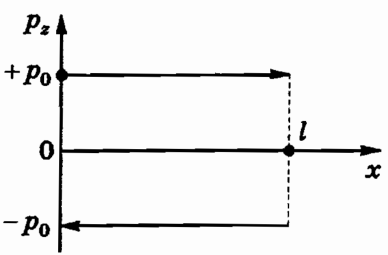


Рис. 2.4

б) Элемент объема двухмерного фазового пространства (в данном случае – элемент площади) есть $d\gamma = dp_x dx$. Объем же $\gamma(p_0)$, отвечающий импульсам p_x частицы в интервале $-p_0 \le p_x \le +p_0$ и координате x в интервале $0 \le x \le l$ равен $\gamma(p_0) = \int\limits_{-p_0}^{+p_0}\int\limits_0^l dp_x dx = 2p_0 l$. Величину $\gamma(p_0)$ можно выразить через кинетическую энергию $\varepsilon_0 = \frac{p_0^2}{2m}$. В результате будем иметь $\gamma(\varepsilon_0) = 2\sqrt{2m\varepsilon_0}\, l$. Фазовый объем $\gamma(\varepsilon_0)$ отвечает кинетической энергии частицы ε в интервале $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, и координате x в интервале $0 \le x \le l$.

в) Согласно квантовой механике одномерное движение частицы массой m между двумя бесконечно высокими стенками (абсолютно упругий удар), отстоящими друг от друга на расстоянии l, характеризуется энергией $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Каждому номеру n отвечает одно состояние (одна волновая функция). Поэтому число состояний, отвечающих энергиям частицы от E_1 до E_n равно n. Обозначая рассматриваемое число состояний буквой Γ и выражая это число состояний через E_n, будем иметь $\Gamma(E_n) = n = \sqrt{\dfrac{2ml^2 E_n}{\pi^2 \hbar^2}}$. Для $n >> 1$ энергия E_n плавно зависит от n, и потому можно число состояний Γ записать так: $\Gamma(E) = \sqrt{\dfrac{2ml^2 E}{\pi^2 \hbar^2}} = \sqrt{\dfrac{8ml^2 E}{(2\pi\hbar)^2}} = \dfrac{2\sqrt{2mE}\, l}{2\pi\hbar} = \dfrac{\gamma(E)}{2\pi\hbar}$. Это последнее равенство и устанавливает связь между числом состояний $\Gamma(E)$ частицы, двигающейся между двумя бесконечно высокими стенками (одномерное движение) и соответствующим фазовым объемом $\gamma(E)$.

2.5. Поскольку гармонический осциллятор является одномерным, его фазовое пространство двухмерно. Пусть масса колеблющейся частицы есть m, частота колебаний есть ω и колебания происходят вдоль оси x. Тогда зависимость координаты x частицы от времени t может быть записана в виде $x(t) = a\sin(\omega t + \alpha)$, где a – амплитуда колебаний, α – постоянная фаза. Скорость колеблющейся частицы есть $\dot{x}(t) = a\omega\cos(\omega t + \alpha)$, а импульс частицы равен $p(t) = m\omega a\cos(\omega t + \alpha)$. Имея это в виду, запишем полную энергию осциллятора:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{m\omega^2 a^2 \cos^2(\omega t + \alpha)}{2} + \frac{m\omega^2 a^2 \sin^2(\omega t + \alpha)}{2} = \frac{m\omega^2 a^2}{2}.$$

Если далее переписать полученное равенство так: $\dfrac{p^2}{(m\omega a)^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1$, то легко видеть, что это выражение представляет собой уравнение эллипса с полуосями $m\omega a$ и a. Таким образом, фазовая траектория одномерного гармонического осциллятора представляет собой эллипс.

2.6. Согласно методу неопределенных множителей Лагранжа, искомое распределение вероятностей отыскивается из требования экстремума комбинации $f=-\sum_{i=1}^{N} W_i \ln W_i + \alpha\sum_{i=1}^{N} W_i$, где $-\sum_{i=1}^{N} W_i \ln W_i = S$ есть энтропия системы, α – неопределенный множитель Лагранжа. Экстремум величины f означает обращение в нуль производной $\frac{\partial f}{\partial W_j}$ для любого номера j. Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial W_j} = \frac{\partial}{\partial W_j}\left\{-\sum_{i=1}^{N} W_i \ln W_i + \alpha\sum_{i=1}^{N} W_i\right\} = 0$. Выполним процедуру дифференцирования, принимая во внимание, что $\frac{\partial W_i}{\partial W_j} = 0$ для $i \neq j$ и что $\frac{\partial W_i}{\partial W_j} = 1$ для $i = j$:

$$\frac{\partial}{W_j}\left\{-\sum_{i=1}^{N} W_i \ln W_i + \alpha\sum_{i=1}^{N} W_i\right\} = \sum_{i=1}^{N}\left\{-\frac{\partial W_i}{\partial W_j}\ln W_i - W_i\frac{\partial}{\partial W_j}\ln W_i + \alpha\frac{\partial W_i}{\partial W_j}\right\} =$$

$=\{-\ln W_j - 1 + \alpha\} = 0$, откуда $\ln W_j = \alpha - 1$. Последнее равенство означает независимость вероятности W_j от номера j, так что $W_1 = W_2 = \ldots = W_N$. Используя далее условие нормировки $\sum_{i=1}^{N} W_i = 1$, найдем, что $W_1 = W_2 = \ldots = W_N = \frac{1}{N}$. Наконец, $S_{\max} = -\sum_{i=1}^{N} W_i \ln W_i = -\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\ln\frac{1}{N} = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\ln N = \ln N$, так как в этой сумме по i есть N одинаковых слагаемых. Отметим, наконец, что зная $W_j = \frac{1}{N}$ легко найти множитель α, который оказывается равным $\alpha = 1 - \ln N$.

II

2.7. Фазовая траектория представляет собой эллиптическую спираль, навивающуюся на начало координат. Указание: воспользоваться уравнением движения линейного гармонического осциллятора с учетом малого трения.

2.8. Указание: см. задачу 2.3.

2.11. $W_i = e^{-1+\alpha+\beta x_i}$, где α и β – неопределенные множители Лагранжа, определяемые из условий $\sum_{i=1}^{N} W_i = 1$ $\sum_{L=1}^{N} x_i W_i = x_0$.

III

2.12. $p = -\sqrt{2mee_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$;

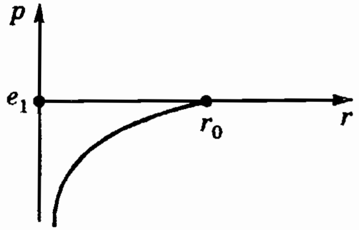


Рис. 2.5

2.13. Фазовый объем не сохраняется.

2.14. Фазовый объем сохраняется.

2.16. Площадь, заключенная внутри фазовой траектории, есть площадь эллипса, равная $\gamma(\varepsilon) = \pi\, m\, \omega a a = \frac{2\pi}{\omega}\varepsilon(\omega)$, где ε – полная энергия осциллятора. Число состояний осциллятора с энергиями, меньшими или равными ε (для больших ε) равно $\Gamma(\omega) = \frac{\gamma(\varepsilon)}{2\pi\hbar}$.

Глава 3

I

3.1. По определению $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$.

Воспользовавшись тем, что

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \quad \text{и} \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T,$$

получим

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = -T\frac{\partial}{\partial V}\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -T\frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 P}{\partial T^2}\right)_V.$$

3.2. Воспользовавшись свойствами функциональных определителей, получим

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = T\frac{\dfrac{\partial(S,V)}{\partial(T,P)}}{\dfrac{\partial(T,V)}{\partial(T,P)}} = T\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T - \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = C_P - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}$$

Из перекрестного соотношения следует, что

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P.$$

Окончательно имеем:

$$C_P - C_V = -T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}.$$

3.3. Перейдем от производных по плотности к производным по объему:

$$\rho = \frac{1}{V}; \qquad \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial V}\frac{dV}{d\rho} = -V^2\frac{\partial}{\partial V}.$$

Следовательно, задача сводится к доказательству равенства $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{C_P}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$. Воспользуемся свойством функциональных определителей:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{\partial(P,S)\,\partial(P,T)\,\partial(V,T)}{\partial(V,S)\,\partial(P,T)\,\partial(V,T)} = \frac{\partial(P,S)}{\partial(P,T)}\,\frac{\partial(V,T)}{\partial(V,S)}\,\frac{\partial(P,T)}{\partial(V,T)}.$$

Окончательно имеем:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S = \frac{C_P}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T.$$

3.4. Запишем термодинамические потенциалы, соответствующие парам (S, V) и (T, V):

$$dE(S, V) = +T\,dS - P\,dV;$$

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V; \quad P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S;$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial S} = \frac{\partial^2 E}{\partial S\, \partial V} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V;$$

$$dF(T, V) = -S\,dT - P\,dV;$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V; \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T;$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = -\frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

3.5. Скорость звука равна, по определению,

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S}.$$

Воспользуемся соотношением, следующим из задачи 3.3: $c^2 = \frac{C_P}{C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$. Уравнение состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{\mu}RT; \quad P = \frac{\rho}{\mu}RT.$$

Подставляем производную

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T = \frac{RT}{\mu}$$

откуда следует, что $c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}$, где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$.

3.6. Адиабатический коэффициент объемного расширения K равен по определению:

$$K = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S.$$

Воспользуемся свойством функциональных определителей:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = \frac{\partial (V, S)}{\partial (T, S)} = \frac{\dfrac{\partial (V, S)}{\partial (T, V)}}{\dfrac{\partial (T, S)}{\partial (T, V)}} = -\frac{C_V}{T\left(\dfrac{\partial S}{\partial V}\right)_T}.$$

Используя перекрестное соотношение (задача 3.4), получим:

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = -\frac{C_V}{VT}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V.$$

Уравнение состояния идеального газа $PV = RT$, откуда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{R}.$$

Окончательно имеем:

$$K = -\frac{C_V}{RT} = -\frac{C_V}{PV}.$$

3.7. Энтропия идеального газа зависит от термодинамических параметров:

$$S(T, V) = \nu\left[C_V \ln T + R \ln \frac{V}{\nu} + C\right].$$

Здесь ν – число молей газа, а C – константа, не зависящая от числа частиц.

В соответствии с условиями задачи

$$P V_1 = \nu_1 R T; \quad P V_2 = \nu_2 R T; \quad P_1 (V_1 + V_2) = (\nu_1 + \nu_2) R T_1.$$

Давление P_1 и температура T_1 объединенной системы при смешивании не изменятся: $P = P_1$; $T = T_1$.

Суммарная энтропия до смешивания равна:

$$S = S_1 + S_2 = (\nu_1 + \nu_2)\left[C_V \ln T\right] + \nu_1 R \ln \frac{V_1}{\nu_1} + \nu_2 R \ln \frac{V_2}{\nu_2} + C(\nu_1 + \nu_2).$$

Полная энтропия газа после смешивания:

$$S = (\nu_1 + \nu_2)\left[C_V \ln T\right] + (\nu_1 + \nu_2)\ln \frac{V_1 + V_2}{\nu_1 + \nu_2} + C(\nu_1 + \nu_2).$$

Учитывая, что при $P = \mathrm{const}$, $T = \mathrm{const}$

$$\frac{V_1}{\nu_1} = \frac{V_2}{\nu_2} = \frac{(V_1 + V_2)}{(\nu_1 + \nu_2)},$$

получаем $\Delta S = 0$.

Изменение энтропии газа в этом случае равно нулю. Физический результат очевиден – снятие перегородок между частями газа, находящимися в равновесии (при равных давлениях и температурах) не является смешиванием.

3.8. В соответствии с условиями задачи весь круговой процесс можно разбить на четыре участка. Обозначим изотермические участки индексами *1–2* и *3–4*, а адиабатические – индексами *2–3* и *4–1*.

На изотермических участках $\Delta E = 0$, $\Delta Q = \Delta A$;

на адиабатических участках $\Delta Q = 0$, $\Delta E = -\Delta A$.

На участке *1–2* тепло поглощается, на участке *4–1* выделяется.

