МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.А. Гришин

ФАКУЛЬТЕТ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

# Математический анализ 2

Курс лекций

Москва 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.А. Гришин

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 2

**Курс лекций**

**Москва 2008**

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я7
Г 85

Гришин С.А. Математический анализ 2: Курс лекций.
М.: МИФИ, 2008. - 90 с.

Курс лекций по основам математического анализа снабжен большим количеством примеров, облегчающих восприятие материала лекций на практических занятиях. В нем содержатся теоретические упражнения, которые помогут студенту при подготовке к экзамену. В конце каждой лекции приводятся экзаменационные вопросы.

Адресовано студентам первого курса, изучающим математический анализ во втором семестре.
Рекомендовано редсоветом МИФИ в качестве учебного пособия.

Рецензент: доцент В.Д. Попов

ISBN 978-5-7262-0920-3





Корректор Н.В. Шумакова

Верстка книги полностью соответствует предоставленному автором оригиналу-макету.

Подписано в печать 20.05.08 Формат 60×84 1/16
Тираж 100 экз. Объем 5,75 п.л. Изд. № 060-1 Заказ 202
Типография МИФИ, Каширское шоссе, д.31

## Оглавление

Лекция 14. Неопределенный интеграл

П.1. Понятие неопределенного интеграла

ОПР. Пусть задана функция $f:(a;b)\to R$. Функция $y=F(x)$ называется первообразной функции $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$, если $F'(x)=f(x), \forall x\in(a;b)$.

У функции $y=f(x)$ может существовать много первообразных .

Например, функции $y=\dfrac{x^2+1}{2}$ и $y=\dfrac{x^2+2}{2}$ являются первообразными функции $y=x$ .

ТЕОРЕМА 1 (о структуре множества первообразных).

Пусть $y=F_1(x)$ и $y=F_2(x)$ две первообразные функции $y=f(x)$ на $(a;b)$. Тогда $F_1(x)-F_2(x)\equiv C=const$ .

ДОК. Предположим противное:

$$\exists\, x_1,\, x_2:[x_1;x_2]\subset(a;b)\to\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\neq 0,$$

где $\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$ . Тогда на отрезке $[x_1;x_2]$ для функции $\varphi(x)$ справедлива теорема Лагранжа:

$$\exists x_3\in(x_1;x_2)\to\varphi'(x_3)=\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2}\neq 0.$$

Последнее противоречит условию того, что $y=F_1(x)$ и $y=F_2(x)$ две первообразные функции $y=f(x)$ на $(a;b)$, поскольку

$$\varphi'(x)=\left(F_1'(x)-F_2'(x)\right)=f(x)-f(x)\equiv 0 \text{ на } (a;b).$$

ОПР. Неопределенным интегралом функции $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$ называется множество всех первообразных функции $y=f(x)$ на $(a;b)$. Обозначение: $\int f(x)dx=F(x)+C$ .

Операции дифференцирования и интегрирования обратные в том смысле, что

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx \text{ и } \int df=\int f'(x)dx=f(x)+c.$$

Доказательство этих формул находится на уровне определений дифференциала функции и неопределенного интеграла ( самостоятельно). Таким образом, значки $d$ и $\int$, стоящие рядом, друг друга уничтожают. В качестве простейшего свойства интеграла, вытекающего из его определения, отметим его линейность:

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx.$$

П. 2 .Техника неопределенного интегрирования

А. Замена переменной.

ТЕОРЕМА 2 (о замене переменной в неопределенном интеграле). Пусть функция $u=u(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha;\beta]$и $E_u=[a;b]$, а функция $y=f(u)$ непрерывна на $[a;b]$. Рассмотрим две первообразных $F(u)=\int f(u)du$ и $G(t)=\int f(u(t))u'(t)dt$. Тогда справедлива формула

$$F(u(t))=G(t)+C.$$

ДОК. $(F(u(t)-G(t))'=f(u)_{u=u(t)}\cdot u'(t)-f(u(t))u'(t)\equiv 0, \forall t\in[\alpha;\beta]$.

Тогда $F(u(t))-G(t)\equiv C=const$.

ПРИМЕР 1. Найти интеграл $\int x(x^2+1)^{500}dx$.

РЕШЕНИЕ. Делаем замену $u=x^2+1$. Тогда $du=2xdx\to xdx=\frac{du}{2}$

и $\int x(x^2+1)^{500}dx=\frac{1}{2}\int u^{500}du=\left.\frac{u^{501}}{1002}\right|_{u=x^2+1}=\frac{(x^2+1)^{501}}{1002}+C$.

Б. Интегрирование по частям.

ТЕОРЕМА 3 (формула интегрирования по частям).

Для любых двух функций $u(x),v(x):(a,b)\to R$, имеющих непрерывные производные на $(a;b)$, справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)dx.$$

ДОК. $u(x)\cdot v(x)+C=\int d(u(x)\cdot v(x))=$

$=\int(u'(x)v(x)dx+u(x)v'(x)dx)=\int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx$.

**Формулу интегрирования по частям записывают обычно в дифференциальной форме:**

$$\int u dv = uv - \int v du$$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int x \cos x dx$:

$$\int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int \ln x dx$:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x = x(\ln x - 1) + C.$$

П.3. Таблица первообразных элементарных функций

Следующая таблица является обращением таблицы производных элементарных функций. Каждый результат проверяется дифференцированием.

1. $f(x) = 1 \to \int 1 dx = x + C$ . 2. $f(x) = x \to \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$.

3. $f(x) = \frac{1}{x} \to \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $f(x) = x^n,\ n \neq -1, \ \to \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

5. $f(x) = e^x \ \to \int e^x dx = e^x + C$.

6. $f(x) = a^x \ \to \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

7. $f(x) = \ln x \ \to \int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$.

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ \to \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C$.

9. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ \to \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

10. $f(x) = \sin x \ \to \int \sin x dx = -\cos x + C$.

11. $f(x) = \cos x \ \to \int \cos x dx = \sin x + C$

12. $f(x) = tgx \ \to \int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$.

13. $f(x) = ctgx \to \int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$.

14. $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \to \int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1} \to \int \dfrac{dx}{x^2-1} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$.

16. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \to \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

17. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} \to \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

18. $f(x) = shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \to \int shx dx = chx + C$.

19. $f(x) = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \to \int chx dx = shx + C$.

20. $f(x) = \dfrac{1}{sh^2 x} \to \int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

21. $f(x) = \dfrac{1}{ch^2 x} \to \int \dfrac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

УПРАЖНЕНИЯ: 1. Докажите формулу линейной замены

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

2. Вычислите интеграл $\int \cos\beta x \cdot e^{\alpha x} dx$, используя представление $\cos\beta x \cdot e^{\alpha x} = \mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+\beta i)x}\right)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Понятие неопределенного интеграла. Теорема о структуре множества первообразных.
2. Теорема о замене переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
3. Теорема об интегрировании по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
4. Таблица неопределенных интегралов.

## Лекция 15. Интегрирование рациональных функций

### П.1. Деление многочленов нацело и с остатком. Наибольший общий делитель двух многочленов.

ОПР. Многочлен $P_1(x)$ делится нацело на многочлен $P_2(x)$ или $P_2(x)$ является делителем многочлена $P_1(x)$, если существует многочлен $S(x)$, для которого $P_1(x) = P_2(x) \cdot S(x)$.

ОПР. Многочлен $P_1(x)$ делится на многочлен $P_2(x)$ с остатком, если найдутся многочлены, $S(x)$ и $R(x)$, для которых $P_1(x) = P_2(x) \cdot S(x) + R(x)$, при этом степень многочлена $R(x)$ меньше степени многочлена $P_2(x)$. Многочлен $R(x)$ называется остатком от деления многочлена $P_1(x)$ на многочлен $P_2(x)$, а $S(x)$ его неполным частным.

ОПР. Многочлен $D(x)$ называется наибольшим общим делителем многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, если 1) $D(x)$ общий делитель $P_1(x)$ и $P_2(x)$ , 2) для любого общего делителя $D_1(x)$ многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ выполнено условие: $D(x)$ нацело делится на $D_1(x)$.

Если $D(x)$ наибольший общий делитель многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, то этим же свойством обладает многочлен $\lambda \cdot D(x)$ при любом $\lambda \in R$, т.е. многочлен D(x)=НОД($P_1$, $P_2$) определен с точностью до множителя.

ОПР. Многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ взаимно просты, если $D(x) = 1$.

ТЕОРЕМА 1 (о наибольшем общем делителе многочленов).

Если $D(x)$ наибольший общий делитель многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$, то существуют многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$, для которых

$$D(x) = P_1(x) \cdot T_1(x) + P_2(x) \cdot T_2(x).$$

ДОК. Способ доказательства связан с построением $D(x)$ методом Евклида. Предположим, что степень многочлена $P_1(x)$ равна $n$, а степень многочлена $P_2(x)$ равна $m$, причем $n \geq m$. Разделим $P_1(x)$ на $P_2(x)$ с остатком, т.е. $P_1(x) = P_2(x) \cdot S_1(x) + R_1(x)$. Если $P_1(x)$ и $P_2(x)$ делятся нацело на $D(x)$, то $R_1(x)$ также делится на

$D(x)$ нацело. Разделим с остатком $P_2(x)$ на $R_1(x)$, т.е. $P_2(x) = R_1(x) \cdot S_2(x) + R_2(x)$, где степень $R_2(x)$ меньше степени $R_1(x)$. Продолжая процесс деления с остатком, получим последовательность многочленов $R_k(x)$, степени которых уменьшаются с увеличением $k$. Процесс деления заканчивается, если $R_{k+1}(x) = 0$. Тогда $D(x) = R_k(x)$, поскольку $R_k(x)$ является делителем $R_{k-1}(x)$, $R_{k-2}(x)$,..., $R_1(x)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ по построению. С другой стороны, любой делитель $D_1(x)$ многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$ делит $R_1(x)$, $R_2(x)$, ...и $R_k(x)$.

Из равенства $R_{k-2}(x) = R_{k-1}(x) \cdot S_k(x) + R_k(x)$ следует, что $D(x) = R_{k-2}(x) - R_{k-1}(x) \cdot S_k(x)$. Подставляя выражения для $R_{k-1}(x)$ и $R_{k-2}(x)$ из предыдущих равенств и приводя подобные слагаемые при $P_1(x)$ и $P_2(x)$, приходим к к равенству $D(x) = P_1(x) \cdot T_1(x) + P_2(x) \cdot T_2(x)$, для некоторых многочленов $T_1(x)$ и $T_2(x)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если знаменатель $Q(x)$ рациональной функции $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ разложен на множители $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$ с взаимно простыми многочленами $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, то дробь $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)},$$ где $T(x)$ многочлен,

$\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ и $\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ правильные дроби.

ДОК. Если многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ взаимно просты, то по теореме 1 найдутся многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$, для которых

$1 = Q_2(x)\cdot T_1(x) + Q_1(x)\cdot T_2(x)$. Умножая последнее равенство на $P(x)$ и деля на $Q(x) = Q_1(x)\cdot Q_2(x)$, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)\cdot T_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P(x)\cdot T_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Разделим многочлены $P(x)\cdot T_1(x)$ и $P(x)\cdot T_2(x)$ на $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ с остатком : $P(x)\cdot T_1(x) = Q_1(x)\cdot S_1(x) + P_1(x)$ и $P(x)\cdot T_2(x) = Q_2(x)\cdot S_2(x) + P_2(x)$. Тогда $T(x) = S_1(x) + S_2(x)$.

П.2. Основные факты из алгебры многочленов

ТЕОРЕМА 2 (основная теорема алгебры).

Всякий многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с комплексными коэффициентами имеет хотя бы один комплексный корень (без доказательства).

СЛЕДСТВИЕ. Если $x = z_1$ корень многочлена $P(x)$, то $P(x) = (x - z_1)P_1(x)$, где $P_1(x)$ многочлен степени на единицу меньшей, чем $P(x)$.

ДОК. Разделим $P(x)$ на $(x - z_1)$: $P(x) = (x - z_1)P_1(x) + R_1$.
Тогда $R_1 = P(z_1) = 0$.

ТЕОРЕМА 3 (о разложении многочлена на множители).

Если $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ многочлен с комплексными коэффициентами, то имеет место разложение

$$P(x) = a_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n).$$

Если коэффициенты многочлена действительные, то имеет место разложение

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)(x^2 + b_1 x + c_1)\cdot\ldots\cdot(x^2 + b_k x + c_k),$$

где $x_1, x_2,,, x_m$ действительные корни многочлена, коэффициенты $b_i$, $c_i$, $i = 1,2,\ldots,k$ действительные коэффициенты неразложимых квадратных трехчленов, $b_i^2 - 4c_i < 0$, $n = m + 2k$.

ДОК. Первое утверждение вытекает из многократного применения теоремы 2 и ее следствия к многочленам $P(x), P_1(x), P_2(x)$ и т.д.

Если $x=z$ корень многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами, то $x=\bar{z}$ также корень многочлена : $P(\bar{z})=\overline{P(z)}=0$.
Произведение $(x-z)(x-\bar{z})=x^2-(z+\bar{z})x+z\bar{z}=x^2+bx+c$,
где $b, c$ – действительные числа. Если $x=x_i$ действительный корень многочлена кратности $r_i$, а $x=z_j$ комплексный корень кратности $q_j$, то имеет место представление

$$P(x)=a_n(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{r_m}(x^2+b_1x+c_1)^{q_1}\cdot$$
$$\ldots\cdot(x^2+b_kx+c_k)^{q_k},$$

где $n=r_1+r_2+\ldots+r_k+2(q_1+q_2+\ldots+q_k)$.

ОПР. Рациональная дробь вида $\dfrac{A}{x-\alpha}$ называется простейшей дробью первого типа.

ОПР. Рациональная дробь вида $\dfrac{A}{(x-\alpha)^m}$ называется простейшей дробью второго типа.

ОПР. Рациональная дробь вида $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ называется простейшей дробью третьего типа.

ОПР. Рациональная дробь вида $\dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m}$ называется простейшей дробью четвертого типа.