В целом

$$\Delta E = \Delta Q_{1,2} + \Delta Q_{2,3} + \Delta Q_{3,4} + \Delta Q_{4,1} - \Delta A_{1,2} - \Delta A_{2,3} - \Delta A_{3,4} - \Delta A_{4,1} = 0;$$

$$\Delta A = \Delta Q_{1,2} + \Delta Q_{3,4} \equiv Q_1 - Q_2.$$

Вводится коэффициент полезного действия η:

$$\eta = \frac{\Delta A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Для обратимого процесса:

$$Q_{1,2} = T_1 \Delta S_1, \quad Q_2 = T_2 \Delta S_2, \quad \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0.$$

Следовательно, в цикле Карно коэффициент полезного действия зависит только от температуры:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Работа на отдельных участках может быть вычислена из соотношения

$$\Delta A = \int_{V_1}^{V_2} P(V)\, dV.$$

При изотермическом процессе

$$PV = RT,$$

так что $P(V) = \dfrac{RT}{V}$ и

$$\Delta A = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

$$\Delta A_{1,2} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad \Delta A_{3,4} = RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}.$$

При адиабатическом процессе имеет место соотношение

$$PV^\gamma = \text{const} = P_2 V_2^\gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}.$$

Используя зависимость

$$P = P_2 \frac{V_2^\gamma}{V^\gamma},$$

получим выражение для работы на участках $\Delta A_{2,3}$ и $\Delta A_{4,1}$:

$$\Delta A_{2,3} = P_2 V_2^{\gamma} \int\limits_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V^{\gamma}} = \frac{P_2 V_2}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma - 1} - 1\right];$$

$\Delta A_{4,1}$ — аналогично.

Просуммировав работу на отдельных участках, получим полную работу цикла.

3.9. Обозначим V_1 и V_2 $(V_1 < V_2)$ значение объемов на изохорических участках, а P_1 и P_2 $(P_1 < P_2)$ – на изобарических участках процесса (рис. 3.1). Обозначим на графике точку *1* $(P_1 V_1)$, точку *2* $(P_1 V_2)$, точку *3* $(P_2 V_2)$, точку *4* $(P_2 V_1)$.

Полная совершаемая за цикл работа равна площади прямоугольника *1–2–3–4*:

$$\Delta A = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1).$$

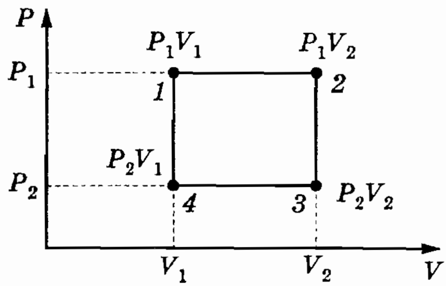


Рис. 3.1

Температура повышается на участках *1–2* и *4–1*. На этой стадии тепло поглощается. На остальных стадиях оно выделяется и тратится бесполезно. Обозначим затраты тепла на стадии нагревания через Q:

$$Q = C_V(T_2 - T_1) + C_P(T_3 - T_2).$$

Учитывая, что $\frac{C_V}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}$ и $\frac{C_P}{R} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, получим $\Delta Q = \frac{1}{\gamma - 1}\left[(1 - \gamma) P_2 V_1 + \gamma P_1 V_2 - P_1 V_1\right]$. Коэффициент полезного действия процесса вычисляется из равенства

$$\eta = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{Q}.$$

3.14. $$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - P.$$

Используем перекрестное соотношение

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

Для идеального газа

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V}.$$

Следовательно

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \frac{RT}{V} - P = 0.$$

3.15. $$P V^n = P_1 V_1^n;$$

$$\Delta A = \frac{P_1 V_1}{1-n}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-n} - 1\right] = \frac{R(T_2 - T_1)}{1-n};$$

$$T V^{n-1} = \text{const}; \qquad \Delta Q = \frac{C_P - n C_V}{1-n}\Delta T.$$

3.16. $$P(V,\ T) = A(V)\,T + B(V),$$

где $A(V)$ и $B(V)$ — произвольные функции от объема.

3.17. $$\eta = \frac{R(T_1 - T_2)\ln V_2/V_1}{R T_1 \ln V_2/V_1 + C_V(T_1 - T_2)}.$$

3.18. $$\Delta S = R\ln V_2/V_1 = R\ln P_1/P_2.$$

Глава 4

I

4.1. Энергия квантового одномерного осциллятора с частотой ω равна $\varepsilon_n = \hbar\omega(n+1/2)$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $\hbar$ – постоянная Планка. Имея это в виду и используя формулу (4.1), получим распределение Гиббса для квантового гармонического осциллятора $W_n = A\, e^{-\frac{\hbar\omega(n+1/2)}{T}}$. Величина W_n представляет собой вероятность того, что осциллятор находится в n-м квантовом состоянии. Нормировочная постоянная A находится из условия нормировки, которое для рассматриваемого случая приобретает вид $A\, e^{-\frac{\hbar\omega}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega n}{T}} = 1$. Сумма $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega n}{T}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right)^n$ представляет собой геометрическую прогрессию с бесконечным числом слагаемых. Поскольку частота $\omega > 0$ и температура $T > 0$, величина $e^{\frac{-\hbar\omega}{T}} < 1$, и поэтому сумма по n является конечной величиной, равной $\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right)^n = \dfrac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}}$. Подставляя полученное значение суммы по n в условие нормировки, находим $A = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right) e^{\frac{\hbar\omega}{2T}}$, так что нормированное распределение Гиббса в рассматриваемом случае приобретает вид $W_n = \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right) e^{-\frac{\hbar\omega n}{T}}$.

4.2. Рассмотрим идеальный одноатомный газ, объем которого V, температура T, число частиц в газе N, и найдем для него распределение по энергиям газа E. Для этого обратимся к распределению Гиббса для такого газа (см. (4.2)):

$$d\,W(p_{1x} p_{1y} p_{1z} \cdots p_{Nz}) = A\, e^{-\frac{E(p_{1x}, p_{1y} \cdots p_{Nz})}{T}} \frac{dp_{1x}\, dp_{1y}\, dp_{1z} \ldots d\,p_{Nz}\, d\,x \ldots d\,z_N}{(2\pi\hbar)\, 3N},$$

где $E = \dfrac{p_{1x}^2 + p_{1y}^2 + \ldots + p_{Nz}^2}{2m}$ – кинетическая энергия частиц идеального газа (m – масса частиц газа, $\vec{p}$ – импульс частицы газа). Переход от распределения Гиббса к распределению по энергиям идеального газа как целого осуществляется путем интегрирования распределения Гиббса по объему фазового пространства газа, заключенному между поверхностью с постоянной энергией E и поверхностью с постоянной энергией $E+dE$. Поскольку энергия E идеального газа зависит лишь от импульсов, но не зависит от координат частиц идеального газа, вычисление искомого фазового объема упрощается. Вычисление этого объема сводится к вычислению объема между двумя поверхностями с постоянными энергиями в пространстве импульсов идеального газа, в то время как координаты частиц идеального газа остаются произвольными, и по ним обычно производится интегрирование по объему V. Имея в виду, что число измерений в пространстве импульсов идеального газа равно $3N$ и производя соответствующие выкладки для многомерного пространства (см. задачу 1.15) найдем, что объем фазового пространства, заключенный между E и $E+dE$ идеального газа, равен $d\gamma = BE^{\frac{3}{2}N-1}V^N dE$, где $B=\dfrac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}N}}{\Gamma(3/2N)}$ ($\Gamma(x)$ – гамма-функция). Отсюда распределение по энергиям одноатомного идеального газа как целого принимает вид $dW(E) = A_0 e^{-\frac{E}{T}}E^{\frac{3N}{2}-1}V^N dE$, где $A_0 = AB$ – новая нормировочная постоянная. $dW(E)$ есть вероятность того, что энергия идеального газа лежит в интервале E, $E+dE$.

4.3. Микроканоническое распределение для замкнутой системы выражается формулой (4.8). Выделяя в замкнутой системе малую часть – подсистему, в которой число частиц все еще очень велико, и называя остальную часть замкнутой системы термостатом, запишем, что энергия замкнутой системы $E(p, q) = E_т(p_т, q_т) + E_п(p_п, q_п) + E_{вз}$, где $E_т(p_т, q_т)$ – энергия термостата, $E_п(p_п, q_п)$ – энергия подсистемы, $E_{вз}$ – энергия взаимодействия термостата и подсистемы. Разбиение замкнутой системы на подсистему и термостат позволяет записать, что $E_т \gg E_п \gg E_{вз}$, так что приближенно $E \approx E_т(p_т, q_т) + E_п(p_п, q_п)$. Далее, произведение дифференциалов всех обобщенных импульсов замкнутой системы и всех обобщенных координат можно записать в виде $dp\,dq = (dp_т\,dq_т)(dp_п\,dq_п)$. В результате микроканоническое распределение приобретает следующий вид: $dW = A\delta\left(E_т(p_т, q_т) + E_п(p_п, q_п) - E_0\right) \times dp_т\,dq_т\,dp_п\,dq_п$ (множитель $\frac{1}{(2\pi\hbar)^f}$ введен в постоянную A). Проинтегрируем микроканоническое распределение по обобщенным импульсам $p_т$ и обобщенным координатам $q_т$ термостата, заключенным между поверхностями постоянных энергий $E_т$ и $E_т + dE_т$ в фазовом пространстве термостата. Объем фазового пространства между указанными выше поверхностями обозначим как $d\gamma(E_т) \equiv \frac{d\gamma(E_т)}{dE_т}dE_т$. В этом случае микроканоническое распределение приобретает вид $dW = A\delta(E_т + E_п - E_0) \times \frac{d\gamma(E_т)}{dE_т}dE_т\,dp_п\,dq_п$. Интегрируя это уравнение по $dE_т$, будем иметь $dW(p_п q_п) = A\left(\frac{d\gamma(E_т)}{dE_т}\right)_{E_т = E_0 - E_п} dp_п\,dq_п$. Если термостат есть одноатомный идеальный газ, то согласно задаче 4.2 $\frac{d\gamma(E_т)}{dE_т} = CV^{N_т}E_т^{\frac{3}{2}N_т - 1}$, где V — объем идеального газа, $N_т$ — число частиц газа. Имея это в виду получим: $dW(p_п, q_п) = DV^{N_т} \times \left(E_0 - E_п(p_п, q_п)\right)^{\frac{3}{2}N_т - 1} dp_п\,dq_п \equiv DV^{N_т}E_0^{\frac{3}{2}N_т - 1}\left(1 - \frac{E_п(p_п q_п)}{E_0}\right)^{\frac{3}{2}N_т - 1} dp_п\,dq_п$.

Воспользуемся тем, что $E_0 = E_т + E_п \approx E_т$, так как $E_т \gg E_п$. Поскольку термостат — одноатомный идеальный газ, находящийся в равновесии, $E_т \approx \bar{E}_т = \frac{3}{2}N_т T$. В этом случае обозначая $DV^{N_т}E_0^{\frac{3}{2}N_т - 1} \equiv D_0$, получим $dW(p_п q_п) = D_0\left(1 - \frac{E_п(p_п q_п)}{\frac{3}{2}N_т T}\right)^{\frac{3}{2}N_т - 1} dp_п\,dq_п$.

Но по условию задачи $N_т \gg 1$. Это позволяет полученное выражение переписать так:

$$dW_п(p_п q_п) = D_0\left(1 - \frac{E_п}{T}\frac{1}{\frac{3}{2}N_т}\right)^{\frac{3}{2}N_т} dp_п\, dq_п \approx D_0 e^{-\frac{E_п(p_п q_п)}{T}} dp_п\, dq_п,$$

поскольку известен предел $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1 - \frac{x}{N}\right)^N = e^{-x}$. Записывая $D_0 \equiv A_0 \frac{1}{(2\pi\hbar)^{f_п}}$, где $f_п$ — число степеней свободы подсистемы, окончательно будем иметь: $dW(p_п q_п) = A_0 e^{-\frac{E_п(p_п, q_п)}{T}} \frac{dp_п\, dq_п}{(2\pi\hbar)^{f_п}}$ — распределение Гиббса в квазиклассическом приближении.