## П.3. Разложение рациональных функций в сумму простейших дробей

ТЕОРЕМА 4 (о разложении рациональной функции в сумму простейших дробей).

**Всякая правильная рациональная дробь $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ представляется в виде суммы простейших дробей четырех типов.**

ДОК. Пусть многочлен $Q(x)$ (для определенности полагаем, что его коэффициент при старшей степени переменной равен 1) разложен на множители:

$$Q(x) = Q_1(x) \cdot \ldots \cdot Q_m(x) \cdot \tilde{Q}_1(x) \cdot \tilde{Q}_2(x) \cdot \ldots \cdot \tilde{Q}_k(x),$$

где $Q_i(x) = (x - x_i)^{r_i}$ и $\tilde{Q}_j(x) = (x^2 + b_j x + c_j)^{q_j}$ взаимно простые многочлены (теорема 3). Тогда по следствию из теоремы 1 имеем $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q)x)} = T(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{P_i(x)}{Q_i(x)} + \sum\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\tilde{P}_j(x)}{\tilde{Q}_j(x)}$. Многочлен $P_i(x)$ степени $\tilde{r}_i$, $\tilde{r}_i < r_i$, разложим по степеням $(x - x_i)$:

$P_i(x) = \sum\limits_{s=0}^{\tilde{r}_i} A_s (x - x_i)^s$. Тогда дробь $\dfrac{P_i(x)}{Q_i(x)} = \sum\limits_{s=0}^{m_i} \dfrac{A_s}{(x - x_i)^{r_i - s}}$ разложена в сумму простейших дробей первого и второго типов для всех $i = 1,2,\ldots,m$. Многочлен $\tilde{P}_j(x)$ степени $\tilde{q}_j < q_j$ разделим на $x^2 + b_j x + c_j$ с остатком: $\tilde{P}_j(x) = (x^2 + b_j x + c_j)P_j^1(x) + Ax + B$.

Тогда $\dfrac{\tilde{P}_j(x)}{\tilde{Q}_j(x)} = \dfrac{P_j^1(x)}{(x^2 + b_j x + c_j)^{q_j - 1}} + \dfrac{Ax + B}{\left(x^2 + b_j x + c_j\right)^{q_j}}$ и дробь представлена в виде суммы простейшей дроби четвертого типа и правильной дроби с многочленом числителя $P_j^1(x)$ степени на две единицы меньшей. Проделав подобное деление конечное число раз, разложим дробь $\dfrac{\tilde{P}_j(x)}{\tilde{Q}_j(x)}$ в сумму простейших дробей третьего и четвертого типов. Для разложения рациональной функции в сумму простейших дробей используется метод неопределенных коэффициентов.

ПРИМЕР 1. Разложить дробь $\dfrac{5x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 4}{(2x-1)(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)}$ в сумму простейших дробей.

РЕШЕНИЕ. Представим дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{5x^4+8x^3+4x^2+2x+4}{(2x-1)(x+1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{dx+e}{x^2+2x+2}.$$

Для нахождения коэффициентов $d$ и $e$ достаточно умножить правую и левую части равенства на $x^2+2x+2$ и подставить $x=-1+i$: $d(-1+i)+e=-2+2i \to d=2, e=0$.

Коэффициент $a$ можно определить, если умножить равенство на $(2x-1)$, а затем подставить $x=\frac{1}{2} \to a=1$. Если умножить равенство на $(x+1)^2$ и подставить $x=-1 \to c=-1$. Последний коэффициент $b$ получим, подставив в равенство $x=0$. Тогда $-2=-a+b+c$ и $b=0$. Исходная дробь имеет разложение:

$$\frac{5x^4+8x^3+4x^2+2x+4}{(2x-1)(x+1)^2(x^2+2x+2)}=\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2x}{x^2+2x+2}.$$

П.4. Интегрирование простейших дробей

Интегрирование простейших дробей первого и второго типов производится с помощью линейной замены в формулах 3), 4) таблицы первообразных. Для интегрирования дробей третьего типа необходимо выделить в числителе производную знаменателя:

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{A(2x+b)}{x^2+bx+c}\,dx+\frac{2B-Ab}{2}\int\frac{dx}{x^2+bx+c}=$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left(x^2+bx+c\right)+\frac{2B-Ab}{\sqrt{4c-b^2}}\,arctg\,\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C.$$

Интегрирование дробей четвертого типа происходит с помощью рекуррентной формулы. Пусть $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$. Тогда, интегрируя по частям, получим $I_n=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}-2na^2\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{n+1}}=$$

$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}$. Выражая значение $I_{n+1}$, получим:

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}I_n.$$

Общий вид дроби четвертого типа сводится к этой формуле выделением производной квадратного трехчлена знаменателя в числителе и выделением полного квадрата.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $t=x+1$:

$$\int\frac{(t-1)dt}{\left(t^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{\left(t^2+1\right)^2}-I_2=-\frac{1}{2(t^2+1)}-I_2,$$

$$I_2=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}I_1=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}arctgt.$$

Тогда $\int\frac{xdx}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=-\frac{t+1}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}arctgt=$

$$=-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+2\right)}-\frac{1}{2}arctg\left(x+1\right)+C.$$

ПРИМЕР 3. Вычислить интеграл $\int\frac{5x^4+8x^3+4x^2+2x+4}{(2x-1)(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx$.

РЕШЕНИЕ. Подынтегральная функция была уже разложена в сумму простейших дробей, Поэтому

$$\int\frac{5x^4+8x^3+4x^2+2x+4}{(2x-1)(x+1)^2\left(x^2+2x+2\right)}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{2x-1}-\int\frac{dx}{(x+1)^2}+\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+2\right)}dx-2\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x-1| + \frac{1}{x+1} + \ln\left(x^2+2x+2\right) - 2arctg(x+1) + C.$$

УПРАЖНЕНИЕ (Формула Остроградского для выделения рациональной части интеграла).

Интеграл от правильной рациональной дроби можно представить в виде: $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx$ (формула Остроградского),

где $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, а многочлен

$Q_2(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_m)(x^2+b_1x+c_1)\cdot\ldots\cdot(x^2+b_kx+c_k)$

имеет те же корни, но с кратностью единица. Многочлены $P_1(x)$, $P_2(x)$ задаются с неопределенными коэффициентами степени меньшей, чем соответствующие многочлены знаменателя .

Поиск неопределенных коэффициентов происходит после дифференцирования правой и левой частей формулы.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1 Теорема о представлении наибольшего общего делителя двух многочленов, разложение рациональной дроби в сумму двух дробей.

2. Теорема о представлении рациональной функции в сумму простейших дробей.

3. Простейшие функции и их интегрирование. Рекуррентная формула для интегрирования дробей четвертого типа.

## Лекция 16 . Интегралы, приводящиеся к интегралам от рациональных дробей

П.1. Интегрирование выражений вида $R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Сведение к рациональной функции производится заменой:

$$t^m=\frac{ax+b}{cx+d}\to x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a} \text{ и } dx=\frac{m(ad-bc)t^{m-1}}{\left(ct^m-a\right)^2}dt .$$

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $J=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$ .

РЕШЕНИЕ. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}=\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{x+1}$. Замена

$$t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\to x=\frac{t^3+1}{t^3-1},\ x+1=\frac{2t^3}{t^3-1},\ dx=-\frac{6t^2dt}{\left(t^3-1\right)^2}.$$

Тогда $J=\int\frac{-3dt}{t^3-1}=\int\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt=$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\sqrt{3}arctg\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C \text{, где } t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

П.2. Интегрирование дифференциальных биномов

Дифференциальным биномом называют выражения вида

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p dx .$$

1 случай: $p$ – целое число. Тогда при $m=\frac{r_1}{q_1}$ и $n=\frac{r_2}{q_2}$ замена $t=\sqrt[q_1q_2]{x}$ сводит интеграл к рациональному. Сделаем замену $z=x^n\to x=z^{\frac{1}{n}}\to dx=\frac{1}{n}z^{\frac{1}{n}-1}dz$. Тогда $x^m\left(a+bx^n\right)^p dx=$

$$=\frac{1}{n}z^q(a+bz)^p dz \text{, где } q=\frac{m+1}{n}-1.$$

2 случай: $q$ –целое число. Если $p=\frac{r}{s}$, то замена

$t=\sqrt[s]{a+bz}\to z=\frac{t^s-a}{b}$ преобразует дифференциальный бином к рациональной функции от $t$.

3 случай: $p+q$ - целое .Перепишем выражение дифференциального бинома в виде $\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}dz$. Тогда замена

$t=\sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}$ рационализирует интеграл. В середине девятнадцатого столетия русский математик Чебышев доказал, что никаких других случаев интегрирования дифференциального бинома не существует. Таким образом, интеграл от дифференциального бинома может быть вычислен в трех случаях: одно из чисел $p$, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n}+p$ целое.

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

РЕШЕНИЕ. $p=\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{4}$, $m=-\frac{1}{2}$. Поскольку $\frac{m+1}{n}=2$, это второй случай интегрируемости: $z=\sqrt[4]{x}\to x=z^4\to dx=4z^3dz$.

Тогда $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=4\int z\sqrt[3]{(1+z)}dz$. Сделаем замену

$t=\sqrt[3]{(1+z)}\to z=t^3-1\to dz=3t^2dt$ и $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$ =

$=12\int\left(t^3-1\right)t^3dt=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)=\frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7}-3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4}+C$.

П.3. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$

ПРИМЕР 3. Доказать, что

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $x = a \cdot sht \to t = \ln\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)$.

Тогда $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cdot cht$ и $dx = a \cdot chtdt$. Интеграл равен:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = a^2 \int ch^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1 + ch2t)dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}sh2t) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + sht\sqrt{1 + sh^2 t}\right) = \frac{a^2}{2}\left(\ln\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right) =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

ПРИМЕР 4. Доказать, что $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену: $x = a \cdot cht \to t = \ln\left|\dfrac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right|$.

Тогда $\sqrt{x^2 - a^2} = asht$ и $dx = asht$, а интеграл равен

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{ashtdt}{asht} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C.$$

В общем случае интегрирование выражения $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ производится с помощью подстановок Эйлера.

1 подстановка ( $a>0$ ) : $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x$, $x = \dfrac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}$,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b} \text{ и } dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t + b\right)^2}dt.$$

2 подстановка ( $c>0$) : $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$ , $x=\dfrac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2} \text{ и } dx=2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2}dt .$$

Если квадратный трехчлен имеет различные действительные корни: $ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu)$, то рационализация интеграла произойдет с помощью следующей замены.

3 подстановка: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\lambda)$, $x=\dfrac{\lambda t^2-a\mu}{t^2-a}$,

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(\lambda-\mu)t}{t^2-a} \text{ и } dx=\frac{2a(\mu-\lambda)t}{\left(t^2-a\right)^2} .$$

ПРИМЕР 5. Вычислить интеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ .

РЕШЕНИЕ. Воспользуемся третьей подстановкой Эйлера:

$\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$ . Тогда $x=a\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx=\dfrac{4atdt}{\left(t^2+1\right)^2}$ и

$\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{2at}{t^2+1}$ . Интеграл $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=8a^2\int\dfrac{t^2dt}{\left(t^2+1\right)^3}=$

$=8a^2(J_2-J_3)$ .Согласно рекуррентной формуле ( лекции 15), для $J_n$ имеем: $J_3=\dfrac{t}{4\left(t^2+1\right)^2}+\dfrac{3}{4}J_2$ и $J_2=\dfrac{t}{2(t^2+1)}+\dfrac{1}{2}arctgt$ .

Тогда

$$8a^2(J_2-J_3)=2a^2\left(J_2-\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}\right)=a^2\left(\frac{t}{t^2+1}-\frac{t}{\left(t^2+1\right)^2}+arctgt\right).$$

Подставляя вместо $t=\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a-x}=\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ и $t^2+1=\dfrac{2a}{a-x}$, получим $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+a^2 arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+C$. В таблицу интегралов эта формула попадает в другом виде:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

и это связано с тождеством на интервале $(-a;a)$:

$$2arctg\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\arcsin\frac{x}{a}+\frac{\pi}{2}.$$

П.4 . Интегрирование выражений вида $R(\sin 2x,\cos 2x)$

Интеграл приводится к рациональному после замены $t=tgx$, поскольку $\sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos 2x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

ПРИМЕР 6. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$.

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $t=tgx$.

Тогда $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|=\ln|tgx|+C$.

УПРАЖНЕНИЕ: Интеграл $\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P(x)$ - многочлен степени $n$, можно находить в виде

$$\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где $Q(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, $\lambda$ параметр (формула Остроградского).

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Интегрирование выражений вида $R(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}})$, пример.
2. Интегрирование дифференциальных биномов.
3. Интегрирование выражений вида $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$. Подстановки Эйлера.

Лекция 17. Интеграл Римана

П.1. Понятие интеграла Римана

ОПР. На отрезке [a;b] расположены точки $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$. Говорят, что они задают разбиение $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ отрезка [a;b] с параметром $|\tau| = \max\limits_k \Delta x_k$, где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

ОПР. Для любого набора $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ точек $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ выражение $S_\tau(f, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ называется интегральной суммой

ОПР. Интегралом Римана функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называют число, равное

$$J = \int_a^b f(x)dx = \lim_{|\tau| \to 0} S_\tau(f, \xi).$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta = \delta_\varepsilon : \forall \tau, |\tau| < \delta$ и $\forall \xi \to |S_\tau(f, \xi) - J| < \varepsilon$.

Функция, для которой существует интеграл Римана, называется интегрируемой. Существуют функции, не имеющие интеграла, например, на отрезке $[0,1]$ функция $f(x) = \begin{cases} 1, x \in Q \\ 0, x \in R/Q \end{cases}$ не имеет интеграла, поскольку существуют $\xi'$ и $\xi''$ с как угодно малым значением $|\Delta\tau|$, для которых $S_\tau(f, \xi') = 1$ и $S_\tau(f, \xi'') = 0$.