4.4. а) Статистический интеграл Z столба одноатомного идеального газа в поле тяжести имеет вид $Z = \frac{1}{N!}\int e^{-\frac{\Sigma\frac{p_i^2}{2m} + \Sigma mgz_i}{T}} \times$ $\times \frac{\prod\limits_{i=1}^{N}(dp_x dp_y dp_z dx\, dy\, dz)_i}{(2\pi\hbar)^{3N}}$, где N — число частиц в одноатомном идеальном газе; m — масса частицы газа; g — ускорение силы тяжести; T — температура газа; p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} — декартовы компоненты импульса; x_i, y_i, z_i — декартовы компоненты радиуса-вектора i-й частицы. Интеграл, определяющий Z, является многократным (имеет $6N$ измерений). Благодаря идеальности газа интегрирование по координатам и импульсам проводится отдельно для каждой частицы газа. Поскольку далее для каждой частицы газа пределы интегрирования по компонентам радиуса-вектора и компонентам импульса оказываются одними и теми же, вычисление статистического интеграла Z сводится в конце концов к интегралу по координатам импульса отдельной частицы газа. Принимая во внимание сказанное выше и используя формулу Стирлинга для $N! \approx \left(\frac{N}{e}\right)^N$ (в газе $N \gg 1$), получим:

$$Z=\left(\frac{e}{N}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\iiint e^{-\frac{\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}+mgz}{T}}\frac{dp_x\,dp_y\,dp_z\,dx\,dy\,dz}{(2\pi\hbar)^3}\right)^N,$$

Интегрирование по компонентам импульса проводится в бесконечных пределах, интегрирование по координатам проводится по объему столба газа. Каждый из интегралов по компонентам импульса представляет собой интеграл Пуассона. Например, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2mT}}dp_x=\sqrt{2\pi mT}$. Интегралы по координатам x, y, z вычисляются элементарно. В результате будем иметь

$$Z=\left\{\frac{e}{N}(2\pi mT)^{3/2}\sigma\,\frac{T\left(1-e^{-\frac{mgH}{T}}\right)}{mg}\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\right\}^N,$$

где σ — площадь поперечного сечения столба газа, H — высота столба.

б) Свободная энергия F тела выражается через статистический интеграл Z следующим образом: $F=-T\ln Z$. В случае столба идеального газа будем иметь:

$$F=-NT\ln\left\{\frac{e}{N}(2\pi mT)^{3/2}\sigma\,\frac{T\left(1-e^{-\frac{mgH}{T}}\right)}{mg}\,\frac{1}{(2\pi\hbar)^3}\right\}.$$

Далее, энтропия тела равна $S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$. В свою очередь средняя энергия тела $\bar{E}=F+TS$, и наконец, теплоемкость $C_V=\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)_V$.

Проводя элементарные вычисления, будем иметь для столба идеального газа в поле тяжести

$$\bar{E}=\frac{5}{2}NT-\frac{NmgH}{e^{-\frac{mgH}{T}}-1};$$

$$C_V=\frac{5}{2}N-N\left(\frac{mgH}{T}\right)^2\frac{e^{\frac{mgH}{T}}}{\left(e^{\frac{mgH}{T}}-1\right)^2}.$$

Для невысокого столба газа: $\frac{mgH}{T}\ll 1,\ \bar{E}\approx\frac{3}{2}NT,\ C_V\approx\frac{3}{2}N.$

Для высокого столба газа: $\frac{mgH}{T}\gg 1,\ \bar{E}\approx\frac{5}{2}NT,\ C_V\approx\frac{5}{2}N.$

4.5. Проинтегрируем уравнение (4.8) по импульсам и координатам замкнутой системы, заключенными между двумя поверхностями с постоянными энергиями E и $E+dE$. В результате будем иметь: $dW=A\delta\left(E-E_0\right)d\gamma(E)\frac{1}{(2\pi\hbar)^f}$, где $d\gamma(E)$ – объем фазового пространства рассматриваемой замкнутой системы, заключенной между поверхностями с энергиями E и $E+dE$. Если в качестве замкнутой системы используется одноатомный идеальный газ, то согласно задаче 4.2 $d\gamma(E)=BV^NE^{\frac{3}{2}N-1}dE$, где V – объем газа, N – число частиц в газе. Интегрируя по E приведенное выше выражение dW, будем иметь $1=ABV^NE_0^{\frac{3}{2}N-1}\frac{1}{(2\pi\hbar)^f}$, откуда и находится величина A.

4.6. Статистический интеграл для идеального газа, содержащего N частиц в объеме V может быть записан в виде (см. задачу 4.4)

$$Z=\left(\frac{e}{N}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\iiint\limits_{V}e^{-\frac{\varepsilon(p_x,p_y,r_z)}{T}}\frac{dp_x\,dp_y\,dp_z\,dx\,dy\,dz}{(2\pi\hbar)^3}\right)^N.$$

Интегрирование по координатам дает объем сосуда V. Интегрирование по компонентам импульса выполняется путем перехода от декартовых переменных к сферическим переменным:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon(p_x, p_y, r_z)}{T}}\, d p_x dp_y dp_z = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-\frac{\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}}{T}} p^2\, dp \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\,,$$

где $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, а θ и φ – углы, определяющие направление импульса $\vec{p}$ частицы. Интегрирование по углам выполняется элементарно и дает 4π. Интегрирование по величине импульса p выполняется с помощью замены $p = mc\,\mathrm{sh}\,t$, где $\mathrm{sh}\,t$ – гиперболический синус, t – новая переменная. В этом случае статистический интеграл приобретает вид

$$Z = \left(\frac{e}{N} 4\pi V \frac{(mc)^3}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{mc^2 \mathrm{ch}\, t}{T}} (\mathrm{sh}\, t)^2 \,\mathrm{ch}\, t\, dt\right)^N,$$

где $\mathrm{ch}\, t$ – гиперболический косинус. Дальнейшее интегрирование приводит к следующему результату:

$$Z = \left\{\frac{e}{N} 4\pi V \left(\frac{mc}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{T}{mc^2} \left[K_0\left(\frac{mc^2}{T}\right) + \frac{2T}{mc^2} K_1\left(\frac{mc^2}{T}\right)\right]\right\}^N,$$

где $K_0\left(\frac{mc^2}{T}\right)$ и $K_1\left(\frac{mc^2}{T}\right)$ – функция Ханкеля мнимого аргумента. Свободная энергия такого газа равна

$$F = -T \ln Z = -NT \ln\left\{\frac{e}{N} 4\pi V \left(\frac{mc}{2\pi\hbar}\right)^3 \left(\frac{T}{mc^2}\right)\left[K_0\left(\frac{mc^2}{T}\right) + \frac{2T}{mc^2} K_1\left(\frac{mc^2}{T}\right)\right]\right\}.$$

Давление P такого газа определяется формулой $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{NT}{V}$.

Энтропия $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ и средняя энергия $\bar{E} = F + TS$ равна

$$\bar{E}=NT\left[1+2\,\frac{K_0\left(\frac{mc^2}{T}\right)+\left(\frac{mc^2}{T}+2\,\frac{T}{mc^2}\right)K_1\left(\frac{mc^2}{T}\right)}{K_0\left(\frac{mc^2}{T}\right)+\frac{2T}{mc^2}K_1\left(\frac{mc^2}{T}\right)}\right].$$

Для $T \ll mc^2$, используя ассимптотику функций Ханкеля K_0 и K_1, будем иметь $\bar{E}=Nmc^2+\frac{3}{2}NT$.

4.7. а) Поскольку энергия любого отдельного магнитного момента электрона во внешнем магнитном поле может принимать лишь два значения: $\varepsilon^{(1)}=0$ и $\varepsilon^{(2)}=\varepsilon$, то энергия подсистемы, состоящая из N невзаимодействующих между собой магнитных моментов во внешнем магнитном поле оказывается равной $E_{\alpha,..\beta,..\omega}=\varepsilon_1^{(\alpha)}+\ldots+\varepsilon_i^{(\beta)}+\ldots+\varepsilon_N^{(\omega)}$, где $\alpha,..\beta,..\omega$ принимают два значения 1 и 2. При этом для любого номера i $\varepsilon_i^{(\beta)}=\begin{cases}\varepsilon & \beta=2\\ 0 & \beta=1\end{cases}$. Для такой подсистемы распределение Гиббса имеет вид $W_{\alpha..\beta..\omega}=A\,e^{-\frac{\varepsilon_1^{(\alpha)}+\ldots+\varepsilon_i^{(\beta)}+\ldots+\varepsilon_N^{(\omega)}}{T}}$, где A — нормировочная постоянная, определяемая условиями нормировки $\sum\limits_{\alpha..\beta..\omega}W_{\alpha..\beta..\omega}=1$, откуда

$$A=\frac{1}{\sum\limits_{\alpha..\beta..\omega}e^{-\frac{\varepsilon_1^{(\alpha)}+\ldots+\varepsilon_i^{(\beta)}+\ldots+\varepsilon_N^{(\omega)}}{T}}}.$$

б) Статистическая сумма рассматриваемой подсистемы есть по определению, величина

$$Z=\sum_{\alpha..\beta..\omega}e^{-\frac{\varepsilon_1^{(\alpha)}+\ldots+\varepsilon_i^{(\beta)}+\ldots+\varepsilon_N^{(\omega)}}{T}}=\sum_{\alpha=1}^{2}e^{-\frac{\varepsilon_1^{(\alpha)}}{T}}\ldots\sum_{\beta=1}^{2}e^{-\frac{\varepsilon_i^{(\beta)}}{T}}\ldots\sum_{\omega=1}^{2}e^{-\varepsilon_N^{(\omega)}}=\left(1+e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right)^N,$$

так как $\sum\limits_{\alpha=1}^{2}e^{-\frac{\varepsilon_1^{(\alpha)}}{T}}=\sum\limits_{\beta=1}^{2}e^{-\frac{\varepsilon_i^{(\beta)}}{T}}=\sum\limits_{\omega=1}^{2}e^{-\frac{\varepsilon_N^{(\omega)}}{T}}=\left(1+e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right)$.

в) Свободная энергия рассматриваемой подсистемы равна $F = -T\ln Z = -NT\ln\left(1+e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right)$. Соответственно, энтропия имеет вид $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = N\ln\left(1+e^{-\frac{\varepsilon}{T}}\right) + \frac{N\varepsilon}{T}\frac{1}{1+e^{\varepsilon/T}}$. Наконец, средняя энергия равна $\bar{E} = F + TS = \frac{N\varepsilon}{1+e^{\varepsilon/T}}$.

г) Принимая во внимание результат, полученный в пункте в), после несложных преобразований получим энтропию рассматриваемой подсистемы S как функцию $\bar{E}$: $S(\bar{E}) = \frac{\bar{E}}{\varepsilon}\ln\frac{N\varepsilon - \bar{E}}{\bar{E}} + N\ln\frac{N\varepsilon}{N\varepsilon - \bar{E}}$. Минимальное значение $\bar{E} = 0$, в то время как максимальное значение $\bar{E} = N\varepsilon$. при этом $S(0) = 0$, $S(N\varepsilon) = 0$ и $S\left(\frac{N\varepsilon}{2}\right) = N\ln 2 = \max$. Графически зависимость S от $\bar{E}$ имеет вид (рис. 4.1):

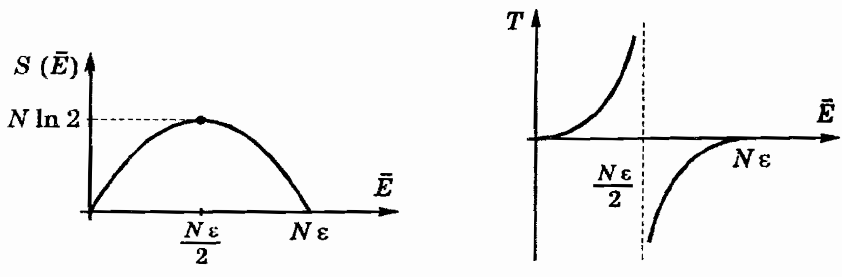


Рис. 4.1

Из графика зависимости $S(\bar{E})$ следует, что для средней энергии $\bar{E}$ в интервале $0 \le \bar{E} \le \frac{N\varepsilon}{2}$ производная $\left(\frac{\partial S}{\partial \bar{E}}\right) > 0$, в то время как для $\bar{E}$ в интервале $\frac{N\varepsilon}{2} \le \bar{E} \le N\varepsilon$ производная $\left(\frac{\partial S}{\partial \bar{E}}\right) < 0$. Как известно, температура подсистемы определяется как $\frac{1}{T}=\frac{\partial S}{\partial \bar{E}}$. Таким образом, температура рассматриваемой подсистемы для $0 \le \bar{E} \le \frac{N\varepsilon}{2}$ положительна, в то время как для $\frac{N\varepsilon}{2} \le \bar{E} \le N\varepsilon$ она отрицательна. Когда $\bar{E} < \frac{N\varepsilon}{2}$ и $\bar{E} \to \frac{N\varepsilon}{2}$, температура $T \to +\infty$, в то время как для $\bar{E} > \frac{N\varepsilon}{2}$ и для $\bar{E} \to \frac{N\varepsilon}{2}$ температура $T \to -\infty$. Таким образом, когда $\bar{E}$ "проходит" значение $\frac{N\varepsilon}{2}$ температура T испытывает скачок от $+\infty$ до $-\infty$ (см. рис. 4.1). Отметим, что для рассматриваемой подсистемы $T=\frac{\varepsilon}{\ln\left(\frac{N\varepsilon-\bar{E}}{\bar{E}}\right)}$.

д) Теплоемкость рассматриваемой подсистемы $C_V=\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T}\right)=$ $=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{N\varepsilon}{1+e^{\varepsilon/T}}\right)=\frac{N\varepsilon^2}{T^2}\frac{e^{\varepsilon/T}}{\left(1+e^{\varepsilon/T}\right)^2}$. Для $T\to 0$ $C_V \sim \frac{N\varepsilon^2}{T^2}e^{-\varepsilon/T}\to 0$. Соответственно для $T\to\infty$ $C_V \sim \frac{N\varepsilon^2}{T^2}\to 0$.

4.8. Для решения поставленной задачи воспользуемся распределением по энергиям одноатомного газа как целого, полученного в задаче 4.2: $dW(E)=A\,e^{-E/T}E^{3/2N-1}V^N dE$. Тогда, по определению, среднее значение $\overline{E^n}$ будет записываться следующим образом: $\overline{E^n}=\int E^n\,dW(E)$. Определяя постоянную A из условия нормировки $\int dW=1$, будем иметь $\overline{E^n}=\frac{\int_0^\infty E^n e^{-\frac{E}{T}}E^{\frac{3}{2}N-1}dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{E}{T}}E^{\frac{3}{2}N-1}dE}$. Делая замену переменной $t=E/T$, выразим числитель и знаменатель дроби через гамма-функцию $\Gamma(x)$:

$$\overline{E^n} = T^n \frac{\int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{3}{2}N-1} dt}{\int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{3}{2}N-1} dt} = T^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}N\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}N\right)}.$$

В частности, если $n=1$, то $\overline{E} = T\dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{2}N+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}N\right)} = T\dfrac{\frac{3}{2}N\Gamma\left(\frac{3}{2}N\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}N\right)} = \dfrac{3}{2}NT,$

где использовано свойство гамма-функции $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Если $n=2$, то $\overline{E^2} = T^2\dfrac{\Gamma\left(2+\frac{3}{2}N\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}N\right)} = \dfrac{3}{2}N\left(1+\dfrac{3}{2}N\right)T^2$ и т.д.

II

4.9. $\overline{\varepsilon} = \hbar\omega\left(\dfrac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1}+\dfrac{1}{2}\right)$; $\quad C_V = \left(\dfrac{\hbar\omega}{T}\right)^2 \dfrac{e^{\frac{\hbar\omega}{T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega}{T}}-1\right)^2}.$

Для $\dfrac{\hbar\omega}{T} \ll 1$ $\quad C_V = 1$, для $\dfrac{\hbar\omega}{T} \gg 1$ $\quad C_V = \left(\dfrac{\hbar\omega}{T}\right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}.$

4.10. Указание: см. задачу 4.2.

4.11. $\quad const = \dfrac{(\hbar\omega)^N (N-1)!}{E_0^{N-1}}.$

4.12. $\quad Z_{газ} = \dfrac{1}{N!}\left[Z_м\right]^N$, где $\quad Z_м = \int e^{-\frac{\varepsilon_м}{T}} \dfrac{dp_м\, dq_м}{(2\pi\hbar)^{f_м}}$. $\quad \varepsilon_м$ — энергия молекулы, $p_м$ и $q_м$ — обобщенные импульсы и координаты молекулы, $f_м$ — число степеней свободы молекулы. Откуда

$F_{газ} = -T\ln Z_{газ}$, $\quad S_{газ} = -\left(\dfrac{\partial F_{газ}}{\partial T}\right)_V$; $\quad \overline{E}_{газ} = F_{газ} + TS_{газ}$; $\quad P_{газ} = -\left(\dfrac{\partial F_{газ}}{\partial V}\right)_T.$

4.13. Указание: см. задачу 4.5.

4.14. Указание: перейти от канонического распределения к распределению по энергиям.

4.18, а. Статистическая сумма рассматриваемого осциллятора имеет вид: $Z = \dfrac{e^{-\frac{3}{2}\frac{\hbar\omega}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{T}}\right)^3}$. Откуда $F = -T\ln Z$; $S = -\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V$; $\bar{E} = F + TS$.

III

4.19. а) Распределение по энергиям одноатомного идеального газа как целого имеет вид $dW(E) = C e^{-\frac{E}{T}} E^{\frac{3}{2}N-1} dE$.

б) $E_{max} = \left(\dfrac{3}{2}N - 1\right)T$. в) $\bar{E} = \dfrac{3}{2}NT$.

4.20. $F_{газ} = -NT\ln\left[\dfrac{e}{N}\dfrac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3}\left(\dfrac{T}{\alpha}\right)^{\frac{3}{l}}\dfrac{1}{l}\Gamma\left(\dfrac{3}{l}\right)\right]$, где $\Gamma(x)$ – гамма-функция. $\bar{E}_{газ} = F_{газ} + TS_{газ} = \dfrac{3}{l}NT$; $S_{газ} = -\left(\dfrac{\partial F_{газ}}{\partial T}\right)_V$; $C_V^{газ} = \left(\dfrac{\partial \bar{E}_{газ}}{\partial T}\right)_V = \dfrac{3}{l}N$; $P_{газ} = -\left(\dfrac{\partial F_{газ}}{\partial V}\right)_T = \dfrac{NT}{V}$.

4.21. Число состояний $d\Gamma(\bar{E}) = e^{S(\bar{E})}\dfrac{dE}{\Delta E(\bar{E})}$, где $S(\bar{E})$ – энтропия подсистемы; $\Delta E(\bar{E})$ – разброс энергий подсистемы вблизи $\bar{E}$. Отметим, что по сравнению с $e^{S(E)}$ зависимость $\Delta E(\bar{E})$ от $\bar{E}$ совершенно несущественна.

4.22. а) $d\Gamma(\bar{E}) = B(\bar{E})^{\frac{3}{2}N} dE$, где B – величина, не зависящая от $\bar{E}$.

б) $d\Gamma(\bar{E}) = C(\bar{E})^N dE$, где C – величина, не зависящая от $\bar{E}$.

в) $d\Gamma(\bar{E}) = D\exp\left\{a^{\frac{1}{n}}\left(\frac{n}{n-1}\right)(\bar{E})^{\frac{n-1}{n}}\right\}$, где D – величина, не зависящая от $\bar{E}$.

4.23. а) $dW(\theta) = \dfrac{e^{\frac{d_0 \varepsilon_0 \cos\theta}{T}} \sin\theta\, d\theta}{\left(\frac{2T}{d_0\varepsilon_0}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{d_0\varepsilon_0}{T}\right)}$, где θ – угол между $\vec{\varepsilon}_0$ и $\vec{d}_0$.

б) $\Delta E = -\dfrac{N}{3T}(d_0\varepsilon_0)^2$ – добавок к внутренней энергии газа за счет взаимодействия диполей $\vec{d}_0$ с полем $\vec{\varepsilon}_0$.

в) Добавочная теплоемкость $C_\varepsilon = \dfrac{N}{3T^2}(d_0\varepsilon_0)^2$.

г) Диэлектрическая проницаемость газа $\varepsilon = 1 + 4\pi\dfrac{N}{V}\dfrac{d_0^2}{3T}$.

4.24. Добавочная теплоемкость, обусловленная ангармоничностью колебаний молекул идеального газа, имеет вид $C_V^{\text{доб}} = N\left[\dfrac{15}{2}\dfrac{\alpha^2}{\varkappa^3} - \dfrac{3\beta}{\varkappa^2}\right]T$.

4.25. а) Фазовый объем $\Delta\gamma(\bar{E}) = \text{const}\, V^N(\bar{E})^{\frac{3}{2}N-1}\Delta E(\bar{E})$, где величина $\Delta E(\bar{E})$ указывает разброс энергий газа вблизи $\bar{E}$.

б) $S = \ln\dfrac{\Delta\gamma(\bar{E})}{(2\pi\hbar)^{3N}} = \ln\dfrac{\text{const}\, V^N(\bar{E})^{\frac{3}{2}N-1}\Delta E(\bar{E})}{(2\pi\hbar)^{3N}} \cong S_0 + N\ln V + \left(\dfrac{3}{2}N-1\right)\ln\bar{E}$,

где S_0 – постоянная величина, в которую включена и $\Delta E(\bar{E})$ в силу ее медленной зависимости от $\bar{E}$.

в) $S(T,\ V) = S_0' + N\ln V + \dfrac{3}{2}N\ln T$, где $S_0' = S_0 + \dfrac{3}{2}N\ln\dfrac{3}{2}N$ и учтено, что $N \gg 1$.

Глава 5

I

5.1. Энергия отдельного атома в идеальном газе без внешнего поля есть кинетическая энергия $\varepsilon = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$, где p_x, p_y, p_z – декартовы компоненты вектора импульса атома, m – масса атома. Число степеней свободы атома, рассматриваемого как материальная точка, равно трем. Для отдельного атома величина $\dfrac{dp\,dq}{(2\pi\hbar)^r} = \dfrac{dp_x dp_y dp_z dx\,dy\,dz}{(2\pi\hbar)^3}$. Учитывая все это, запишем распределение Больцмана для одноатомного идеального газа (без внешнего поля) в виде $d\bar{N} = e^{\frac{\mu}{T}} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2T}} \dfrac{dp_x dp_y dp_z dx\,dy\,dz}{(2\pi\hbar)^3}$. Удобно выразить нормировочный множитель $e^{\frac{\mu}{T}}$ через число частиц газа N_0, объем газа V_0 и его температуру T. Для этого проинтегрируем полученное выше распределение Больцмана по компонентам импульса атома и по его координатам. Тогда будем иметь $N_0 = \int d\bar{N} = e^{\frac{\mu}{T}} \dfrac{(2\pi m T)^{3/2} V_0}{(2\pi\hbar)^3}$, откуда $e^{\frac{\mu}{T}} = \left(\dfrac{N_0}{V_0}\right) \dfrac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi m T)^{3/2}}$. Отметим, что интегрирование, например, по p_x приводит к интегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2mT}} dp_x = (2\pi T)^{1/2}$ (интеграл Пуассона; см. гл. 1). С учетом полученного результата распределение Больцмана приобретает вид $d\bar{N} = \left(\dfrac{N_0}{V_0}\right) \dfrac{1}{(2\pi m T)^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2T}} dp_x dp_y dp_z dV$. Обозначая $\dfrac{d\bar{N}}{dV} = dn(p_x, p_y, p_z)$, будем иметь:

$$dn(p_x, p_y, p_z) = \left(\frac{N_0}{V_0}\right) \frac{1}{(2\pi m T)^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mT}} dp_x dp_y dp_z.$$