ТЕОРЕМА 1(необходимое условие существования интеграла). Если существует интеграл Римана $J = \int_a^b f(x)dx$, то функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

ДОК. Из условия существования интеграла следует ограниченность интегральных сумм Римана: $\exists M : |S_\tau(f, \xi)| < M$ для любых разбиений $\tau$ с достаточно малым $|\tau|$ и любым $\xi$. Фиксируем одно из таких разбиений $\tau$. Пусть функция $y = f(x)$ не ограничена на $[a;b]$. Тогда она не ограничена хотя бы на одном из отрезков разбиения $\tau$, например, на $[a;x_1]$. Изменяя только $\xi_1$, можно добиться как угодно больших значений интегральных сумм:

$$S_\tau(f,\xi)=f(\xi_1)\Delta x_1+\sum_{k=2}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k\ .$$

ОПР. Разбиение отрезка $\tau'=\{x_0',x_1',...,x_p'\}$ называется последующим по отношению к $\tau=\{x_0,x_1,...,x_n\}$, обозначение $\tau<\tau'$, если точки разбиения $\tau$ содержатся в множестве точек разбиения $\tau'$. Следующие два утверждения подготовят к доказательству достаточного условия интегрируемости функции.

ЛЕММА 1. Если $\tau$ разбиение отрезка $[a;b]$, для которого $|\tau|<\delta$, то для любого последующего разбиения $\tau'$:

$$|S_{\tau'}(f)-S_\tau(f)|\le\omega_f(\delta)(b-a).$$

ДОК. Выберем любой отрезок $[x_{k-1};x_k]$разбиения $\tau$. В разбиении $\tau'$ на этом отрезке могут появиться новые точки $x_{k-1,1}\ ,x_{k-1,2},...,x_{k-1,m}$ и новые $\xi_{k,1},\xi_{k,2},...\xi_{k,m}$. Тогда

$$\sigma_k=\sum_{j=1}^{m}f(\xi_{k,j})\Delta x_{k,j}-f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{j=1}^{m}\left(f(\xi_{k,j}-f(\xi_k)\right)\Delta x_{k,j}\ \text{ и}$$

$$|\sigma_k|\le\sum_{j=1}^{m}\left|f(\xi_{k,j})-f(\xi_k)\right|\Delta x_{k,j}\le\omega_f(\delta)\Delta x_k\ .$$

Окончательно

$$|S_{\tau'}(f)-S_\tau(f)|=\left|\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|\sigma_k|\le\sum_{k=1}^{n}\omega_f(\delta)\Delta x_k=\omega_f(\delta)(b-a).$$

ЛЕММА 2. Для двух произвольных разбиений $\tau'$ и $\tau''$ отрезка $[a;b]$, для которых $|\tau'|<\delta$ и $|\tau''|<\delta$, справедлива оценка

$$|S_{\tau'}(f)-S_{\tau''}(f)|\le 2\omega_f(\delta)(b-a).$$

ДОК. Рассмотрим разбиение $\tau$, в котором участвуют все точки из разбиения $\tau'$ и $\tau''$. Тогда $\tau'<\tau$, $\tau''<\tau$ и $|\tau|<\delta$. По лемме 1

$$|S_{\tau'}(f)-S_{\tau''}(f)|\le|S_{\tau'}(f)-S_\tau(f)|+|S_\tau(f)-S_{\tau''}(f)|\le 2\omega_f(\delta)(b-a)\ .$$

Интересно также следствие из доказанной оценки, получаемое предельным переходом при $|\Delta\tau'|\to 0$: $\left|\int_a^b f(x)dx - S_\tau(f)\right| \le \omega_f(\delta)(b-a)$

для любого $\tau : |\tau| < \delta$ и любого $\xi$. Следующая теорема выражает достаточное условие интегрируемости.

ТЕОРЕМА 2. Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, интегрируема на $[a;b]$.

ДОК. Используя критерий Коши достаточно доказать, что $\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta = \delta_\varepsilon : \forall\tau', \tau'' : |\tau'| < \delta, |\tau''| < \delta \to |S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| < \varepsilon$.

Действительно, из условия непрерывности функции $y = f(x)$ следует, что существует $\delta_\varepsilon > 0$, для которого $\omega_f(\delta) < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Тогда, с учетом леммы 2, $\forall\tau', \tau'' : |\tau'| < \delta, |\tau''| < \delta$

$$|S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| \le 2\omega_f(\delta)(b-a) < \varepsilon.$$

П.2. Свойства определенного интеграла

1. Линейность.

Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ и

$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ для любого $k \in R$.

2. Интегрирование неравенств.

Если функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Действительно, $\forall\tau \to S_\tau(f) \le S_\tau(g)$ и знак неравенства не меняется после предельного перехода. Если неотрицательная непрерывная функция хотя бы в одной точке отрезка положительна, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

3. Оценка определенного интеграла.

Если $m = \inf\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ и $M = \sup\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Действительно, $g(x) = m \le f(x),\ \forall x \in [a;b]$ и по свойству 1 $\to$

$m(b-a) = \int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx$ .Аналогично, $f(x) \le g(x) = M, \forall x \in [a;b]$

и по свойству 1 $\to \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx = M(b-a)$.

4. Теорема о среднем для интеграла.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует $c \in [a;b]$, для которого $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Действительно, по свойству В $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \in [m;M]$, но по теореме об области значений непрерывной функции $E_f = [m,M]$, т.е. функция принимает все значения на отрезке $[m;M]$ в том числе и число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

5. Оценка для модуля интеграла.

Если интегрируемы функции $y = f(x)$ и $y = |f(x)|$ на отрезке $[a;b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ . Действительно, на отрезке $[a;b]$ справедливо неравенство $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Тогда по свойству 1

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

6. Аддитивность интеграла по множеству.
Если функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$, то она интегрируема на их объединении $[a;b] = [a;c] \cup [c;b]$.
Действительно, любое разбиение $\tau : |\tau| < \delta$ отрезка $[a;b]$ порождает разбиения $\tau', \tau'' : |\tau'| < \delta, |\tau''| < \delta$ отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$ соответственно с добавленной к ним точкой $c$.
Тогда $S_\tau(f) = S_{\tau'}(f) + S_{\tau''}(f)$ и, переходя к пределу при $|\tau| \to 0$,

получим $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

П.3. Интегрирование разрывных функций

ЛЕММА 3. Если функция $h(x) = \begin{cases} h(a), x = a, \\ 0, x \in (a;b), \\ h(b), x = b. \end{cases}$ то $\int_a^b h(x)dx = 0$.

ДОК. Любая интегральная сумма $S_\tau(h)$, соответствующая разбиению $\tau$, имеет вид $S_\tau(h) = h(\xi_0)\Delta x_0 + h(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1}$, где

$$h(\xi_0) = \begin{cases} h(a), \xi_0 = a \\ 0, \ \xi_0 \ne a \end{cases} \text{ и } h(\xi_{n-1}) = \begin{cases} h(b), \xi_{n-1} = b \\ 0, \ \xi_{n-1} \ne b \end{cases}.$$

Поэтому $\lim\limits_{|\Delta\tau| \to 0} S_\tau(h) = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, функция $y = f_1(x)$ определена на $[a;b]$ и совпадает с $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx$.

ДОК. Функция $h(x)=f_1(x)-f(x)$ удовлетворяет условию леммы 1 и $f_1(x)=f(x)+h(x)$. Тогда по свойству 1 следует утверждение леммы.

ОПР. Функция $y=f(x)$ называется кусочно – непрерывной на отрезке $[a;b]$, если существует разбиение $\tau=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ отрезка $[a;b]$, для которого функция непрерывна на каждом интервале $(x_k;x_{k+1})$ и имеет разрывы первого рода в точках $x_k$.

ТЕОРЕМА 3. Всякая кусочно-непрерывная функция на отрезке $[a;b]$ интегрируема.

ДОК. По лемме 2 функция интегрируема на каждом отрезке $[x_k;x_{k+1}]$. Интегрируемость функции на $[a;b]$ следует из свойства 6 и конечности числа точек разрыва.

ТЕОРЕМА 4. Если функция $y=f(x)\geq 0$ кусочно- непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $\int\limits_a^b f(x)dx=0$, то $f(x)\neq 0$ в конечном числе точек.

ДОК. Если $f(\xi)>0$ для $\xi\in(x_k;x_{k+1})$, то $\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx>0$ и

$\int\limits_a^b f(x)dx=\sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx>0$, поскольку хотя бы одно из этих слагаемых положительно, а другие неотрицательны. Таким образом, $f(x)\equiv 0,\ x\in(x_k;x_{k+1})$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Понятие интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости на отрезке.
2. Достаточное условие интегрируемости на отрезке (леммы).
3. Свойства линейности интеграла, интегрирование неравенства .
4. Оценка значения интеграла Римана, теорема о среднем для интеграла.
5. Оценка модуля интеграла, свойство аддитивности интеграла по множеству.
6. Интегрирование разрывных функций.

## Лекция 18 . Вычисление определенного интеграла

### П.1. Интеграл как функция верхнего предела

Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим функцию $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, определенную на отрезке $[a;b]$. В силу оценки $\left|F(x')-F(x'')\right|=\left|\int\limits_{x'}^{x''} f(t)dt\right|\le \sup\limits_{x\in[a;b]}\left|f(x)\right|\cdot(x''-x')$, функция $F(x)$ непрерывна на отрезке.

ТЕОРЕМА 1. Производная интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции.

ДОК. Вычислим производную функции $F(x)$ в точке $c\in(a;b)$. Для этого представим ее приращение в виде:

$$F(x)-F(c)=f(c)(x-c)+\int\limits_c^x(f(t)-f(c))dt=f(c)(x-c)+\varphi(x,c)\cdot(x-c),$$

где $\varphi(x,c)=\dfrac{1}{x-c}\int\limits_c^x(f(t)-f(c))dt$. Тогда из теоремы о среднем для интеграла и непрерывности функции $f(x)$ следует, что $\lim\limits_{x\to c}\varphi(x,c)=\lim\limits_{x\to c}\left(f(\tilde{x})-f(c)\right)=0$, где $\tilde{x}\in(c;x)$. Таким образом, функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема в точке $x=c$ и ее производная равна $f(c)$. Если $c=a$ или $c=b$, то обеспечивается правосторонняя или левосторонняя производная функции $F(x)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $f(x)$ кусочно – непрерывна на $[a;b]$, то $F(x)$ имеет производную равную $f(x)$ в точках непрерывности, а точках разрыва $x_k$ функция $F(x)$ производной не имеет, но остается непрерывной ( разрыв производной первого рода).

Пусть $f(x)$ кусочно – непрерывная функция на $[a;b]$. Любая непрерывная на $[a;b]$ функция $G(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, если в точках ее непрерывности $G'(x) = f(x)$. Если $G_1(x)$ и $G_2(x)$ две первообразные функции $f(x)$, то $G_1(x) - G_2(x) \equiv C$ на каждом интервале непрерывности функции $f(x)$. В силу непрерывности функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$ константа $C$ сохраняется единой на всех интервалах, т.е. $G_1(x) = G_2(x) + C$. Согласно теореме 1 функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ даже, если она кусочно - непрерывна.

ТЕОРЕМА 2 (формула Ньютона-Лейбница). Пусть $f(x)$ кусочно – непрерывная функция на $[a;b]$ и $G(x)$ любая ее первообразная. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$.

ДОК. Функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt = G(x) + C$. Подставляя $x = a$, получим $0 = G(a) + C$, т.е. $C = -G(a)$. Подставляя $x = b$, получим $\int\limits_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$.

**П.2. Интегрирование по частям в определенном интеграле**

ТЕОРЕМА 3 (формула интегрирования по частям).

Если $u(x), v(x)$ кусочно-гладкие (имеющие кусочно-непрерывную производную) функции на отрезке $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)dx.$$

ДОК. $\int\limits_a^b (uv' + vu')dx = \int\limits_a^b d(u\cdot v) = u\cdot v\Big|_a^b$.

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx$, $m = 0,1,2,...$

РЕШЕНИЕ. $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx =$

$$= -\int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d\cos x = -\sin^{m-1} x \cdot \cos x\Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx =$$

$$= (m+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cdot (1-\sin^2 x)dx = (m+1)J_{m-2} - (m+1)J_m.$$

Тогда $J_m = \dfrac{m+1}{m} J_{m-2}$. В частности $J_0 = \dfrac{\pi}{2}$ и для любого четного

$m = 2n \to J_{2n} = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$. $J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1$, а для нечетного

$m = 2n+1 \to J_{2n+1} = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

П.3. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(u)du$ непрерывной на $[a;b]$ функции

$y = f(u)$ и функция $u = u(t)$, определенная на отрезке $[\alpha;\beta]$, имеет непрерывную производную в каждой точке отрезка и $u(\alpha) = a$, $u(\beta) = b$.

ТЕОРЕМА 4. Если функция $u = u(t): [\alpha;\beta] \to [A;B] \supset [a;b]$ и функция $y = f(u)$ непрерывна на $[A;B]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(u)du = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

ДОК. Пусть $F(u)$ первообразная функции $y = f(u)$ на $[A;B]$. Тогда по формуле замены переменной для неопределенного интеграла, $F(u(t))$ является первообразной функции $f(u(t)) \cdot u'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$ и $F(u(t)) = G(t) + C$, где $G(t)$ – произвольная первообразная этой функции. Тогда по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = G(\beta) - G(\alpha) =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt.$$

ПРИМЕР 2 . Доказать, что $\int_0^b f(x)dx = \int_0^b f(b-x)dx$ .

РЕШЕНИЕ. Сделаем замену $u = b - x,\ dx = -du$ . Тогда

$$\int_0^b f(b-x)dx = -\int_b^0 f(u)du = \int_0^b f(x)dx.$$

П. 4. Теоремы о среднем для определенного интеграла

ТЕОРЕМА 5. Пусть функции $f(x), \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и $\varphi(x) \geq 0$ для $x \in [a,b]$. Тогда существует точка $c \in [a,b]$, для которой $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(c) \cdot \int_a^b \varphi(x)dx$.

ДОК. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что область ее значений на отрезке $[a,b]$ есть отрезок $[m,M]$. Тогда с учетом положительности значений функции $\varphi(x)$ справедливо неравенство: $m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x)$ . После его интегрирования на отрезке $[a,b]$ получим: $m\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq M\int_a^b \varphi(x)dx$ . Тогда величина $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \cdot \left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)^{-1} \in [m;M]$ и существует число $c \in [a,b]$, для которого $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx \cdot \left(\int_a^b \varphi(x)dx\right)^{-1} = f(c)$.