Это последнее выражение носит название распределение Максвелла по компонентам импульса в декартовой системе координат. Величина $dn(p_x, p_y, p_z)$ представляет собой среднее число атомов в единице объема, декартовы компоненты импульса которых p_x, p_y, p_z лежат в интервалах p_x, p_x+dp_x; p_y, p_y+dp_y; p_z, p_z+dp_z. Наконец, вводя обозначение $dW(p_x, p_y, p_z) = \dfrac{dn(p_x, p_y, p_z)}{(N_0/V_0)}$ запишем распределение Максвелла в следующей форме: $dW(p_x, p_y, p_z) = \dfrac{1}{(2\pi m T)^{3/2}} e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mT}} dp_x d_{p_y} dp_z$. $dW(p_z, p_y, p_z)$ есть распределение вероятностей декартовых компонент импульса, т. е. представляет собой вероятность того, что декартовы компоненты импульса атома газа лежат в интервалах p_x, p_x+dp_x; p_y, p_y+dp_y; p_z, p_z+dp_z. Распределение $dW(p_x, p_y, p_z)$ нормировано на единицу $\int dW = 1$. Отметим, что если перейти от декартовых компонентов импульса p_x, p_y, p_z к компонентам скорости $\upsilon_x = \dfrac{p_x}{m}$; $\upsilon_y = \dfrac{p_y}{m}$; $\upsilon_z = \dfrac{p_z}{m}$, получим распределение Максвелла по компонентам υ_x, υ_y, υ_z.

$$dn(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)}{2T}} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z.$$

Наконец запишем распределение Максвелла нормированное на единицу:

$$dW(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)}{2T}} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z.$$

5.2. Если в декартовой системе координат (рис. 5.1) в пространстве скоростей вектор скорости $\vec{\upsilon}$ частицы имел компоненты υ_x, υ_y, υ_z, то в цилиндрической системе координат

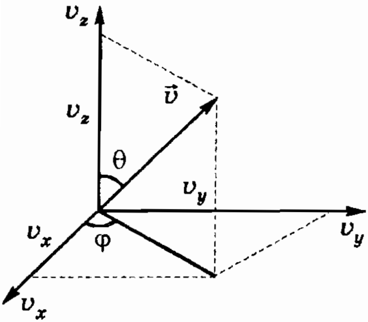


Рис. 5.1

в пространстве скоростей вектор скорости $\vec{\upsilon}$ характеризуется величинами $\upsilon_\perp$, φ и υ_z, где $\upsilon_\perp$ – проекция вектора $\vec{\upsilon}$ на плоскость $\upsilon_x \upsilon_y$; φ – угол между υ_x и $\upsilon_\perp$; υ_z – проекция $\vec{\upsilon}$ на ось υ_z. Из рисунка 5.1 следует, что $\upsilon_x = \upsilon_\perp \cos\varphi$ и $\upsilon_y = \upsilon_\perp \sin\varphi$, так что $\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2 = (\upsilon_\perp \cos\varphi)^2 + (\upsilon_\perp \sin\varphi)^2 + \upsilon_z = \upsilon_\perp^2 + \upsilon_z^2$.

Выразим далее элементарный объем $d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$, записанный с помощью декартовых компонент υ_x, υ_y, υ_z, через компоненты вектора $\vec{\upsilon}$ в цилиндрической системе координат. Используя якобиан перехода от декартовой системы координат к цилиндрической системе координат, будем иметь:

$$d\upsilon_x d\upsilon_y \upsilon_z =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial \upsilon_\perp} & \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial \upsilon_\perp} & \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\upsilon_\perp d\varphi d\upsilon_z = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\upsilon_\perp \sin\varphi \\ \sin\varphi & \upsilon_\perp \cos\varphi \end{vmatrix} d\upsilon_\perp d\varphi d\upsilon_z = \upsilon_\perp d\upsilon_\perp d\varphi d\upsilon_z.$$

Так что для цилиндрической системы координат в пространстве скоростей распределение Максвелла по скоростям приобретает следующий вид:

$$dn_{\vec{\upsilon}} = \left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_\perp^2 + \upsilon_z^2\right)}{2T}} \upsilon_\perp d\upsilon_\perp d\varphi d\upsilon_z$$

или в другой форме:

$$dW_{\vec{\upsilon}} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_\perp^2 + \upsilon_z^2\right)}{2T}} \upsilon_\perp d\upsilon_\perp d\varphi d\upsilon_z.$$

В свою очередь в сферической системе координат в пространстве скоростей величина и направление вектора $\vec{v}$ определяются модулем вектора скорости $v = |\vec{v}|$ и двумя углами: φ и θ — углом между вектором $\vec{v}$ и осью v_z (см. рис. 5.1). При этом $v_x = v\sin\theta\cos\varphi$; $v_y = v\sin\theta\sin\varphi$; $v_z = v\cos\theta$ так что $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = (v\sin\theta\cos\varphi)^2 + (v\sin\theta\cos\varphi)^2 + (v\cos\theta)^2 = v^2$. Далее, подобно рассмотренному выше случаю перехода от декартовой системы к цилиндрической, перейдем с помощью якобиана перехода от декартовой к сферической системе. В результате будем иметь $dv_x dv_y dv_z = v^2\sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi$, так что распределение Максвелла для сферической системы координат в пространстве скоростей будет иметь вид:

$$dn_{\vec{v}} = \left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

или

$$dW_{\vec{v}} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2\sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi.$$

5.3. а) По определению, среднее значение компоненты скорости $\overline{v_x}$ атома идеального газа равно $\overline{v_x} = \int v_x\, dW(v_x v_y v_z)$, где $dW(v_x v_y v_z)$ – распределение Максвелла по компонентам скорости в декартовой системе координат. Используя явный вид распределения Максвелла, см. (5.1), будем иметь $\overline{v_x} = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2T}} \times$ $\times dv_x dv_y dv_z$. Интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2T}} dv_y = \left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{1/2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2T}} dv_z$ есть интегралы Пуассона. Интеграл же $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_x e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x = 0$, как интеграл от нечетной функции взятой в симметричных пределах. Отсюда $\overline{v_x} = 0$.

б) Среднее значение $\vec{v}$ удобно вычислять, используя распределение Максвелла в сферической системе координат (см. (5.2)):

$$\bar{v} = \int v\,dW = \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}}\, v^2 \sin\theta\, dv\,\theta\, d\varphi\,.$$

Интегрирование по углам θ и φ выполняется элементарно: $\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi$.

Интегрирование по величине скорости выполняется так же элементарно, если принять во внимание равенства $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} x\,dx = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}$ (см. гл. 1). В самом деле: $\int_0^{\infty} v e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2T}{m}\right)^2$. Так что окончательно $\bar{v} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \frac{1}{2}\left(\frac{2T}{m}\right)^2 4\pi = 2\left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{1/2}$.

в) Среднее значение $\overline{v_x^2}$ вычисляем с помощью распределения Максвелла в декартовой системе координат: $\overline{v_x^2} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \times$ $\times \iiint_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2T}} dv_x\, dv_y\, dv_z = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x$, поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y}{2T}} dv_y = \left(\frac{2T\pi}{m}\right)^{1/2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{2T}} dv_z$. Используя далее соотношение $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\beta x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta x^2} dx = -\frac{\partial}{\partial\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta^{3/2}}$ (см. гл. 1), будем иметь: $\int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 e^{-\frac{mv_x^2}{2T}} dv_x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2}$. Тогда окончательно получим: $\overline{v_x^2} = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{2T}{m}\right)^{3/2} = \frac{T}{m}$.

5.4. Если $dn(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2\right)}{2T}} d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z$ есть среднее число частиц в единице объема идеального газа, у которых компоненты скорости υ_x, υ_y, υ_z лежат в интервалах υ_x, $\upsilon_x + d\upsilon_x$; υ_y, $\upsilon_y + d\upsilon_y$; υ_z, $\upsilon_z + d\upsilon_z$, то среднее количество частиц в единице объема газа, у которых компонента скорости υ_z лежит в интервале $0 \le \upsilon_z \le \upsilon_z^0$, а υ_x и υ_y в интервалах υ_x, $\upsilon_x + d\upsilon_x$; υ_y, $\upsilon_y + d\upsilon_y$, получается суммированием (интегрированием) среднего числа частиц газа с компонентами υ_z в интервале $0 \le \upsilon_z \le \upsilon_z^0$

$$dn\left(\upsilon_x, \upsilon_y, 0 \le \upsilon_z \le \upsilon_z^0\right) = \left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2\right)}{2T}} d\upsilon_x d\upsilon_y \int_0^{\upsilon_z^0} e^{-\frac{m\upsilon_z^2}{2T}} d\upsilon_z.$$

5.5. а) Среднее число частиц в единице объема газа с компонентами скорости в интервалах υ_x, $\upsilon_x + d\upsilon_x$; υ_y, $\upsilon_y + d\upsilon_y$; υ_z, $\upsilon_z + d\upsilon_z$ определяется распределением Максвелла (см. задачи 5.1, 5.4)

За время τ частицы, имеющие компоненту скорости υ_z проходят путь $\upsilon_z\tau$. Поэтому частицы газа, находящиеся в параллелепипеде с объемом $a b \upsilon_z \tau$ (рис. 5.2), имеющие компоненту υ_z в интервале υ_z, $\upsilon_z + d\upsilon_z$ и двигающиеся к плоскости xy, достигнут за время τ стенки (плоскости xy). Число частиц газа с компонентами скорости υ_x, $\upsilon_x + d\upsilon_x$; υ_y, $\upsilon_y + d\upsilon_y$; υ_z, $\upsilon_z + d\upsilon_z$ в таком параллелепипеде равно $dN = dn(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\, a b \upsilon_z \tau$. Разделив левую и правую стороны этого равенства на $ab\tau$, получим $d\nu(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \frac{dN}{ab\tau} = = \upsilon_z dn(\upsilon_x \upsilon_y \upsilon_z)$.

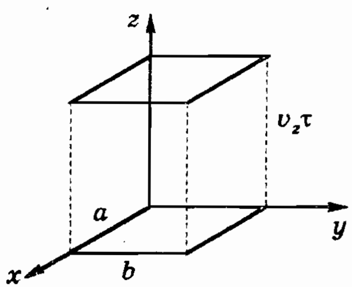


Рис. 5.2

$d\nu$ есть число частиц газа с заданными компонентами скорости

v_x, v_y, v_z, достигших за единицу времени единицы поверхности стенки – число ударов частиц газа о единицу поверхности в единицу времени. Число ударов о единицу поверхности стенок в единицу времени для случая произвольных значений v_x и v_y получается интегрированием выражения $d\nu = v_z dn(v_x, v_y, v_z)$, по v_x и v_y:

$$d\nu(v_z) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} v_z\left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2T}}\, dv_x dv_y dv_z =$$

$$= v_z\left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{1/2} e^{-\frac{mv_z^2}{2T}}\, dv_z .$$

При вычислении интегралов использовались равенства $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2T}}\, dv_x = \left(\frac{2\pi T}{m}\right)^{1/2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{2T}}\, dv_y$ (интеграл Пуассона, см. гл. 1).

б) Перепишем число ударов $d\nu(v_x v_y v_z)$, полученное для декартовой системы координат, для случая сферической системы координат

$$d\nu = v\cos\theta\left(\frac{N_0}{V_0}\right)\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}}\, v^2 dv\, d\Omega,$$

где $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ – элемент телесного угла, причем угол θ есть угол между направлением скорости молекулы (к стенке) и нормалью к этой поверхности. Полученное выражение $d\nu$ для сферической системы координат есть число ударов о единицу поверхности в единицу времени, которые наносят частицы газа, двигающиеся к стенке в элементе телесного угла $d\Omega$ и имеющие величину скорости v в интервале v, $v + dv$.

5.6. Наиболее вероятная скорость атома в одноатомном идеальном газе находится с помощью распределения Максвелла, записанного в сферической системе координат (см. задачу 5.2) и имеющего вид $dW = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}}\, v^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, dv$. dW есть вероятность того, что частицы в газе движутся в элементе телесного угла $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ и имеют абсолютное значение скорости v в интервале v, $v + dv$. Интегрируя dW по телесному углу $d\Omega$, получим: $dW(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 dv$. $dW(v)$ есть вероятность того, что частицы газа имеют абсолютное значение скорости v в интервале $v + dv$ при произвольных значениях θ и φ. Величина $\frac{dW(v)}{dv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2$ есть плотность распределения вероятности по абсолютной величине скорости v. График зависимости плотности вероятности от v указан на рис. 5.3. Из графика следует, что плотность вероятности имеет максимум при некотором значении скорости v_{max}. Это значение v_{max} находится из условий экстремума плотности распределения вероятности

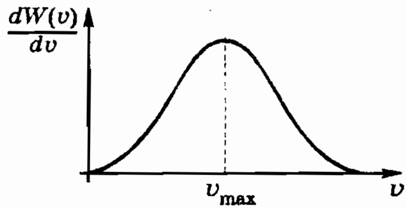


Рис. 5.3

$$\frac{d}{dv}\left(e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2\right) = -\frac{mv}{T} e^{-\frac{mv^2}{2T}} v^2 + e^{-\frac{mv^2}{2T}} 2v = 0.$$

откуда $v_{max} = +\sqrt{\frac{2T}{m}}$. Отметим, что $v_{max} > \bar{v}$ (см. задачу 5.3).

5.7. Запишем распределение Больцмана для случая ультрарелятивистского одноатомного идеального газа, у которого кинетическая энергия ε частицы следующим образом выражается через импульс p частицы: $\varepsilon = cp$, где c — скорость света (см. формулу 5.2): $d\bar{N} = e^{\frac{\mu - cp}{T}} \frac{p^2 dp\, d\Omega_{\vec{p}}\, dV}{(2\pi\hbar)^3}$. $d\bar{N}$ есть среднее число атомов идеального газа в объеме dV, величина импульсов которых лежит в интервале p, $p + dp$, а направление импульсов локализовано в пределах элемента телесного угла $d\Omega_{\vec{p}}$. Нормировочную постоянную $e^{\frac{\mu}{T}}$ удобно выразить через полное число частиц газа N_0 и объем газа V_0. Для этого проинтегрируем распределение Больцмана по импульсам частиц и по координатам частиц (по dV):

$$N_0 = e^{\frac{\mu}{T}} \frac{4\pi V_0}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty e^{-\frac{cp}{T}} p^2 dp = e^{\frac{\mu}{T}} \frac{4\pi V_0}{(2\pi\hbar)^3} 2\left(\frac{T}{c}\right)^3,$$

причем для вычисления интеграла использовалось выражение $\int_0^\infty e^{-\beta x} x^2 dx = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \int_0^\infty e^{-\beta x} dx = \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \frac{1}{\beta} = \frac{2}{\beta^3}$. Нормировочная постоянная $e^{\frac{\mu}{T}}$ в этом случае равна: $e^{\frac{\mu}{T}} = \left(\frac{N_0}{V_0}\right) \frac{(2\pi\hbar)^3}{8\pi} \left(\frac{c}{T}\right)^3$, а распределение Больцмана приобретает вид $d\bar{N} = (N_0/V_0) \frac{1}{8\pi} \left(\frac{c}{T}\right)^3 e^{-\frac{cp}{T}} p^2 dp\, d\Omega_{\vec{p}}\, dV$.

Вводя величину $dn = \frac{d\bar{N}}{dV}$, получим $dn = \left(\frac{N_0}{V_0}\right) \frac{1}{8\pi} \left(\frac{c}{T}\right)^3 e^{-\frac{cp}{T}} p^2 dp\, d\Omega_{\vec{p}}$ – число частиц в единице объема газа, величины импульсов которых лежат в интервале p, $p + dp$, а направление импульсов лежит в элементе телесного угла $d\Omega_{\vec{p}}$. Наконец, интегрируя dn по $d\Omega$, будем иметь $dn(p) = \left(\frac{N_0}{V_0}\right) \frac{1}{2} \left(\frac{c}{T}\right)^3 e^{-\frac{cp}{T}} p^2 dp$ – распределение по абсолютным величинам импульса ультрарелятивистких частиц идеального газа.

5.8. Число соударений в единицу времени данной частицы с другими частицами идеального газа, сопровождающихся некоторым процессом с сечением σ, равно: $\nu = \left(\frac{N_0}{V_0}\right) \frac{\pi}{2} \times$ $\times \left(\frac{m}{\pi T}\right)^{3/2} \int_0^\infty e^{-\frac{m(v')^2}{4T}} \sigma (v')^3 dv'$, где v' – относительная скорость двух сталкивающихся частиц, m – масса частицы газа, N_0 – полное число частиц в газе, V_0 – объем газа, T – его температура.

В общем случае сечение σ является некоторой функцией скорости v'. В данной же задаче $\sigma=\pi(2a)^2$ и не зависит от v'. Отметим, что $2a$ есть расстояние между центрами сталкивающихся шаров, радиусы которых равны a. Таким образом, в данном случае число соударений равно: $\nu=\left(\frac{N_0}{V_0}\right)\frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{\pi T}\right)^{3/2}\pi(2a)^2\int\limits_0^\infty e^{-\frac{m(v')^2}{4T}}\times$ $\times(v')^3\,dv'=\left(\frac{N_0}{V_0}\right)\frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{\pi T}\right)^{3/2}\pi(2a)^2\frac{1}{2}\left(\frac{4T}{m}\right)^2$. Интеграл, указанный выше, вычисляется по схеме, приведенной в задаче 5.3, пункт б. Окончательно будем иметь $\nu=\left(\frac{N_0}{V_0}\right)(4a)^2\left(\frac{\pi T}{m}\right)^{1/2}$.

5.9. Распределение Больцмана для двухатомного идеального газа имеет вид $d\bar{N}=e^{\frac{\mu-\varepsilon_{кин}-\varepsilon_{вращ}-\varepsilon_{кол}}{T}}\frac{(dpdq)_{кин}(dpdq)_{вращ}(dpdq)_{кол}}{(2\pi\hbar)^6}$, где $\varepsilon_{кин}$ — кинетическая энергия, $\varepsilon_{вращ}$ – вращательная энергия и $\varepsilon_{кол}$ – колебательная энергии двухатомной молекулы. $(dpdq)_{кин}$ – произведение дифференциалов обобщенных координат и обобщенных импульсов, отвечающих поступательному движению двухатомной молекулы как целого. Аналогичный смысл имеют $(dpdq)_{вращ}$ и $(dpdq)_{кол}$. От распределения Больцмана можно перейти к распределению вероятностей обобщенных координат и импульсов тем же способом, как это было сделано в задаче 5.1. Опуская подробности достаточно громоздкого вывода, приведем конечный результат: $dW=\text{const}\,e^{-\frac{\varepsilon_{кин}}{T}}(dpdq)_{кин}\,e^{-\frac{\varepsilon_{вращ}}{T}}(dpdq)_{вращ}\times$ $\times e^{-\frac{\varepsilon_{кол}}{T}}(dpdq)_{кол}$. const определяется из условий нормировки $\int dW=1$. Выделим из dW множитель, отвечающий колебаниям $dW_{кол}=\text{const}_1\,e^{-\frac{\varepsilon_{кол}}{T}}(dpdq)_{кол}$. Надо иметь в виду, что в центре инерции молекулы, где рассматриваются колебания атомов около положения равновесия, движение двух частиц сводится к движению одной частицы с приведенной массой μ_0 и относительным импульсом p_q. При этом расстояние между атомами – относительное расстояние, записывают как $l = l_0 + q$, где l_0 – равновесное расстояние между атомами, q – отклонение от равновесного расстояния. Энергия одномерных гармонических колебаний с частотой ω частицы массой μ_0, как известно, имеет вид $\varepsilon_{\text{кол}} = \dfrac{p_q^2}{2\mu_0} + \dfrac{\mu_0\omega^2 q^2}{2}$, поэтому $dW_{\text{кол}} = \text{const}_1\, e^{-\frac{p_q^2/2\mu_0 + \mu_0\omega^2 q^2/2}{T}}\, dp_q\, dq$.

Наконец, выделяя из $dW_{\text{кол}}$ множитель $dW(q) = \text{const}_2\, e^{-\frac{\mu_0\omega^2 q^2}{2T}}\, dq$, найдем с его помощью среднее значение расстояния между колеблющимися атомами: $\bar{l} = \overline{(l_0 + q)} = l_0 + \bar{q}$, где $\bar{q} = \int q\, dW(q) = \text{const}_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q\, e^{-\frac{\mu_0\omega^2 q^2}{2T}}\, dq = 0$ (см. задачу 5.3, а). Равенство $\bar{l} = l_0$ означает, что при гармонических колебаниях молекула не испытывает теплового расширения или сжатия. Зависимость $\bar{l}$ от температуры связана с ангармоническими колебаниями молекулы.

5.10. Полная энергия атома, находящегося в поле тяжести с ускорением g есть $\varepsilon = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2T} + mgz$. Поэтому распределение Больцмана для одноатомного идеального газа оказывается следующим: $d\bar{N}(p_x p_y p_z, z) = e^{\frac{\mu - \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - mgz}{T}} \dfrac{dp_x\, dp_y\, dp_z\, dx\, dy\, dz}{(2\pi\hbar)^3}$. Рассмотрим частный случай, когда газ заполняет сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого H, а площадь основания σ. Нормировочная постоянная $e^{\frac{\mu}{T}}$ находится путем интегрирования распределения Больцмана по импульсам и координатам. Для рассматриваемого случая интегрирование по координатам и импульсам частиц приводит к следующему значению нормировочной постоянной: $e^{\frac{\mu}{T}} = \dfrac{N_0}{(2\pi m T)^{3/2}} \dfrac{(2\pi\hbar)^3 mg}{\sigma T\left(1 - e^{-\frac{mgH}{T}}\right)}$.

Если подставить найденное значение $e^{\frac{\mu}{T}}$ в распределение Больцмана, то ему можно придать следующий вид $dW = dW_М \, dW_Б$,

где $dW = \dfrac{d\bar{N}}{N_0}$; $dW_М = \left(\dfrac{1}{2\pi m T}\right)^{3/2} e^{-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2mT}} dp_x dp_y dp_z$ – распределение Максвелла, нормированное на единицу; $dW_Б = \dfrac{mge^{-\frac{mgz}{T}} dx\,dy\,dz}{\sigma T\left(1 - e^{-\frac{mgH}{T}}\right)}$ - распределение по координатам, нормированное на единицу. Распределение $dW_Б$ зависит лишь от z, а от x и y не зависит вообще (по x и y распределение однородное). Интегрируя это последнее распределение по x и y, получим $dW_Б(z) = \dfrac{mg}{T} \dfrac{e^{-\frac{mgz}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{mgH}{T}}\right)} dz$ – распределение частиц газа по высоте (интегрирование по x и y дает площадь основания параллелепипеда σ).

II

5.11. $dn(\varepsilon) = \left(\dfrac{N_0}{V_0}\right) \dfrac{2}{\sqrt{\pi T^3}} e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon$. Указание: см. задачу 5.2.

5.12. $n(\varepsilon_2\, \varepsilon_2) = \left(\dfrac{N_0}{V_0}\right) \dfrac{2}{\sqrt{\pi T^3}} \displaystyle\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon$.

5.13. $n(\varepsilon > \varepsilon_0) - \left(\dfrac{N_0}{V_0}\right) 2 \dfrac{\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\pi T}} e^{-\frac{\varepsilon_0}{T}}$. Указание: при вычислении величины $n(\varepsilon > \varepsilon_0)$ считать множитель $\sqrt{\varepsilon}$ медленно меняющимся сравнительно с $e^{-\frac{\varepsilon}{T}}$.

5.14. $\varepsilon_m = \dfrac{T}{2}$.

5.15. $\mu = T \ln\left\{\left(\dfrac{N_0}{V_0}\right)\hbar^3\left(\dfrac{2\pi}{mT}\right)^{3/2}\right\}$. Химический потенциал μ выражен как функция N_0, V_0 и T. Можно выразить μ как функцию P и T, используя уравнение состояния идеального газа $PV_0 = N_0 T$:
$\mu = T \ln\left\{\left(\dfrac{2\pi}{m}\right)^{3/2}\hbar^3\,\dfrac{P}{T^{5/2}}\right\}$.

5.16. $dW = \left(\dfrac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m(\vec{v}-\vec{u})}{2T}}\, dv_x\, dv_y\, dv_z$.