При $\varphi(x) \equiv 1$ получим знакомый результат:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a).$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть функции $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, функция $\varphi(x)\ge 0$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет производную во внутренних точках, причем $\varphi'(x)\le 0$. Тогда существует точка $c\in[a,b]$, для которой $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a)\cdot\int_a^b f(x)dx$.

ДОК. Рассмотрим функцию $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, являющуюся первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Применим к интегралу $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ формулу интегрирования по частям:

$$\int_a^b \varphi(x)dF(x) = \varphi(x)\cdot F(x)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x)F(x)dx =$$

$$=\varphi(b)\int_a^b f(x(dx + \int_a^b(-\varphi'(x))F(x)dx.$$

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$, поэтому существуют числа $m$ и $M$, для которых значения $F(x)\in[m;M]$ для $x\in[a,b]$.
С учетом $\varphi(b)\ge 0$ и $(-\varphi'(x))\ge 0$, имеем:

$$m\left(\varphi(b)+\int_a^b(-\varphi'(x)dx\right)\le\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\le M\left(\varphi(b)+\int_a^b(-\varphi'(x)dx\right)$$

или $m\varphi(a)\le\int_a^b f(x)\varphi(x)dx\le M\varphi(a)$. Тогда существует $c\in[a,b]$, для которой

$$\frac{1}{\varphi(a)}\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = F(c) = \int_a^c f(x)dx.$$

Если функция $\varphi(x)$ неотрицательна и не убывает на отрезке $[a,b]$ $(\varphi'(x) \geq 0)$, то справедливо равенство:

$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \varphi(b) \cdot \int_c^b f(x)dx$ для некоторого $c \in [a,b]$.

УПРАЖНЕНИЯ: 1. Докажите, что

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt\right) = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

2. Докажите, что для периодической функции $f(x)$ с периодом $T$ интеграл на отрезке длины периода не зависит от его начала:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \ \forall a \in R.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о дифференцировании интеграла по верхнему пределу.
2. Формула Ньютона – Лейбница.
3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле. Пример.
4. Формула замены переменной в определенном интеграле.
5. Теоремы о среднем для определенного интеграла.

Лекция 19 . Приложение определенного интеграла

П.1. ПЛОЩАДЬ криволинейной трапеции

ОПР. Площадью фигуры Ф называют единственное число $S_{\Phi}$, которое не больше, чем площадь $S_{\Phi'}$ объемлющей элементарной фигуры $\Phi'$, например, составленной из прямоугольников, и не меньше, чем площадь $S_{\Phi''}$ любой объемлемой элементарной фигуры $\Phi''$. Поскольку $\sup\limits_{\Phi''} S_{\Phi''} \le \inf\limits_{\Phi'} S_{\Phi'}$, следует считать, что площадь имеет та фигура, для которой $\inf\limits_{\Phi'} S_{\Phi'} = \sup\limits_{\Phi''} S_{\Phi''} = S_{\Phi}$.

ОПР. Криволинейной трапецией называют фигуру на плоскости, ограниченную осью OX, прямыми с уравнениями $x = a$ и $x = b$ и графиком функции $f(x) \ge 0$, определенной на отрезке $[a;b]$.

Пусть $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ разбиение отрезка $[a;b]$. В качестве объемлющей фигуры $\Phi'$ для криволинейной трапеции выбираем криволинейную трапецию, построенную для кусочно-постоянной функции

$$f'(x) = \begin{cases} \beta_k = \max\limits_{x \in [x_{k-1};x_k]} f(x), x \in [x_{k-1};x_k], \\ k = 1,2,...,n \end{cases}.$$

Аналогично, объемлемой фигурой $\Phi''$ для криволинейной трапеции будем считать криволинейную трапецию, построенную для кусочно-постоянной функции

$$f''(x) = \begin{cases} \alpha_k = \min\limits_{x \in [x_{k-1};x_k]} f(x), x \in [x_{k-1};x_k], \\ k = 1,2,...,n \end{cases}.$$

Тогда $S_{\Phi'} = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \Delta x_k$ и $S_{\Phi''} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta x_k$.

Выражения для $S_{\Phi'}$ и $S_{\Phi''}$ являются интегральными суммами (верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу). Если разбиение $\tau' > \tau$, то сумма $S_{\Phi'}$ убывает, а $S_{\Phi''}$ возрастает. Если функция $f(x)$ интегрируема, то $\inf\limits_{\Phi'} S_{\Phi'} = \sup\limits_{\Phi''} S_{\Phi''} = S_{\Phi} = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Если $f(x) \le 0$ на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции равна $S_\Phi = -\int\limits_a^b f(x)dx$. Если функция меняет знак на отрезке $[a;b]$, то на отрезках, где $f(x) \ge 0$, интеграл берется со знаком +, а на отрезках, где $f(x) \le 0$, интеграл берется со знаком минус.

ОПР. Элементарной областью $\Phi_x$ на плоскости называют фигуру, ограниченную прямыми с уравнениями $x = a$ и $x = b$, графиками непрерывных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, $f(x) \ge g(x)$, $x \in [a;b]$.

ОПР. Элементарной областью $\Phi_y$ на плоскости называют фигуру, ограниченную прямыми с уравнениями $y = c$ и $y = d$, графиками непрерывных функций $x = \varphi(y)$ и $x = \psi(y)$, $\psi(y) \ge \varphi(y)$, $y \in [c;d]$.

ФОРМУЛЫ вычисления площади фигур $\Phi_x$ и $\Phi_y$:

$$S_x = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx \quad \text{и} \quad S_y = \int\limits_c^d (\psi(y) - \varphi(y))dy.$$

ДОК. Если $\Phi_f$ и $\Phi_g$ криволинейные трапеции, соответствующие функциям $y = f(x)$ и $y = g(x)$ на отрезке $[a;b]$ и $f(x) \ge g(x) \ge 0$, $x \in [a;b]$, то $\Phi_f = \Phi_g \cup \Phi_x$. Тогда $S_{\Phi_f} = S_{\Phi_g} + S_x$,

$$S_x = S_{\Phi_f} - S_{\Phi_g} = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Если $f(x) \ge g(x)$, $x \in [a;b]$, но $g(x) < 0$ на некоторых промежутках, то существует число $A > 0$, для которого для функций $f'(x) = f(x) + A$ и $g'(x) = g(x) + A$ выполняется условие $f'(x) \ge g'(x) \ge 0$, $x \in [a;b]$. Площади элементарных фигур, построенных для функций $f(x), g(x)$ и $f'(x), g'(x)$ на отрезке $[a;b]$ равны, т.е.

$$S_x = S'_x = \int\limits_a^b ((f(x) + A) - (g(x) + A))dx = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Формула для площади фигуры $\Phi_y$ доказывается аналогично. Площадь имеют фигуры, являющиеся конечным объединением элементарных областей типа $\Phi_x$ и $\Phi_y$.

ПРИМЕР 1. Площадь сектора окружности радиуса $r$ с углом $\theta$.
РЕШЕНИЕ:

$$S_r(\theta)=\int_0^{r\cos\theta} x\,tg\theta dx+\int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}tg\theta\Big|_0^{r\cos\theta}+r^2\int_0^{\theta}\sin^2\varphi d\varphi=$$

$$=\frac{r^2\sin\theta\cos\theta}{2}+\frac{r^2}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\theta}=\frac{r^2}{2}\theta.$$

Если граница криволинейной трапеции задается параметрически,
$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \end{cases}$ $t\in[\alpha;\beta], x(t)$ возрастающая функция, $y(t)\geq 0$,

$x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$. Тогда $S_x=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$. Действительно,

$$S_x=\int_a^b y(x)dx=\int_\alpha^\beta y(x(t))x'(t)dt=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$

П.2. Вычисление площади в полярной системе координат

ОПР. Элементарной областью $\Phi_\varphi$ на плоскости называют фигуру, ограниченную лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, кривой $r=r(\varphi), \varphi\in[\varphi_1;\varphi_2]$.

ФОРМУЛА вычисления площади в полярной системе координат. Если функция $r=r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\varphi_1;\varphi_2]$, то площадь области $\Phi_\varphi$ вычисляется по формуле:

$$S_\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$

ДОК. Пусть $\tau=(\psi_0,\psi_1,...,\psi_n)$ разбиение отрезка $[\varphi_1;\varphi_2]$. Пусть $\sigma_k=\min\limits_{\varphi\in[\psi_{k-1};\psi_k]} r(\varphi)$ и $\rho_k=\max\limits_{\varphi\in[\psi_{k-1};\psi_k]} r(\varphi)$. Тогда объемлющей фигурой для $\Phi_\varphi$ является элементарная область $\Phi'_\varphi$, ограниченная кусочно-постоянной функцией и лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, имеющая площадь $S'_\varphi=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k^2\Delta\psi_k$. Объемлемой фигурой для $\Phi_\varphi$ является элементарная область $\Phi''_\varphi$, ограниченная кусочно-постоянной функцией $r=r''(\varphi)=\begin{cases}\sigma_k,\varphi\in[\psi_{k-1};\psi_k],\\ k=1,2,...,n\end{cases}$, лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, имеющая площадь $S''_\varphi=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2\Delta\psi_k$. Числа $S'_\varphi$ и $S''_\varphi$ являются интегральными суммами функции $\dfrac{1}{2}r^2(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_1;\varphi_2]$ (верхняя и нижняя интегральные суммы Дарбу, см. Пример 1). При измельчении разбиения: $\tau'>\tau$ сумма $S'_\varphi$ убывает, а $S''_\varphi$ возрастает. Если функция $\dfrac{1}{2}r^2(\varphi)$ интегрируема на отрезке $[\varphi_1;\varphi_2]$, то $\inf\limits_{\Phi'_\varphi}S'_\varphi=\sup\limits_{\Phi''_\varphi}S''_\varphi=S_\varphi=\dfrac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}r^2(\varphi)d\varphi$.

ПРИМЕР 2. Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\sin m\varphi$ ( m – лепестковая роза).

РЕШЕНИЕ. $\varphi_1=0,\varphi_2=\dfrac{\pi}{m}$.

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/m}a^2\sin^2 m\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2m}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\psi d\psi=\frac{a^2\pi}{4m}.$$

П.3. ДЛИНА дуги кривой

ОПР. Дуга кривой $\vartheta$ разбивается точками $A_k$, $k=1,2,...,n$ на $n$ сегментов, концы которых соединены отрезками $[A_{k-1};A_k]$, образующими ломаную линию $\vartheta_\tau$. Ее длина $L_\tau$ зависит от дуги кривой и разбиения $\tau$ кривой $\vartheta$ точками $A_k$, $k=1,2,...,n$.

ОПР. Длиной кривой $\vartheta$ называют число, равное $L_\vartheta = \lim\limits_{|\tau|\to 0} L_\tau$, если оно существует.

Рассмотрим дугу графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Каждому разбиению $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ отрезка $[a;b]$ соответствует ломаная $\vartheta_\tau$, состоящая из объединения отрезков с началом в точках $A_{k-1}(x_{k-1}; f(x_{k-1}))$ и концом в точке $A_k(x_k; f(x_k))$, $k = 1,2,...,n$.

Длина $L_\tau$ ломанной $\vartheta_\tau$ равна $L_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_k + \Delta^2 f_k}$, где

$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Если функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a;b]$, то по теореме Лагранжа существует набор $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ точек $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, для которых $\Delta f_k = f'(\xi_k)\Delta x_k$. Тогда длина ломанной $L_\tau = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\Delta^2 x_k + (f'(\xi_k))^2 \Delta^2 x_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$

является интегральной суммой непрерывной функции $\varphi(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ на отрезке $[a;b]$ и поэтому

$$L_\vartheta = \lim_{|\tau|\to 0} L_\tau = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

**ФОРМУЛА** вычисления длины кривой, заданной параметрически. Если дуга кривой задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha; \beta]$, в которых функции $x(t)$, $y(t)$ имеют непрерывные производные, то

$$L_\vartheta = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Для ее доказательства заметим, что разбиение $\tau = \{\alpha = t_0, t_1, ..., t_n\}$ порождает разбиение дуги кривой точками $A_k(x(t_k); y(t_k))$ и длина $L_\tau$ ломаной равна $L_\tau = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$, где

$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$, $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$.

По теореме о среднем для производной , существует наборы $\xi' = \{\xi_1', \xi_2', ..., \xi_n'\}$ и $\xi'' = \{\xi_1'', \xi_2'', ..., \xi_n''\}$ точек на отрезках $[t_{k-1}; t_k]$, для которых $\Delta x_k = x'(\xi_k') \cdot \Delta t_k$ и $\Delta y_k = y'(\xi_k'') \cdot \Delta t_k$. Тогда длина ломаной равна $L_\tau = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_k'))^2 + (y'(\xi_k''))^2}\,\Delta t_k$. Полученное выражение по форме отличается от интегральной суммы функции $\varphi(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$, поскольку наборы $\xi'$ и $\xi''$, вообще говоря, различные.

Пусть $S_\tau(\varphi) = = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2}\,\Delta t_k$ интегральная сумма функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha; \beta]$ соответствующая разбиению $\tau = \{\alpha = t_0, t_1, ..., t_n \}$. Тогда

$$\left|\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt - L_\tau\right| \le \left|\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt - S_\tau(\varphi)\right| + |S_\tau(\varphi) - L_\tau|.$$

Из непрерывности функции $\varphi(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_1 : \forall \tau : |\Delta\tau| < \delta_1 \to \left|\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt - S_\tau(\varphi)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вторая часть оценки использует « неравенство треугольника»: модуль разности длин двух сторон треугольника меньше длины третьей стороны:

$$|S_\tau(\varphi) - L_\tau| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k))^2} - \sqrt{(x'(\xi_k'))^2 + (y'(\xi_k''))^2}\right|\Delta t_k \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x'(\xi_k) - x'(\xi_k'))^2 + (y'(\xi_k) - y'(\xi_k''))^2}\,\Delta t_k \le$$

$$\le \sqrt{\omega_x^2(\delta_1) + \omega_y^2(\delta_1)} \cdot (\beta - \alpha).$$

В предположении непрерывности производных $x'(t)$ и $y'(t)$ колебания $\omega_{x'}(\delta)$ и $\omega_{y'}(\delta)$ бесконечно малые функции в точке $\delta = 0$, поэтому существует $\delta_2 > 0$ такое, что

$\sqrt{\omega_{x'}^2(\delta_1) + \omega_{y'}^2(\delta_1)} < \dfrac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)}$ для любых $\delta_1 < \delta_2$. Тогда для разбиений $\tau : |\tau| < \delta_2 \to \left| \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)dt - L_\tau \right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ФОРМУЛА вычисления длины дуги, заданной в полярной системе. Если $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$- уравнение кривой в полярной системе координат, то $\begin{cases} x = r\cos\varphi = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi = r(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$

Тогда $x'_\varphi = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$ и $y'_\varphi = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$.