5.17. $$\bar{u} = -T\,\frac{\left(\dfrac{m\omega^2R^2}{2T} - 1\right)e^{\frac{m\omega^2R^2}{2T}} + 1}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2T}} - 1}.$$

5.18. $dW = c\, e^{-\frac{\sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}}{T}}\, dp_x\, dp_y\, dp_z$. Постоянная c определяется из условия нормировки $\int dW = 1$.

III

5.19. $dW_{\text{отн}}(v_{\text{отн}}) = 4\pi\left(\dfrac{m}{4\pi T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m v_{\text{отн}}^2}{4T}}\, v_{\text{отн}}^2\, dv_{\text{отн}}$.

5.20. $dW(v_x,\ v_y) = \dfrac{m}{2\pi T} e^{-\frac{m\left(v_x^2 + v_y^2\right)}{2T}}\, dv_x\, dv_y$; $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{\pi T}{2m}}$; $\overline{v^2} = \dfrac{2T}{m}$.

5.22. $\nu = \dfrac{n}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\dfrac{T}{m}}\left(\dfrac{|e|V}{T} + 1\right)e^{-\frac{|e|V}{T}}$, где V – задерживающая разность потенциалов.

5.23. $\bar{v} = \sqrt{\dfrac{9\pi T}{8m}}$; $\overline{v^2} = \dfrac{4T}{m}$.

5.25. а) $\Delta\nu = \sigma\dfrac{P_2 - P_1}{\sqrt{2\pi m T}}$; б) $\Delta E = \sigma\sqrt{\dfrac{2T}{\pi m}}(P_2 - P_1)$; в) $\bar{\varepsilon} = 2T$.

5.27. $z_0 = \dfrac{T}{mg}$.

5.29. $\bar{u} = T\left\{1 - \dfrac{mgH}{T}\dfrac{1}{e^{\frac{mgH}{T}} - 1}\right\}$.

5.30. $\overline{r^2} = \dfrac{1}{\omega^2}\dfrac{2T}{m}\left\{\dfrac{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2T}}\left(\dfrac{m\omega^2R^2}{2T} - 1\right) + 1}{e^{\frac{m\omega^2R^2}{2T}} - 1}\right\}$.

5.31. $dW = \dfrac{g\left(\dfrac{m\omega}{T}\right)^2 e^{-\frac{mgz}{T}} e^{\frac{m\omega^2r^2}{2T}} r\,dr\,dz}{\left(1 - e^{-\frac{mgH}{T}}\right)\left(e^{\frac{m\omega^2R^2}{2T}} - 1\right)}$.

5.32. $\bar{u} = -d_0 E\left\{cth\dfrac{d_0E}{T} - \dfrac{T}{d_0E}\right\}$.

5.33. Если среднее расстояние между атомами обозначить как $\bar{r} = r_0(1 + \alpha T)$, где r_0 – равновесное расстояние, α – коэффициент линейного расширения молекулы, то $\alpha = \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{r_0}\dfrac{\delta}{\gamma^2}$, где

$$\delta = \frac{28}{r_0^3}\left\{\frac{13A}{r_0^{12}} - \frac{2B}{r_0^6}\right\} \qquad \gamma = \frac{3}{r_0^2}\left(\frac{26A}{r_0^{12}} - \frac{7B}{r_0^6}\right).$$

Глава 6

I

6.1. а) Распределение Ферми для электронного газа имеет вид $d\bar{N}_p = \dfrac{1}{e^{\frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{T}} + 1}\dfrac{Vp^2dp}{\pi^2\hbar^3}$, где $\mu(P, T)$ – химический потенциал, T – температура, V – объем и P – давление; p и m – абсолютное значение импульса и масса электрона. Для низких температур химический потенциал газа $\mu(P, T)$ представляет собой положительную величину, поскольку в противном случае показатель экспоненты в распределении Ферми был бы положительной величиной и при $T \to 0$ стремился бы к бесконечности. В этом случае распределение Ферми было бы равно нулю для любых импульсов частиц. Для $\mu(P, T=0) > 0$ показатель экспоненты при $\frac{p^2}{2m} < \mu(P, T=0)$ отрицателен и для $T \to 0$ экспонента равна нулю, так что распределение Ферми для абсолютно вырожденного электронного газа имеет вид $dN_p = \frac{Vp^2dp}{\pi^2\hbar^3}$. В свою очередь для $\frac{p^2}{2m} > \mu(P, T=0)$ показатель экспоненты положителен и при $T \to 0$ экспонента стремится к бесконечности, так что $dN_p = 0$. Из сказанного следует, что для $T = 0$ величина dN_p отлична от нуля лишь для импульсов частиц в интервале $0 \le p \le p_F$, где p_F – импульс Ферми, причем $\frac{p_F^2}{2m} = \mu(P, 0)$. Величину $\frac{p_F^2}{2m} = \varepsilon_F$ принято называть энергией Ферми. Импульс Ферми p_F может быть выражен через полное число частиц в электронном газе $N_0 = \int dN_p$ и объем газа V. В самом деле для $T = 0$ будем иметь $N_0 = \int\limits_0^{p_F} \frac{Vp^2dp}{\pi^2\hbar^3}$, откуда $p_F = (3\pi^2)^{1/3}\hbar\left(\frac{N_0}{V}\right)^{1/3}$ и $\varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = (3\pi^2)^{2/3} \times \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N_0}{V}\right)^{2/3}$. Химический потенциал абсолютно вырожденного электронного газа равен, следовательно, $\mu(P, 0) = \varepsilon_F$.

б) Средняя энергия электронного газа для $T = 0$ определяется формулой $\bar{E} = \int\limits_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} d\bar{N}_p = \int\limits_0^{p_F} \frac{p^2}{2m} \frac{p^2 dpV}{\pi^2\hbar^3} = \frac{Vp_F^5}{10\pi^2 m\hbar^3}$. Подставляя в это выражение p_F из пункта *а*, будем иметь $\bar{E} = \frac{3(3\pi^2)^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N_0}{V}\right)^{2/3} N_0$.

в) По определению давление P выражается через свободную энергию F следующим образом: $P=-\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$. Свободная энергия F связана со средней энергией $\bar{E}$ соотношением $F=\bar{E}-TS$, где S – энтропия. Для $T=0$ энтропия любого тела, в частности электронного газа, равна нулю (третье начало термодинамики). Поэтому для $T=0$ имеет место равенство $F=\bar{E}$, которое позволяет для абсолютно вырожденного электронного газа записать $P=-\left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial V}\right)_{T=0}$. Имея в виду выражение средней энергии $\bar{E}$, полученное в пункте *б*, будем иметь $P=\frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N_0}{V}\right)^{5/3}$. Найденное выражение для P может быть выражено через среднюю энергию $\bar{E}$, именно $P=\frac{2}{3}\frac{\bar{E}}{V}$. Легко убедиться в том, что соотношение $P=\frac{2}{3}\frac{\bar{E}}{V}$ имеет место и для обычного атомарного идеального газа при нормальных условиях. В самом деле, средняя энергия атомарного идеального газа есть $\bar{E}=\frac{3}{2}N_0T$, а уравнение состояния такого газа имеет вид $PV=N_0T$. Тогда, комбинируя эти два соотношения, будем иметь $P=\frac{2}{3}\frac{\bar{E}}{V}$.

6.2. Согласно квазиклассическому приближению число состояний электрона с абсолютными значениями импульса p в интервале p, $p+dp$ есть $d\Gamma=\frac{Vp^2dp}{\pi^2\hbar^3}$, где V – объем газа. Для ультрарелятивистского электронного газа связь энергии электрона ε с его абсолютным значением импульса p имеет вид $\varepsilon=cp$ (c – скорость света). Тогда, выражая p через ε, найдем число состояний электрона для энергий последнего в интервале ε, $\varepsilon+d\varepsilon$: $d\Gamma=\frac{V\varepsilon^2d\varepsilon}{\pi^2(\hbar c)^3}\equiv\Omega(\varepsilon)d\varepsilon$, где $\Omega(\varepsilon)=\frac{V\varepsilon^2}{\pi^2(\hbar c)^3}$ – плотность числа состояний. Импульс Ферми для ультрарелятивистского газа электронов имеет тот же вид, что и для нерелятивистского газа (см. задачу 6.1, а) $p_F=(3\pi^2)^{1/3}\hbar\left(\frac{N_0}{V}\right)^{1/3}$, поскольку для $T=0$ распределение Ферми имеет один и тот же вид для случаев нерелятивистского и ультрарелятивистского газа электронов. Однако энергия Ферми для случая ультрарелятивистского газа электронов $\varepsilon_F=cp_F=c(3\pi^2)^{1/3}\hbar\left(\frac{N_0}{V}\right)^{1/3}$ отличается от энергии Ферми для нерелятивистского газа (см. задачу 6.1, а).

6.3. Распределение Ферми для $T=0$ имеет вид $d\bar{N}_p=$
$=\begin{cases}\frac{4\pi g p^2 dp V}{(2\pi\hbar)^3} & 0\le p\le p_F\\ 0 & p_F\le p\end{cases}$, где в нерелятивистском приближении $p_F=2\pi\left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{1/3}\frac{N_0}{V}\hbar$ (см. задачу 6.1, а). По своему смыслу распределение Ферми представляет среднее количество фермионов в объеме V с абсолютным значением импульса p в интервале p, $p+dp$. Переходя от импульсов p к скорости v и записывая $p=mv$, получим среднее количество фермионов в объеме V с абсолютным значением скорости v в интервале v, $v+dv$:

$$d\bar{N}_v=\begin{cases}\frac{4\pi g m^3 V v^2 dv}{(2\pi\hbar)^3} & 0\le v\le v_0=\frac{p_F}{m}\\ 0 & v_0\le v\end{cases}.$$

Имея это в виду, среднее значение v^n, где n — целое число $(n\ge -2)$ может быть записано следующим образом:

$$\overline{v^n}=\frac{\int\limits_0^{v_0} v^n d\bar{N}_v}{\int\limits_0^{v_0} d\bar{N}_v}=\frac{4\pi g m^3 V v_0^{n+3}}{(2\pi\hbar)^3 N_0(n+3)}=\frac{3}{n+3}v_0^n.$$

Тогда для $n=1$ $\bar{v}=\frac{3}{4}v_0$; для $n=2$ $\overline{v^2}=\frac{3}{5}v_0^2$, для $n=-1$ $\overline{v^{-1}}=\frac{3}{2}v_0^{-1}$.

6.4. Рассмотрим ферми-газ элементарных частиц и запишем выражения для полного числа частиц N_0 и давления P:

$$N_0 = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\frac{\frac{p^2}{2m}-\mu}{T}}+1}\,\frac{4\pi g V p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}; \quad P = T\int_0^\infty \ln\left(1+e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}\right)\frac{4\pi g p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3},$$

где μ – химический потенциал, V – объем, T – температура газа, g – количество проекций спина частицы на некоторое направление. Если $e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}} \ll 1$, то подынтегральные выражения в N_0 и P могут быть разложены в ряд по малой величине $e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}} \ll 1$, причем можно ограничиться малым числом членов ряда. В самом деле, можно записать:

$$\frac{1}{e^{\frac{\frac{p^2}{2m}-\mu}{T}}+1} \equiv \frac{e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}}{1+e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}} = e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}\left\{1-e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}+\ldots\right\};$$

$$\ln\left(1+e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}\right) = e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}} - \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}\right)^2 + \ldots .$$

Тогда ограничиваясь первым членом ряда в подынтегральных выражениях для N_0 и P, будем иметь:

$$N_0 \approx \int_0^\infty e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}\,\frac{4\pi g V p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}; \qquad P \approx T\int_0^\infty e^{\frac{\mu-\frac{p^2}{2m}}{T}}\,\frac{4\pi g p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Разделив далее почленно второе выражение на первое, получим $\frac{P}{N_0} = \frac{T}{V}$ или $PV = N_0 T$ – уравнение состояния идеального молекулярного газа. Если ограничиться в соответствующих разложениях первыми двумя членами ряда, можно получить поправки к уравнению состояния идеального газа $PV = N_0 T$. Таким образом, для получения необходимых поправок нужно записать:

$$N_0 = \int_0^\infty \left\{ e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} - \left(e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \right)^2 \right\} \frac{4\pi g V p^2 dp}{(2\pi\hbar^2)3};$$

$$P = T\int_0^\infty \left\{ e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} - \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \right)^2 \right\} \frac{4\pi g p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{T}{V}\int_0^\infty \left[e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} - \left(e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \right)^2 \right] \times$$

$$\times \frac{4\pi V p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} + \frac{T}{2}\int_0^\infty \left(e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \right)^2 \frac{4\pi g p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{TN_0}{V} + \frac{T}{2}\int_0^\infty \left(e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \right)^2 \frac{4\pi g p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Интеграл

$$\int_0^\infty \left(e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \right)^2 \frac{4\pi g p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = e^{\frac{2\mu}{T}} \frac{4\pi g}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{2mT}} p^2 dp = e^{\frac{2\mu}{T}} \frac{g(mT)^{3/2}}{\pi^{3/2}(2\hbar)^3}.$$

Величина $e^{\frac{\mu}{T}}$ с требуемой точностью может быть найдена из равенства $N_0 = \int_0^\infty e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \frac{4\pi g V p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$, которое было получено ранее.