Вычисляя $(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2$, получим искомую формулу:

$$L_9 = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi .$$

ПРИМЕР 3 (длина цепной линии).

Вычислить длину дуги, заданной уравнением $y = chx,\ x \in [0; b]$.

РЕШЕНИЕ: $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + sh^2 x} = chx \to$

$$L = \int\limits_0^b chxdx = shx\Big|_0^b = shb .$$

УПРАЖНЕНИЕ. Область ограничена графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x), x \in [a, a+h]$ и прямой, проходящей через точки $A(a; f(a))$ и $B(a+h; f(a+h))$ (сегмент криволинейной трапеции). Доказать, что ее площадь $S(h) = o(h^2)$.

РЕШЕНИЕ. $|f(x) - f(a) - f'(a)h| = |f'(c)h - f'(a)h| \le \omega_{f'}(h) \cdot h$, где $c \in (a; a+h)$. Тогда

$$S(h)=\int_a^{a+h}|f(x)-f(a)-f'(a)h|dx \le \omega_{f'}(h)\cdot h\int_a^{a+h}dx=\omega_{f'}(h)\cdot h^2=o(h^2),$$

где $\omega_{f'}(h)$ функция колебания для производной $f'(x)$ на отрезке $[a,a+h]$. Из предположения о непрерывности $f'(x)$ следует, что $\omega_{f'}(h)=o(1)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Доказательство формулы для вычисления площади криволинейной трапеции.
2. Доказательство формулы для вычисления площади фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Вычисление площади фигуры, граница которой задана уравнением в полярной системе координат.
3. Длина дуги кривой заданной графиком функции, параметрическими уравнениями, уравнением кривой в полярной системе.

## Лекция 20. Приложение интеграла (продолжение)

### П.1. ОБЪЕМ тела по известным площадям сечений

Предположим, что область $G$ в пространстве такова, что ее сечение $D_x$ плоскостью, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку на этой оси с абсциссой $x$, имеет площадь $S_D = S(x)$ для каждого $x \in [a;b]$. Таким образом, на отрезке $[a;b]$ может быть задана функция $S:\ x \to S(x)$ и наша задача по этой функции уметь вычислять объем $G$. Условием интегрируемости функции $S(x)$ может служить, например, требование кусочно гладкости поверхности, ограничивающей $G$.

ОПР. Прямым цилиндром, основанием которого является замкнутая область $D$ на плоскости $P$ с границей $\partial D$, называют тело $C_D$ в пространстве, ограниченное цилиндрической поверхностью с направляющей $\partial D$ и образующей, перпендикулярной плоскости $P$ и двумя плоскостями $P_1$ и $P_2$, параллельными $P$. Расстояние $h$ между плоскостями $P_1$ и $P_2$ называют высотой цилиндра. Если граница $\partial D$ цилиндра задается уравнением с кусочно-гладкими функциями, то область $D$ имеет площадь $S_D$.

ОПР. Объемом прямого цилиндра называют число $V = h \cdot S_D$, где $S_D$ - площадь $D$, а $h$ - его высота.

Каждому разбиению $\tau = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ отрезка $[a;b]$ и набору $\xi = \{\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\}$ соответствует цилиндрическое тело $G_\tau$, являющееся объединением прямых цилиндров с основаниями $D_{\xi_k}$ и высотами $\Delta x_k$. Тело $G_\tau$ называют ступенчатым, соответствующим разбиению $\tau$.

ОПР. Объемом тела $G$ в пространстве называют число $V_G$, равное пределу объемов ступенчатых тел $G_\tau$ при неограниченном измельчении разбиения, т.е. $V_G = \lim\limits_{|\tau| \to 0} V_{G_\tau}$.

ФОРМУЛА вычисления объема по сечениям. Если функция площадей сечений интегрируема на отрезке $[a;b]$, то $V_G = \int_a^b S(x)dx$.

ДОК. Объем ступенчатого тела $G_\tau$ равен $V_{G_\tau} = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta t_k$ и представляет собой интегральную сумму функции $S(x)$ на отрезке $[a;b]$. Тогда $V_G = \lim_{|\tau|\to 0} V_{G_\tau} = \lim_{|\tau|\to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta t_k = \int_a^b S(x)dx$.

ФОРМУЛА объема тела вращения. Если криволинейная трапеция, ограниченная осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком функции $f(x) \geq 0$, вращается вокруг оси OX, то в пространстве образуется тело $G_b$, называемое телом вращения. Сечения тела $G_b$ плоскостями, перпендикулярными оси OX, являются круги радиуса $r = f(x)$, поэтому $S(x) = \pi f^2(x)$. Тогда $V_{G_b} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

ПРИМЕР 1 (Объем шара радиуса $R$).
РЕШЕНИЕ. Криволинейная трапеция ограничена окружностью: $x^2 + y^2 = R^2$ на отрезке $[-R;R]$:

$$V_R = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

П.2. ПЛОЩАДЬ поверхности вращения
ПРИМЕР 2. (площадь боковой поверхности конуса и усеченного конуса): $S_{бок} = \pi RL$ и $S_{бок.усеч.} = \pi(r + R)L$, где $R$, $r$ радиус верхнего и нижнего оснований, $L$ длина образующей.
РЕШЕНИЕ. Для доказательства первой формулы в окружность основания конуса вписываются многоугольники $D_n = A_1 A_2 ... A_n$, содержащие центр окружности, а в конус с вершиной $S$ – пирамиды $K_n = SA_1 A_2 ... A_n$, причем $|\tau| = \max_k |A_{k-1}A_k|$. Боковая поверхность пирамиды $K_n$ равна

$$S_{K_n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} h_k \cdot |A_{k-1}A_k| = \frac{1}{2}L \cdot P_n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(h_k - L)\cdot|A_{k-1}A_k|,$$

где $P_n$ периметр вписанного многоугольника, $h_k$ высоты боковых граней.

ОПР. Площадью боковой поверхности конуса называют число, равное $S_{бок} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{K_n}$.

При $n \to \infty$ $|\tau| \to 0$, $P_n \to 2\pi R$, $h_k - L \to 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_{K_n} = \pi RL$. Если конус усеченный, то его можно достроить до прямого кругового конуса с образующей $L_1 = \dfrac{r}{\sin\alpha} = \dfrac{rL}{R-r}$.

Тогда $S_{бок.усеч.} = \pi R(L_1 + L) - \pi r L_1 = \pi RL + \pi(R-r)L_1 =$

$= \pi RL + \dfrac{\pi(R-r)rL}{R-r} = \pi(R+r)L$. Пусть кривая на плоскости задана параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \ge 0 \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$ с непрерывно дифференцируемыми функциями $x(t), y(t)$. Каждому разбиению $\tau = \{\alpha = t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1} = \beta\}$ отрезка $[\alpha;\beta]$ соответствует ломаная, вписанная в дугу кривой, соединяющая отрезками точки $A_k(x(t_k); y(t_k))$, $k = 1,2,...,n$. Каждая трапеция, ограниченная осью OX, прямыми $x = x(t_{k-1})$ и $x = x(t_k)$ и отрезком $[A_{k-1}, A_k]$, при вращении вокруг оси OX описывает усеченный конус. Объединение этих конусов назовем ступенчатым коническим телом, соответствующим разбиению $\tau$. Площадь его боковой поверхности равна сумме площадей боковых поверхностей усеченных конусов:

$$S_{\tau,вращ.} = \pi\sum_{k=1}^{n}\left(y(t_{k-1}) + y(t_k)\right)\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2},$$

где $\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1})$, $\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1})$.

ОПР. Площадью поверхности вращения называют число $S_{вращ.} = \lim\limits_{|\tau|\to 0} S_{\tau,вращ.}$, если оно существует.

ФОРМУЛА для вычисления площади поверхности вращения:

$$S_{вращ.} = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt .$$

ДОК. По теореме о среднем Лагранжа существуют наборы $\xi' = \{\xi_1', \xi_2', ..., \xi_n'\}$ и $\xi'' = \{\xi_1'', \xi_2'', ..., \xi_n''\}$ точек на отрезках $[t_{k-1}; t_k]$, для которых $\Delta x_k = x'(\xi_k')\cdot\Delta t_k$ и $\Delta y_k = y'(\xi_k'')\cdot\Delta t_k$, и набор точек $\tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, ..., \tilde{\xi}_n\}$, для которого $\dfrac{y(t_{k-1}) + y(t_k)}{2} = y(\tilde{\xi}_k)$.

Тогда $S_{\tau,вращ.} = 2\pi \sum\limits_{k=1}^{n} y(\tilde{\xi}_k)\sqrt{\left(x'(\xi_k')\right)^2 + \left(y'(\xi_k'')\right)^2}\,\Delta t_k$ . Полученная сумма формально не является интегральной для функции $\varphi(t) = 2\pi y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}$ , поскольку все наборы $\xi', \xi'', \tilde{\xi}$ различные. Оценим величину $\left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt - S_{\tau,вращ}\right|$:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt - S_{\tau,вращ}\right| \le \left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt - S_{\tau}(\varphi)\right| + \left|S_{\tau}(\varphi) - S_{\tau,вращ}\right|,$$

где $S_{\tau}(\varphi)$ интегральная сумма для функции $\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$. Тогда из интегрируемости функции $\varphi(t)$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta_1$ такое, что

$$\forall\tau : |\tau| < \delta_1, \forall\xi \to \left|\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)dt - S_{\tau}(\varphi)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для второго слагаемого, с использованием неравенства, треугольника получим оценку:

$$\left|S_{\tau}(\varphi) - S_{\tau,вращ}\right| \le 2\pi\cdot\sum_{k=1}^{n}\left|y(\xi_k)\sqrt{\left(x'(\xi_k)\right)^2 + \left(y'(\xi_k)\right)^2} - y(\tilde{\xi}_k)\sqrt{\left(x'(\xi_k')\right)^2 + \left(y'(\xi_k'')\right)^2}\right|\Delta t_k \le$$

$$\le 2\pi\sum_{k=1}^{n}\left|y(\xi_k) - y(\tilde{\xi}_k)\right|\sqrt{\left(x'(\xi_k)\right)^2 + \left(y'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta t_k +$$

$$+2\pi\sum_{k=1}^{n} y(\tilde{\xi}_k)\left|\sqrt{\left(x'(\xi_k)\right)^2+\left(y'(\xi_k)\right)^2}-\sqrt{\left(x'(\xi'_k)\right)^2+\left(y'(\xi''_k)\right)^2}\right|\Delta t_k \le$$

$$\le 2\pi M_1\omega_y(\delta)(\beta-\alpha)+$$

$$+2\pi\sum_{k=1}^{n} y(\tilde{\xi}_k)\sqrt{\left(x'(\xi_k)-x'(\xi'_k)\right)^2+\left(y'(\xi_k)-y'(\xi''_k)\right)^2}\,\Delta t_k \le$$

$$\le 2\pi(M_1\omega_y(\delta)+M_2\sqrt{\omega_{x'}^2(\delta)+\omega_{y'}^2(\delta)})(\beta-\alpha).$$

Здесь $M_1=\sup\limits_{t\in[\alpha;\beta]}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}$, $M_2=\sup\limits_{t\in[\alpha;\beta]} y(t)$,

$\omega_y(\delta)$, $\omega_{x'}(\delta)$, $\omega_{y'}(\delta)$ колебания функций $y(t), x'(t), y'(t)$.

В предположении непрерывности функций $y(t), x'(t), y'(t)$ на $[\alpha;\beta]$, колебания $\omega_y(\delta)$, $\omega_{x'}(\delta)$, $\omega_{y'}(\delta)$ бесконечно малые функции в точке $\delta=0$, поэтому существует $\delta=\delta_2<\delta_1$ такое, что

$$\forall\tau:|\tau|<\delta_2\to 2\pi(M_1\omega_y(\delta)+M_2\sqrt{\omega_{x'}^2(\delta)+\omega_{y'}^2(\delta)})(\beta-\alpha)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\left|\int\limits_a^b\varphi(t)dt-S_{\tau,вращ}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ. Если граница криволинейной трапеции задана в виде графика функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_{вращ.}=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

ПРИМЕР 3. Площадь поверхности сферы радиуса $R$ равна

$$S_{сфера}=4\pi R^2.$$

РЕШЕНИЕ. Сфера в пространстве получается как поверхность вращения окружности $\begin{cases}x=R\cos\varphi,\\ y=R\sin\varphi\end{cases}$, $\varphi\in[0;\pi]$вокруг оси OX.

$$S_{сфера}=2\pi\int\limits_0^\pi R\sin\varphi\sqrt{R^2\sin^2\varphi+R^2\cos^2\varphi}\,d\varphi=2\pi R^2\int\limits_0^\pi\sin\varphi\,d\varphi=4\pi R^2.$$

ПРИМЕР 4. Найти площадь поверхности катеноида: поверхности вращения цепной линии: $y = chx$ на отрезке $[-a;a]$.

РЕШЕНИЕ. $y' = shx$, $\sqrt{1+(y')^2} = chx \to S = 2\pi\int\limits_{-a}^{a} ch^2 x dx =$

$$2\pi\int\limits_{-a}^{a}\frac{ch2x+1}{2}dx = = \pi\left(\frac{sh2x}{2}+x\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \pi(sh2a+2a).$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Доказательство формулы для вычисления объема тела по известным площадям его сечений.
2. Объем тела вращения. Примеры.
3. Площадь поверхности тела вращения. Примеры.

Лекция 21. Несобственные интегралы.

П.1. Несобственный интеграл от неограниченной функции на конечном отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывная на $[a;b)$ и неограниченная на каждом из интервалов $(b-\varepsilon;b)$.

ОПР. Несобственным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называют число $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Если несобственный интеграл существует, то говорят о сходящемся интеграле. Если предел не существует или он бесконечный, то говорят о расходимости интеграла.

ПРИМЕР 1. При каких $r$ существует интеграл $\int\limits_a^{b-0}\frac{dx}{(b-x)^r}$?

РЕШЕНИЕ:

$$\int\limits_a^{b-0}\frac{dx}{(b-x)^r} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(b-x)^{1-r}}{1-r}\Bigg|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\varepsilon^{1-r}}{1-r}-\frac{(b-a)^{1-r}}{1-r}\right) < \infty,$$

если $1-r>0 \to r<1$. Если $r>1$, то $\int\limits_a^{b-0}\frac{dx}{(b-x)^r} = +\infty$.

Если $r=1$, то $\int\limits_a^{b-0}\frac{dx}{(b-x)} = -\ln|b-x|\Big|_a^{b-\varepsilon} = +\infty$. Таким образом, интеграл сходится при $r<1$ и расходится при $r\geq 1$.

СВОЙСТВА несобственного интеграла.

1. Если интегралы $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ сходящиеся, то интегралы $\int\limits_a^{b-0}(f(x)+g(x))dx$, $\int\limits_a^{b-0} cf(x)dx$ также сходящиеся и

$$\int_a^{b-0}(f(x)+g(x))dx=\int_a^{b-0}f(x)dx+\int_a^{b-0}g(x)dx,$$

$$\int_a^{b-0}cf(x)dx=c\int_a^{b-0}f(x)dx.$$

ДОК. следует из арифметических свойств пределов.

2. Если интеграл $\int_a^{b-0}f(x)dx$ сходящийся и $F(x)$ первообразная функции $y=f(x)$ на $[a;b)$, то существует $\lim\limits_{x\to b-0}F(x)=F(b-0)$ и

$$\int_a^{b-0}f(x)dx=F(b-0)-F(a).$$

ДОК. $\int_a^{b-0}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(F(b-\varepsilon)-F(a))=F(b-0)-F(a)$.

3. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют непрерывные производные на $[a;b)$ и интегралы $\int_a^{b-0}f(x)g'(x)dx$ и $\int_a^{b-0}g(x)f'(x)dx$ сходящиеся, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^{b-0}f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^{b-0}-\int_a^{b-0}g(x)f'(x)dx.$$

ДОК. $\int_a^{b-0}f(x)g'(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(f(x)g(x)\Big|_a^{b-\varepsilon}-\int_a^{b-\varepsilon}g(x)f'(x)dx\right)$.

Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(f(x)g(x)\Big|_a^{b-\varepsilon}\right)=\int_a^{b-0}f(x)g'(x)dx+\int_a^{b-0}g(x)f'(x)dx=$

$=(f(x)g(x))\Big|_a^{b-0}$.

4. Пусть в сходящемся интеграле $\int_a^{b-0}f(x)dx$ сделана замена переменной $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha;\beta)$ с непрерывно дифференцируемой

функцией $\varphi(t)$, причем $\varphi(\alpha)=a$, $\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)=b$. Тогда интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta-0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ сходящийся и справедлива формула замены переменной: $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta-0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

ДОК. $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{\alpha}^{\beta-\delta(\varepsilon)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)=$

$=\int\limits_{\alpha}^{\beta-0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

5. Сходимость и расходимость интегралов $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)dx$ и $\int\limits_{c}^{b-0} f(x)dx$ одновременная для любого $c\in(a,b)$.

ДОК. $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx=\int\limits_{a}^{c} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{c}^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Если один из пределов существует, то существует и другой. Обратно, если один из интегралов не существует, то второй интеграл также расходится.

П.2. Несобственные интегралы от функций $f(x)\ge 0$

ТЕОРЕМА 1 (критерий сходимости). Для сходимости интеграла $\int\limits_{a}^{b-0} f(x)dx$, $f(x)\ge 0, x\in[a;b)$, необходимо и достаточно выполнения условия $\sup\limits_{x\in[a;b)}\int\limits_{a}^{x} f(t)dt<\infty$.

ДОК. В условии теоремы первообразная $F(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ монотонно возрастающая функция, поскольку $F'(x)=f(x)\ge 0$.

Если интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ сходящийся, то $F(x) \le \int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ и

$\sup\limits_{x\in[a;b)} \int\limits_a^x f(t)dt < \infty$. Условие $\sup\limits_{x\in[a;b)} \int\limits_a^x f(t)dt < \infty$ означает, что

$F(x) \le \sup\limits_{x\in[a;b)} \int\limits_a^x f(t)dt$ и $F(x)$ ограниченная сверху, монотонно возрастающая функция, имеющая предел при $x \to b-0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to b-0} F(x) = \lim\limits_{\varepsilon=b-x\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_a^{b-0} f(x)dx$.

ТЕОРЕМА 2 (признак сравнения 1). Если непрерывные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le g(x)$ для $x \in [a;b)$ и интеграл $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$.

ДОК. $\int\limits_a^x f(t)dt \le \int\limits_a^x g(t)dt \le \sup\limits_{x\in[a;b)} \int\limits_a^x g(t)dt < \infty \to \sup\limits_{x\in[a;b)} \int\limits_a^x f(t)dt < \infty$ и интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ сходится по теореме 1.

Если интеграл $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^x g(t)dt \ge \int\limits_a^x f(t)dt$

и $\forall M > 0 \exists x_M \in [a;b): \int\limits_a^{x_M} f(t)dt > M \to \int\limits_a^{x_M} g(t)dt \ge \int\limits_a^{x_M} f(t)dt > M$, т.е. $\sup\limits_{x\in[a;b)} \int\limits_a^x g(t)dt = \infty$ и интеграл по теореме 1 расходится.

ТЕОРЕМА 3 (признак сравнения 2). Если непрерывные функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют условию

$f(x) \geq 0, g(x) > 0, x \in [a;b)$ и существует $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0$, то сходимость и расходимость интегралов $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ одновременная. Если $K = 0$, то из сходимости $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$.

ДОК. Если $K > 0$, то $\forall \varepsilon > 0 : K - \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta_\varepsilon \to$ $(K-\varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (K+\varepsilon)g(x)$ для всех $x \in [b-\delta;b)$. По свойству 5 несобственных интегралов для $c = b - \delta$, сходимость или расходимость интегралов на промежутках $[a;b)$ и $[c,b)$ одновременная. На отрезке $[c,b)$ к интегралам можно применить теорему 2. Тогда из сходимости $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{b-0} (K-\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, по свойству 1 и интеграла $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$. Аналогично, из сходимости $\int\limits_a^{b-0} g(x)dx$ и свойства 1 следует сходимость $\int\limits_a^{b-0}(K+\varepsilon)g(x)dx$ и по теореме 2 сходимость интеграла $\int\limits_a^{b-0}f(x)dx$. Если один из интегралов, например, $\int\limits_a^{b-0}f(x)dx$ расходится, то по теореме 2 расходится интеграл $\int\limits_a^{b-0}(K+\varepsilon)g(x)dx$, а, следовательно, и интеграл $\int\limits_a^{b-0}g(x)dx$.

Если $K=0$, то справедливо неравенство $f(x)<\varepsilon\cdot g(x)$ и поэтому из сходимости $\int\limits_a^{b-0}g(x)dx$ следует сходимость $\int\limits_a^{b-0}f(x)dx$, а из расходимости $\int\limits_a^{b-0}f(x)dx$ следует расходимость $\int\limits_a^{b-0}g(x)dx$.

СЛЕДСТВИЕ. Если функция $y=f(x)$, $f(x)\geq 0$, непрерывная на $[a;b)$ и неограниченная в окрестности $(b-\varepsilon;b)$, причем $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)(b-x)^r=K>0$. Тогда при $0<r<1$ интеграл $\int\limits_a^{b-0}f(x)dx$ сходится, при $r\geq 1$ интеграл $\int\limits_a^{b-0}f(x)dx$ расходится.

ДОК. Сводится к теореме 3, если $g(x)=\dfrac{1}{(b-x)^r}$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Понятие несобственного интеграла от неограниченной функции. Свойства несобственного интеграла.
2. Критерий сходимости несобственного интеграла для неотрицательных функций.
3. Теоремы сравнения для несобственных интегралов.

## Лекция 22. Несобственные интегралы на неограниченном промежутке

П.1. Несобственные интегралы по неограниченному промежутку

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывная на полуоси $[a;+\infty)$.

ОПР. Несобственным интегралом функции на $[a;+\infty)$ называется число $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$. Если предел существует, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется сходящимся. Если предел не существует или он бесконечный, то интеграл называется расходящимся.

ПРИМЕР 1.Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^q}$ в зависимости от $q$.

РЕШЕНИЕ. $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^q} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{dx}{x^q} = \lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{x^{1-q}}{1-q})\Big|_a^b =$

$=\frac{1}{1-q}\cdot\lim\limits_{b\to+\infty}(\frac{1}{b^{q-1}}-\frac{1}{a^{q-1}}) = \frac{1}{(q-1)a^{q-1}}$, если $q>1$. При $q<1$ конечного предела нет и интеграл расходится. При $q=1$

$\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{a} = +\infty$ интеграл также расходится.

Для несобственных интегралов на полуоси справедливы свойства 1-5 (с заменой $b-0$ на $+\infty$).

ТЕОРЕМА 1 (критерий КОШИ сходимости интеграла). Для сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ необходимо и достаточно выполнения условия: $\forall\varepsilon>0\ \exists b=b_\varepsilon : \forall b',b''>b_\varepsilon \to \left\|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx\right\| < \varepsilon$.

ДОК. Сходимость интеграла равносильна существованию предела $\lim\limits_{b\to+\infty} F(x)$, где $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ первообразная функции $y=f(x)$ на $[a;+\infty)$. Для существования $\lim\limits_{b\to+\infty} F(x)$ необходимо и достаточно по критерию Коши, чтобы

$$\forall\varepsilon>0\,\exists b=b_\varepsilon:\forall b',b''>b_\varepsilon\to|F(b'')-F(b')|<\varepsilon\to\left|\int\limits_{b'}^{b''}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

Сформулируем признаки сравнения 1 и 2 для несобственных интегралов от непрерывных функций на $[a;+\infty)$.

ТЕОРЕМА 2 (сравнения 1). Если непрерывные функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ удовлетворяют условию $0\le f(x)\le g(x)$ , $x\in[a;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ расходится, то расходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$.

ДОК. Проводится аналогично доказательству теоремы для несобственных интегралов от неограниченных функций.

ТЕОРЕМА 3 (сравнения 2). Если непрерывные функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ удовлетворяют условию $0\le f(x), 0<g(x)$, $x\in[a;+\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K>0$, то сходимость и расходимость интегралов $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ одновременная. Если $K=0$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty}g(x)dx$ следует сходимость интеграла

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

ДОК. Аналогично доказательству теоремы сравнения 2 для неограниченных функций.

П.2. Абсолютная сходимость интегралов

ОПР. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

ТЕОРЕМА 4 (о сходимости абсолютно сходящегося интеграла). Если функция интегрируема на каждом конечном отрезке полуоси $[a;+\infty)$ и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится.

ДОК. Из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ по критерию Коши следует, что $\forall \varepsilon > 0\, \exists b = b_\varepsilon : \forall b', b'' > b_\varepsilon \to \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|dx < \varepsilon$. Для завершения доказательства осталось заметить, что $\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x)dx \right| \le \int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|dx < \varepsilon$.

Заметим, что требование интегрируемости функции существенно для справедливости утверждения теоремы.

ПРИМЕР 2. Функция $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x^2}, x\in Q, x\geq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, x\in R/Q, x>1 \end{cases}$ не интегрируемая

на любом конечном отрезке полуоси $[a;+\infty)$, поэтому $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

расходится. Однако, функция $y=|f(x)|=\frac{1}{x^2}$ интегрируемая и

$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится.

ТЕОРЕМА 5 (признак Абеля-Дирихле). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывно дифференцируемая на $[a;+\infty)$, функция $y=g(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и 1) $f(x)$ монотонно убывает, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$,

2) $g(x)$ имеет первообразную $G(x): |G(x)|<C, \forall x\in[a;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

ДОК. $\int\limits_{b'}^{b''} f(x)g(x)dx = f(x)G(x)\Big|_{b'}^{b''} - \int\limits_{b'}^{b''} G(x)f'(x)dx$. Из условий 1), 2) теоремы следует, что

$$\forall\varepsilon>0, \exists b=b_1 : \forall b', b''>b_1 \to \left| f(x)G(x)\Big|_{b'}^{b''}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для второго слагаемого

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} G(x)f'(x)dx\right| \leq \int\limits_{b'}^{b''} |G(x)||f'(x)|dx \leq -C\int\limits_{b'}^{b''} f'(x)dx = C(f(b')-f(b''))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)g(x)dx\right| \leq \left|f(x)G(x)\Big|_{b'}^{b''}\right| + \left|\int\limits_{b'}^{b''} G(x)f'(x)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

ПРИМЕР 3 . Интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\frac{\cos x}{x^r}dx$ сходится при $r>0$.

РЕШЕНИЕ. Функция $f(x)=\frac{1}{x^r}$ убывает на $[a;+\infty)$, $a>0$. Первообразная функции $g(x)=\cos x$ равна $G(x)=\sin x$ и ограничена на $[a;+\infty)$ и по признаку Абеля интеграл сходится.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Понятие несобственного интеграла на бесконечном промежутке. Критерий Коши сходимости интеграла.
2. Теоремы сравнения для несобственных интегралов на неограниченном промежутке.
3. Понятие абсолютной сходимости несобственных интегралов. Теорема о сходимости абсолютно сходящихся интегралов.
4. Критерий Абеля-Дирихле сходимости несобственных интегралов.