Производя элементарные вычисления, найдем, что $e^{\frac{\mu}{T}} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{g(2\pi m T)^{3/2}}\left(\frac{N_0}{V}\right)$. Имея в виду это значение $e^{\frac{\mu}{T}}$, запишем, что $e^{\frac{2\mu}{T}} \frac{g(mT)^{3/2}}{\pi^{3/2}(2\hbar)^3} = \left(\frac{N_0}{V}\right)^2 \frac{\hbar^3}{g}\left(\frac{\pi}{mT}\right)^{3/2}$. Поставляя полученный результат в выражение для P, будем иметь $P = T\left(\frac{N_0}{V}\right)\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\hbar^3}{g}\left(\frac{\pi}{mT}\right)^{3/2}\frac{N_0}{V}\right\}$ или $PV = N_0T\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\hbar^3}{g}\left(\frac{\pi}{mT}\right)^{3/2}\frac{N_0}{V}\right\}$. Выражение $\frac{1}{2}\frac{\hbar^3}{g}\left(\frac{\pi}{mT}\right)^{3/2}\frac{N_0}{V}$ в фигурных скобках определяет собой поправку к уравнению состояния идеального газа $PV = N_0T$. Эта поправка, естественно, является малой величиной сравнительно с единицей. В самом деле, условие $e^{\frac{\mu - \frac{p^2}{2m}}{T}} \ll 1$ будет выполняться для любых импульсов p во всяком случае, если $e^{\frac{\mu}{T}} \ll 1$. Но поскольку $e^{\frac{\mu}{T}} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{g(2\pi mT)^{3/2}}\left(\frac{N_0}{V}\right)$, то и $\frac{(2\pi\hbar)^3}{g(2\pi mT)^{3/2}}\left(\frac{N_0}{V}\right) \ll 1$. Это последнее неравенство и означает малость поправочного слагаемого в фигурных скобках. Выполняя аналогичные преобразования для бозе-газа элементарных частиц, найдем поправку к уравнению состояния идеального газа: $PV = N_0T\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\hbar^3}{g}\left(\frac{\pi}{mT}\right)^{3/2}\frac{N_0}{V}\right\}$.

6.5. Распределения Ферми и Бозе для газа элементарных частиц имеют вид: $d\bar{N}_p = \frac{1}{e^{\frac{\frac{p^2}{2m} - \mu}{T}} \pm 1}\frac{4\pi g V p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$. Знак "+" относится к ферми-газу, знак "–" к бозе-газу. Переходя от импульса p к энергии частицы $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, будем иметь: $d\bar{N}_\varepsilon = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} \pm 1}\frac{g m^{3/2} V \varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}$.

Отсюда средняя энергия газа равна $\bar{E} = \int_0^\infty \varepsilon\, d\bar{N}_\varepsilon = \frac{g m^{3/2} V}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \times$ $\times \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} \pm 1}$. В свою очередь, давление газа элементарных частиц может быть записано в виде $P = \frac{2}{3}\frac{g m^{3/2}}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon - \mu}{T}} \pm 1} = \frac{2}{3}\frac{1}{V}\times$

$$\times\left(\frac{gm^{3/2}V}{2^{1/2}\pi^2\hbar^3}\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{3/2}\,d\varepsilon}{e^{\frac{\mu-\varepsilon}{T}}\pm 1}\right).$$ Выражение в круглых скобках есть средняя энергия $\bar{E}$ газа, так что можно записать $P=\frac{2}{3}\frac{\bar{E}}{V}$. Величина $\frac{\bar{E}}{V}$ есть средняя плотность энергии. Таким образом, как для ферми-газа, так и для бозе-газа связь между давлением P и средней плотностью энергии $\frac{\bar{E}}{V}$ оказывается одной и той же: $P=\frac{2\bar{E}}{3V}$.

6.6. В термодинамике имеется формула $C_p-C_V=-\frac{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}$, где C_p — теплоемкость при постоянном давлении, C_V — теплоемкость при постоянном объеме, $P(V, T)$ — давление тела как функция объема V и температуры T. Применим эту формулу для случая равновесного черного излучения. Для равновесного излучения $C_V=\frac{16\sigma VT^3}{c}$, $P=\frac{4\sigma}{3c}T^4$, где σ — постоянная Стефана–Больцмана, c — скорость света. Производная $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V=\frac{16\sigma}{3C}VT^3$, $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T=0$, так как давление P черного равновесного излучения не зависит от объема (в общем случае эта производная отрицательная). Из сказанного следует, что при конечных значениях V и T, согласно приведенной формуле, величина c_p стремится к бесконечности: $c_p\to\infty$.

6.7. Число собственных колебаний в интервале волновых чисел от k до $k+dk$ для электромагнитного излучения в объеме V равно $dN=\frac{Vk^2dk}{\pi^2}$. В изотропной среде с показателем преломления $n(\omega)$ волновой вектор k связан следующим образом с частотой ω: $k=n(\omega)\frac{\omega}{c}$. Выразим число собственных колебаний электромагнитного излучения через частоту ω. Для этого запишем, что $dk = \frac{1}{c}\{dn\omega + n\,d\omega\} = \frac{n}{c}\left\{1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right\}d\omega = \frac{n}{c}\frac{d\ln\{n\omega\}}{d\ln\omega}d\omega$. Тогда $dN = \frac{Vk^2dk}{\pi^2} = \frac{V}{\pi^2}\left(\frac{n(\omega)}{c}\right)^3\omega^2\frac{d\ln\{n\omega\}}{d\ln\omega}d\omega$. В этом случае среднее число фотонов с частотами в интервале ω, $\omega + d\omega$ оказывается равным $d\bar{N}_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1}\frac{V}{\pi^2}\left(\frac{n(\omega)}{c}\right)^3\omega^2\frac{d\ln\{n\omega\}}{d\ln\omega}d\omega$. Наконец, умножая $d\bar{N}_\omega$ на $\hbar\omega$, получим среднюю энергию излучения, заключенную в интервале частот ω, $\omega + d\omega$ – формулу Планка для диспергирующей среды: $d\bar{E}_\omega = \hbar\omega\, d\bar{N}_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1}\frac{V}{\pi^2}\left(\frac{n(\omega)}{c}\right)^3\hbar\omega^3\frac{d\ln\{n\omega\}}{d\ln\omega}d\omega$.

II

6.8. $\nu = \frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{16}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N_0}{V_0}\right)^{4/3}$, где N_0 – число частиц в газе, V_0 – объем газа, m – масса частицы в газе.

6.9. $d\nu = \frac{3(3\pi^2)^{1/3}}{16\pi}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N_0}{V_0}\right)^{4/3}\cos\theta\, d\Omega$.

6.12. $\mu = \mu_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\mu_0}\right)^2\right]$, где μ_0 – химический потенциал при $T = 0$.

6.13. Спектральная плотность $\frac{dE_\omega}{d\omega} = \frac{\hbar}{e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1}\frac{\sigma\omega^2}{\pi c^2}$, где σ – величина площади, на которой локализовано равновесное излучение в двумерном случае.

6.14. Средняя энергия черного излучения в двумерном случае (см. задачу 6.13) $\bar{E} = 2{,}4\frac{\sigma T^3}{\pi c^2\hbar^2}$. Указание: далее вычислять термодинамические величины черного излучения в двумерном случае, используя обычные формулы термодинамики.

6.15. $Z = 2^N \left(\operatorname{ch} \frac{\varepsilon}{T}\right)^{N-1}$, где $\operatorname{ch} x$ – гиперболический косинус.

6.16. $S = \frac{\pi^2}{2} \frac{NT}{\mu_0}$, где μ_0 – химический потенциал при $T = 0$.

6.17. Температура вырождения равна $T_F \sim \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N_0}{V_0}\right)^{2/3}$. Поэтому для электронов $T_F^{\text{эл}} \sim \frac{\hbar^2}{2m_{\text{эл}}}\left(\frac{N_0}{V_0}\right)^{2/3}$, где $m_{\text{эл}}$ – масса электрона, а для протонов температура вырождения $T_F^{\text{прот}} \sim \frac{\hbar^2}{2M_{\text{прот}}}\left(\frac{N_0}{V_0}\right)^{2/3}$, где $M_{\text{прот}}$ – масса протона. Отсюда $\frac{T_F^{\text{эл}}}{T_F^{\text{прот}}} = \frac{M_{\text{прот}}}{m_{\text{эл}}}$.

6.18. $P = \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N_0}{V_0}\right)^{5/3}$. Для $\frac{N_0}{V_0} = 6 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{см}^3}$.

$$P \approx 6 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{г см}}{\text{сек}^2}\right) \frac{1}{\text{см}^2}.$$

III

6.21. $P = \frac{c}{8\pi^2\hbar^3}\left\{\frac{2}{3}p_F^4 + (mc)^4 A r \operatorname{sh}\left(\frac{P_F}{mc}\right)\right\}$, где P_F – импульс Ферми, $\operatorname{sh} x$ – гиперболический синус.

6.22. $\nu = \frac{c}{4} \frac{N_0}{V_0}$.

6.23. $c_p - c_V \sim T^{2n+1}$.

6.24. $P = \frac{\bar{E}}{3V_0}$, где V_0 – объем газа.

6.25. $\bar{E} = \frac{3}{2} NT \left\{ 1 + \frac{\pi^{3/2} \hbar^3}{4(mT)^{3/2}} \left(\frac{N_0}{V_0} \right) \right\}$; $P = \frac{2\bar{E}}{3V_0}$, где N_0 – число частиц в газе, V_0 – объем газа, m – масса электрона.

6.28. $\beta = \frac{3}{2} \frac{1}{\varepsilon_F \left(\frac{N}{V} \right)}$, где ε_F – энергия Ферми.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1, Т. 5. М.: Наука, 1976.
2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика. И.: Физматгиз, 1958.
3. Левич В. Г. Введение в статистическую физику. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
4. Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
5. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. М.: Наука, 1977.
6. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М.: Изд-во иностр. лит., 1955.
7. Задачи по термодинамике и статистической физике / Под ред. П. Ландсберга. М.: Мир, 1974.
8. Кубо Р. Статистическая механика. М.: Мир, 1967.
9. Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. М.: Атомиздат, 1971.
10. Варикаш В. М., Болсун А. И., Аксенов В. В. Сборник задач по статистической физике. Минск: Вышэйш. шк., 1979.
11. Гречко и др. Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. М.: Высш. шк., 1984.
12. Серова Ф. Г., Янкина А. А. Сборник задач по теоретической физике. М.: Просвещение, 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Иванов Юрий Борисович
Фетисов Евгений Петрович
Фивейский Юрий Дмитриевич

ПРАКТИКУМ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Часть 1

Редактор *Н.В. Шумакова*
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 29.10.2008 Формат 60×84 1/16 Уч.-изд. л. 7,0
Печ. л. 7,0 Тираж 150 экз. Изд. № 046-1 Заказ № 327

Московский инженерно-физический институт (государственный университет)
Типография МИФИ. 115409, Москва, Каширское ш., 31