## Лекция 23. Понятие функции многих переменных

### П.1. Евклидовые линейные пространства

Элементом пространства $R^n$ является набор из $n$ действительных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Два набора $x$ и $y$ равны, если $x_i = y_i$ для всех $i = 1,2,...,n$. Пространство $R^n$ обладает структурой линейного пространства : определены операции $x + y$ и $\alpha \cdot x$ и они удовлетворяют аксиомам 1- 8 линейного пространства.

ОПР. Линейное пространство называется евклидовым, если в нем определена операция $(x, y)$ скалярного произведения, удовлетворяющая аксиомам 1-4:

1. $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность)
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (распределительное свойство)
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $(x, x) > 0$, если $x \neq \theta$ и $(x, x) = 0$, если $x = \theta$.

В пространстве $R^n$ скалярное произведение определяется по формуле $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \cdot y_k$.

УПРАЖНЕНИЕ. Проверьте для $(x, y)$ аксиомы 1- 4.

ОПР. Пространство М называется метрическим, если для любых $x, y \in M$ определена функция расстояния $\rho(x, y)$, удовлетворяющая аксиомам:

A) $\rho(x, y) > 0$, если $x \neq y$, $\rho(x, x) = 0$ для любого $x \in M$.

B) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

C) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Евклидовое пространство может быть наделено структурой метрического пространства, если положить

$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)} = \|x - y\|$. Если $M = R^n$, то $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2}$.

Аксиомы А, В следуют из 1, 3 и 4. Для доказательства неравенства треугольника используем еще одно свойство скалярного произведение:

ЛЕММА 1. Для любых $x, y \in R^n$ справедливо неравенство:
$(x,y)^2 \le (x,x)\cdot(y,y)$ или $|(x,y)| \le \|x\|\cdot\|y\|$.

ДОК.
$\forall \lambda \in R, (x-\lambda y, x-\lambda y) \ge 0 \to \lambda^2(y,y) - 2\lambda(x,y) + (x,x) \ge 0 \to$
$D = (x,y)^2 - (x,x)(y,y) \le 0.$

Тогда
$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) =$
$\|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

и $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. Наконец,
$\rho(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

ЛЕММА 2. Справедливо второе неравенство треугольника:
$|\rho(x,y) - \rho(z,y)| \le \rho(x,z)$ (разность длин сторон треугольника не больше третьей стороны).

ДОК. Из неравенства треугольника $\rho(x,y) - \rho(z,y) \le \rho(x,z)$,
$\rho(z,y) \le \rho(z,x) + \rho(x,y) \to -\rho(x,z) \le \rho(x,y) - \rho(z,y)$,
т.е. $|\rho(x,y) - \rho(z,y)| \le \rho(x,z)$.

ОПР. Открытым шаром радиуса $r$ с центром в точке $x_0$ метрического пространства М называют множество

$$U_r(x_0) = \{x \in M : \rho(x, x_0) < r\}.$$

Если $M = R^n$, то $U_r(x_0) = \{x \in R^n : \|x - x_0\| < r\}$.

ОПР. Множество $D \subset R^n$ называется открытым, если $\forall x_0 \in D \, \exists U_r(x_0) \subset D$. Шар $U_r(x_0)$ открытое множество в $R^n$.

ОПР. Точка $x_0$ – внутренняя точка множества $D \subset R^n$, если существует $U_r(x_0) \subset D$. Все точки открытого множества $D \subset R^n$ являются его внутренними точками.

ОПР. Точка $x_0 \in R^n$ называется точкой прикосновения для множества $D \subset R^n$, если $\forall U_r(x_0) \, \exists x \in D \cap U_r(x_0)$.

Например, все точки сферы $S_r(x_0)=\{x\in R^n : \|x-x_0\|=r\}$ являются точками прикосновения для $U_r(x_0)$.

ОПР. Множество $D\subset R^n$ называется замкнутым, если все точки прикосновения для $D$ принадлежат $D$ .

ОПР. Точка $x_0\in R^n$ называется граничной для множества $D$, если в любом шаре $U_r(x_0)$ существуют точки, принадлежащие $D$ и не принадлежащие $D$. Совокупность граничных точек образует множество $\partial D$ границу множества $D$. Множество $\bar{D}=D\cup\partial D$ является замкнутым.

ОПР. Множество $D\subset R^n$ называется связным, если для любых его двух точек $x^1$ и $x^2$ существует непрерывная кривая $x=x(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, соединяющая эти точки и целиком принадлежащая области $D$.

ОПР. Множество $D\subset R^n$ называется областью, если оно открыто и связно.

П.2. Предел последовательности в $R^n$

ОПР. Элемент $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}\in R^n$ называется пределом последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из $R^n$, если $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k-A\|=0$, т.е. $\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon : \forall k>n_\varepsilon \to x_k\in U_\varepsilon(A)$.

Основные факты для пределов последовательностей в $R^n$ связаны с соответствующими теоремами теории пределов числовых последовательностей.

ТЕОРЕМА 1. Последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $R^n$ сходится тогда и только тогда, если сходятся числовые последовательности $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ для каждого $i=1,2,...,n$.

ДОК. (необходимость). Пусть $A=\lim\limits_{k\to\infty}x^k$. Тогда

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\, n_\varepsilon : \forall k>n_\varepsilon \to \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^k-a_i\right)^2<\varepsilon^2 \;\to\left|x_i^k-a_i\right|<\varepsilon,$$

т.е. последовательности $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся для каждого $i = 1,2,...,n$.

ДОК. (достаточность). Пусть последовательности $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся для любого $i = 1,2,...,n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon : \forall k > n_\varepsilon$ и

$$\forall\, i = 1,2,...,n \to \left|x_i^k - a_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \text{ и } \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^k - a_i\right)^2 < \varepsilon^2 .$$

ТЕОРЕМА 2. (критерий Коши). Для сходимости последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $R^n$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon : \forall m,k > n_\varepsilon \to \left\|x^k - x^m\right\| < \varepsilon .$$

ДОК. (необходимость). Если последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $R^n$ сходится, то существует элемент $x^0$, для которого

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon : \forall m,k > n_\varepsilon \to \left\|x^m - x^0\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \left\|x^0 - x^k\right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\left\|x^m - x^k\right\| \le \left\|x^m - x^0\right\| + \left\|x^0 - x^k\right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

ДОК. (достаточность). Если

$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon : \forall m,k > n_\varepsilon \to \left\|x^k - x^m\right\| < \varepsilon$, то $\left|x_i^k - x_i^k\right| < \varepsilon$ для любого $i = 1,2,...,n.$, т.е. для каждой числовой последовательности $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ выполняются условия критерия Коши и существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i^0$. Тогда элемент $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ является пределом последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$. Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon : \forall k > n_\varepsilon \to \left|x_i^k - x_i^0\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \to$$

$$\left\|x^k - x^0\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^k - x_i^k\right)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon .$$

ТЕОРЕМА 3 (Больцано – Вейерштрасса). Если последовательность $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $R^n$ ограничена, то у нее существует сходящаяся подпоследовательность.

ДОК. Из ограниченности последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ в $R^n$ следует, что каждая числовая последовательность $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена для каждого $i=1,2,...,n.$ Тогда по теореме Больцано – Вейерштрасса для числовой последовательности при $i=1$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_1^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Удалим из последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ все члены с номерами $k \neq k_m$. Без ограничения общности полагаем, что члены последовательности $\{x^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ перенумерованы по индексу $m$ и используем для нее прежнее обозначение $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$. Аналогично, для числовой последовательности $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ при $i=2$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$ и удалим из $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ все члены с номерами $k \neq k_m$ . Тоже проделаем для $i=3,4,...,n.$. Из построения последовательности $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что она сходящаяся.

П.3. Предел функции нескольких переменных

ОПР. Функцией $u=f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ $n$ переменных, определенной на множестве $D_f \subset R^n$, называют отображение $f: D_f \to R$, ставящее в соответствие каждой точке $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in D_f$ единственное число $u$ .

ОПР. Число $A$ называется пределом функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ в точке $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta=\delta_{\varepsilon} : \forall x \in \overset{0}{U}_{\delta}(a) \to |f(x)-A| < \varepsilon .$$

ПРИМЕР 1. Найти предел функции

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}+y\sin\frac{1}{y}, \text{если } x\cdot y\neq 0,\\ 0, \text{если } x\cdot y=0.\end{cases}$$ в точке (0;0).

РЕШЕНИЕ. Предел равен нулю, поскольку

$\left|f(x,y)\right|\le|x|+|y|\le 2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$, если $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

ПРИМЕР 2. Доказать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{при } x^2+y^2>0,\\ 0, \text{при } x=y=0\end{cases}$$ не имеет предела в точке (0,0).

РЕШЕНИЕ. Если $x\to 0,\ y=kx\to 0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\frac{k}{1+k^2}$ и

предел зависит от $k$. Если функция имеет предел, то он не должен зависеть от способа стремления $x$ и $y$ к нулю.

П.4. Непрерывность функции нескольких переменных

ОПР. Функция $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ называется непрерывной в точке $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

ОПР. Функция $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ непрерывна на множестве $D$, если она непрерывна в каждой точке $x\in D$.

ОПР. Множество $D$ в $R^n$ называется компактом, если оно ограничено и замкнуто.

ТЕОРЕМА 4. Непрерывная функция на компакте ограничена.

ДОК. Предположим противное: функция неограниченная на $D$. Тогда $\forall n\,\exists\, x^n\in D: \left|f(x^n)\right|>n$. Множество $D$ ограничено, поэтому последовательность $\{x^n\}$ ограничена и по теореме Больцано – Вейерштрасса из нее может быть выбрана сходящаяся подпоследовательность $\{x^{n_m}\}: x^0=\lim\limits_{m\to\infty} x^{n_m}$. Поскольку множество $D$ замкнуто, $x^0\in D$, а функция непрерывна в точке $x^0$, то она ограничена в окрестности точки $x^0$. Последнее противоречит способу построения последовательности $\{x^n\}$.

ТЕОРЕМА 5. Непрерывная функция на компакте достигает верхней и нижней граней своих значений.

ДОК. Пусть $D$ компакт и $M = \sup_{x \in D} f(x)$. Если значение М не достигается ни в какой точке $x$ множества $D$, то функция

$\varphi(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ непрерывна в каждой точке $x \in D$ и по теореме 4

является ограниченной: $\dfrac{1}{M - f(x)} < C \to f(x) < M - \dfrac{1}{C}, \forall x \in D$.

Последнее противоречит определению верхней грани множества значений функции $f(x)$. Доказательство достижимости нижней грани $N = \inf_{x \in D} f(x)$ проводится аналогично или с учетом замечания: $\sup_{x \in D}(-f(x)) = -N$.

ТЕОРЕМА 6. Если $D$ связный компакт и $u = f(x)$ непрерывная функция на $D$, то $E_f = [N; M]$.

ДОК. По теореме 5 существуют точки $a, b \in D : f(a) = N, f(b) = M$. Из связности множества $D$ следует, что существует непрерывная кривая $x = x(t), t \in [\alpha; \beta]$ с концами $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, целиком лежащая в $D$. Тогда функция одного переменного $u = f(x(t))$ непрерывна по $t \in [\alpha; \beta]$ и по аналогичной теореме принимает все значения на отрезке [N;M].

ОПР. Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ равномерно непрерывная на $D$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta_\varepsilon : \forall x', x'' \in D : \|x' - x''\| < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 7. Всякая функция непрерывная на компакте равномерно непрерывная.

ДОК. Предположим противное:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \, \exists \, (x^n)' и \, (x^n)'' : \|(x^n)' - (x^n)''\| < \frac{1}{n} \to |f((x^n)') - f((x^n)'')| \geq \varepsilon_0.$$

Поскольку $D$ ограниченное множество, обе последовательности

$\{(x^n)'\}$ и $\{(x^n)''\}$ – ограниченные, и из них, по теореме 3, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности, можно считать $\{(x^n)'\}$ и $\{(x^n)''\}$ этими подпоследовательностями. Если $D$ замкнуто, то предел

$$a = \lim_{n\to\infty}(x^n)' = \lim_{n\to\infty}(x^n)'' \in D \text{ и } f(a) = \lim_{n\to\infty} f((x^n)') = \lim_{n\to\infty} f((x^n)'').$$

Тогда для

$$\varepsilon = \varepsilon_0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \to \left|f((x^n)') - f((x^n)'')\right| < \left|f((x^n)') - f(a)\right| +$$

$$+\left|f(a) - f((x^n)'')\right| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.$$

Последнее неравенство противоречит условию построения последовательностей $\{(x^n)'\}$ и $\{(x^n)''\}$.

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что функция $u = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$ непрерывна в области $D = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$, но не равномерно непрерывна в ней.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Евклидовые линейные пространства, аксиомы скалярного произведения, оценка скалярного произведения.
2. Метрические пространства, неравенства треугольника.
3. Предел последовательности в $R^n$. Необходимое и достаточное условие сходимости.
4. Критерий Коши сходимости последовательности в $R^n$.
5. Теорема Больцано – Вейерштрасса о существовании сходящейся подпоследовательности .
6. Предел и непрерывность в точке функции нескольких переменных. Теорема об ограниченности функции на компакте.
7. Теорема о достижимости верхней и нижней грани значений непрерывной функции на компакте.
8. Теорема об области значений непрерывной функции на связном компакте.
9. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема о равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте.

# Лекция 24. Дифференцируемость функции нескольких переменных

## П.1.Частные производные

ОПР. Частной производной функции $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной $x_i$ в точке $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ называют производную функции $\varphi(x_i) = f(a_1, a_2, ..a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, .., a_n)$ по переменной $x_i$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{x=a} = f'_{x_i} = = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(a_1, .., a_{i-1}, a_i + \Delta x_i, .., a_n) - f(a_1, a_2, .., a_i, .., a_n)}{\Delta x_i}.$$

ПРАВИЛО дифференцирования: для нахождения частной производной по какой – либо переменной, необходимо совершать привычные действия дифференцирования по этой переменной, полагая остальные переменные постоянными.

ПРИМЕР 1. Найти частные производные по переменным $x$ и $y$ функции $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в произвольной точке $(x, y) \neq (0,0)$.

РЕШЕНИЕ. $f'_x = y \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \dfrac{y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}.$

$f'_y = \dfrac{x^3}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}$. Существование частных производных у функции в какой – то точке еще не гарантирует даже ее непрерывность в этой точке.

ПРИМЕР 2. Функция $f(x, y) = \begin{cases} 1, \textit{если } x \cdot y = 0, \\ 0, \textit{если } x \cdot y \neq 0 \end{cases}$ разрывная в точке $(0,0)$, хотя имеет в этой точке частные производные по обоим переменным (равные нулю). В дальнейшем для краткости записи, если не оговорено противное, рассматриваются функции двух переменных.

ОПР. Функция $u = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $(x_0, y_0)$, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

можно представить в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$, где $A$ и В – константы, $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ бесконечно малая более высокого порядка, чем $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Функции $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$ можно придать вид $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\cdot\Delta y$,
где $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ *и* $\beta(\Delta x, \Delta y)$ бесконечно малые функции в точке (0,0).
Действительно, $o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \gamma(\Delta x, \Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} =$
$=\gamma(\Delta x, \Delta y)\cdot(\alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta_1(\Delta x, \Delta y)\Delta y)$, где $\gamma(\Delta x, \Delta y)$ бесконечно малая функция, $\alpha_1(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x}, \textit{если} |\Delta x| \geq |\Delta y|, \\ 0, \textit{если} |\Delta x| < |\Delta y| \end{cases}$

$\beta_1(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta y}, \textit{если} |\Delta x| \leq |\Delta y|, \\ 0, \textit{если} |\Delta x| > |\Delta y| \end{cases}$ ограниченные функции:

$|\alpha_1| \leq \sqrt{2}$, $|\beta_1| \leq \sqrt{2}$. Тогда $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \gamma(\Delta x, \Delta y)\cdot\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y) = \gamma(\Delta x, \Delta y)\cdot\beta_1(\Delta x, \Delta y)$ бесконечно малые функции (0,0).
Определение дифференцируемости перефразируем так: функция $u = f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке $(x_0, y_0)$, если ее приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ можно представить в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$, где $A$ и В – константы, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, $\beta(\Delta x, \Delta y)$ бесконечно малые функции в точке (0,0).
УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что дифференцируемая функция в точке $(x_0, y_0)$ непрерывна в этой точке.
ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие дифференцируемости).
Если функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, то она имеет частные производные в этой точке и

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}, \quad B = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

ДОК. При $\Delta y = 0$ отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x, 0)$ имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный $A$. При $\Delta x = 0$ отношение $\frac{\Delta f}{\Delta y} = B + \beta(0, \Delta y)$ имеет предел при $\Delta y \to 0$, равный $B$.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия дифференцируемости).
Если функция $u = f(x, y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности $U_\theta(x_0, y_0)$, которые непрерывны в точке $(x_0, y_0)$, то функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$.

ДОК. Представим приращение функции в виде:
$\Delta f = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0))$.
По теореме Лагранжа для производной по каждой переменной
$(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x$
и $(f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y$.

Из непрерывности частных производных в точке $(x_0, y_0)$ следует, что при достаточно малых $\Delta x$ и $\Delta y$: $f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)$.

Объединяя выражения, получим

$$\Delta f = (f'_x(x_0, y_0) + \alpha(\Delta x, \Delta y)) \cdot \Delta x + (f'_y(x_0, y_0) + \beta(\Delta x, \Delta y)) \cdot \Delta y =$$
$$= f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y,$$

т.е. функция дифференцируема.

П.2. Частные производные сложных функций

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, а $x$ и $y$ являются в свою очередь дифференцируемыми функциями переменных $u$ и $v$: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ в точке $(u_0, v_0)$, причем $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, то может быть рассмотрена сложная функция $z = \tilde{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

ТЕОРЕМА 3. Сложная функция $z = \tilde{f}(u,v)$ дифференцируема в точке $(u_0, v_0)$ и ее частные производные вычисляются по формулам:

$$z'_u = f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u \ , \ z'_v = f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v .$$

ДОК. $\Delta z = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y =$

$(f'_x + \alpha(\Delta x, \Delta y))(x'_u \Delta u + x'_v \Delta v + \varepsilon_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + \varepsilon_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v) +$

$(f'_y + \beta(\Delta x, \Delta y))(y'_u \Delta u + y'_v \Delta v + \delta_1(\Delta u, \Delta v)\Delta u + \delta_2(\Delta u, \Delta v)\Delta v) =$

$(f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u)\Delta u + +(f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v)\Delta v + \tilde{\alpha}(\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v) \cdot \Delta u +$

$+ \tilde{\beta}(\Delta x, \Delta y, \Delta u, \Delta v) \cdot \Delta v$, где функции $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ являются бесконечно малыми при $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$. Тогда, по определению, сложная функция $z = \tilde{f}(u,v)$ дифференцируема и ее частные производные равны коэффициентам при линейных по $\Delta u$ и $\Delta v$ членах приращения $\Delta z$.

ПРИМЕР 3. Введя новые переменные $\xi = x, \ \eta = x^2 + y^2$, решить дифференциальное уравнение: $y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

РЕШЕНИЕ.

$z'_x = z'_\xi \cdot \xi'_x + z'_\eta \cdot \eta'_x = z'_\xi + z'_\eta \cdot 2x$, $z'_y = z'_\xi \cdot \xi'_y + z'_\eta \cdot \eta'_y = 2y \cdot z'_\eta$.

Тогда $y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = yz'_\xi + 2xyz'_\eta - 2xyz'_\eta = y \cdot z'_\xi = 0$ и решением уравнения является $z = \varphi(\eta) = \varphi(x^2 + y^2)$, где $\varphi(\eta)$ произвольная дифференцируемая функция.

П.3. Полный дифференциал функции нескольких переменных

ОПР. Полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ называется главная линейная часть приращения функции: $dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$. Если функция дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, то по теореме 1 константы $A$ и $B$ сохраняют смысл значений частных производных функции в точке $(x_0, y_0)$. Если переменную $x$ рассматривать как линейную функцию, то $\Delta x = dx$. По аналогии, $\Delta y = dy$. Тогда полный дифференциал функции примет форму:

$$dz = df = f'_x dx + f'_y dy.$$

Эта форма записи дифференциала сохраняется, если $x$ и $y$ являются не независимыми переменными, а функциями переменных $u$ и $v$. Действительно, по теореме 3

$$dz = z'_u du + z'_v dv = (f'_x \cdot x'_u + f'_y \cdot y'_u)du + (f'_x \cdot x'_v + f'_y \cdot y'_v)dv =$$

$$f'_x(x'_u du + x'_v dv) + f'_y(y'_u du + y'_v dv) = f'_x dx + f'_y dy.$$

Это свойство называется инвариантностью формы полного дифференциала. Если в формуле для приращения функции пренебречь слагаемыми более высокого порядка малости, чем $\Delta x$ *и* $\Delta y$, то можно получить приближенную формулу для вычисления значения функции: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

ПРИМЕР 4. Вычислить приближенно значение $0{,}97^{1{,}05}$.

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим функцию $z = e^{x\ln(1+y)}$. Тогда $0{,}97^{1{,}05}$ есть значение функции при $x = 1{,}05$ и $y = -0{,}03$. Выбираем $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$. Частные производные $z'_x = e^{x\ln(1+y)} \cdot \ln(1+y)\big|_{(1;0)} = 0$,

$z'_y = e^{x\ln(1+y)} \cdot \dfrac{x}{1+y}\Big|_{(1;0)} = 1$. Тогда по приближенной формуле:

$$0{,}97^{1{,}05} \approx 1 + 0\cdot 0.05 - 1\cdot 0{,}03 = 0{,}97.$$

Полный дифференциал используют при вычислении линейной ошибки при измерениях. Если вычисления производятся по формуле $z = f(x,y)$, где $x$ и $y$ величины, полученные в результате измерения с ошибками $\Delta x$ *и* $\Delta y$ соответственно, то величина $\Delta z$ является ошибкой вычисления по неточным данным. Линейным приближением для $\Delta z$ является дифференциал $dz = f'_x dx + f'_y dy$, который называется линейной ошибкой.

ПРИМЕР 5. Длина $x$, ширина $y$ и высота $z$ прямоугольного параллелепипеда оказались равными: $x = 2$, $y = 4$, $z = 3$ (в метрах). Ошибка прибора для вычисления длины и ширины составляет

$\Delta x = \Delta y = 0{,}01$ м, а высоты $\Delta z = 0{,}05$ м. Какова линейная ошибка вычисления объема параллелепипеда?

РЕШЕНИЕ. $V = xyz$. $V'_x = yz\big|_{(2;4;3)} = 12$, $V'_y = xz\big|_{(2;4;3)} = 6$,

$V'_z = xy\big|_{(2;4;3)} = 8$. Тогда линейная ошибка вычисления равна:

$dV = (12+6)\cdot 0{,}01 + 8\cdot 0{,}05 = 0{,}58$ м$^3$.

Действие дифференциала на арифметические операции над функциями аналогичны действию дифференциалов на функции одной переменной:

1) $d(f+g) = df + dg$, 2) $d(f\cdot g) = g\cdot df + f\cdot dg$,

3) $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$.

П.4. Производная неявной функции

ОПР. Уравнение $f(x,y)=0$ задает функцию $y=\varphi(x)$ одной переменной на отрезке [a;b] неявно, если точка $(x,\varphi(x))\in D_f$ для всех $x\in[a;b]$ и $f(x,\varphi(x))\equiv 0\ \forall x\in[a,b]$.

ФОРМУЛА дифференцирования неявной функции одной переменной. Если уравнение $f(x,y)=0$ задает неявную функцию $y=\varphi(x)$, $y_0=\varphi(x_0)$, и функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0,y_0)$, при этом $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$, то

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}.$$

ДОК. $\dfrac{d}{dx}\big(f(x,\varphi(x))\big) = f'_x\cdot 1 + f'_y\cdot\varphi'(x)\equiv 0 \to \quad \varphi'(x_0) = -\dfrac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$.

ОПР. Уравнение $f(x,y,z)=0$ задает функцию $z=\varphi(x,y)$ в области $D_\varphi\subset R^2$ неявно, если точка $(x,y,\varphi(x,y))\in D_f\subset R^3$ для всех $(x,y)\in D_\varphi$ и $f(x,y,\varphi(x,y))\equiv 0\ \ \forall(x,y)\in D_\varphi$.

ФОРМУЛА дифференцирования неявной функции двух переменных. Если уравнение $f(x,y,z)=0$ задает функцию $z=\varphi(x,y)$ в области $D_\varphi \subset R^2$ неявно, $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$, функция $f(x,y,z)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0, z_0)$, при этом $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}, \qquad \varphi'_y(x_0, y_0) = -\frac{f'_y(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

ДОК. $\frac{d}{dx} f(x, y, \varphi(x, y)) = f'_x \cdot 1 + f'_z \cdot \varphi'_x \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in D_\varphi \to$

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

$$\frac{d}{dy} f(x, y, \varphi(x, y)) = f'_y \cdot 1 + f'_z \cdot \varphi'_y \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in D_\varphi \to$$

$$\varphi'_y(x_0, y_0) = -\frac{f'_y(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

П.5. Производная по направлению, градиент функции

Рассмотрим приращение функции $z = f(x, y)$ в направлении единичного вектора $e_\varphi = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$:

$$\Delta_\varphi z = f(x_0 + t\cos\varphi, y_0 + t\sin\varphi) - f(x_0, y_0).$$

ОПР. Производной функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$ в направлении вектора $e_\varphi$ называют число $\frac{\partial f}{\partial e} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\Delta_\varphi z}{t}$.

ФОРМУЛА для вычисления производной по направлению. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial e} = f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos\varphi + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin\varphi.$$

ДОК. $\frac{\partial f}{\partial e} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\Delta_\varphi z}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{(f'_x \cos\varphi + f'_y \sin\varphi) \cdot t + \alpha(t) \cdot t}{t} =$

$$= f'_x(x_0, y_0) \cdot \cos\varphi + f'_y(x_0, y_0) \cdot \sin\varphi.$$

ОПР. Вектор $gradf\Big|_{(x_0,y_0)}=\left\{f'_x(x_0,y_0);\, f'_y(x_0,y_0)\right\}$, компоненты которого равны частным производным функции $f(x,y)$, называется градиентом функции в точке $(x_0,y_0)$.

Тогда производная по направлению равна скалярному произведению вектора градиента на единичный вектор направления

$$\frac{\partial f}{\partial e}=(gradf\Big|_{(x_0,y_0)},e).$$

Из такого представления производной следует, что градиент указывает направление, в котором функция быстрее всего растет и $|gradf|$ указывает наибольшее значение производной. Если уравнение $f(x,y,z)=0$ задает поверхность в пространстве и $\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t) \end{cases}$ дифференцируемая кривая на этой поверхности: $f(x(t),y(t).z(t))\equiv 0$ для $t\in[t_0;T]$, то

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t).z(t))=f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t+f'_z\cdot z'_t=(gradf,\bar{x}')=0,$$

где $\bar{x}'=\{x'_t;y'_t,z'_t\}$ - касательный вектор к кривой. Таким образом, вектор градиента функции $f(x,y,z)$ в точке $(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярен касательному вектору к любой кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, вектор градиента является нормальным вектором к касательной плоскости поверхности $f(x,y,z)=0$ в точке $(x_0,y_0,z_0)$. Отсюда вытекают УРАВНЕНИЕ

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

касательной плоскости и УРАВНЕНИЕ нормали к поверхности:

$$\frac{(x-x_0)}{f'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{f'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{f'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Понятие частной производной функции нескольких переменных, понятие дифференцируемости функции в точке. Необходимое условие дифференцируемости.
2. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
3. Частные производные сложной функции.
4. Полный дифференциал, инвариантность формы полного дифференциала. Приложение понятия полного дифференциала.
5. Производная неявной функции, производная функции по направлению. Градиент, уравнение касательной и нормали к поверхности.

## Лекция 25 . Производные и дифференциалы высших порядков

### П.1. Производные и дифференциалы высших порядков

Частная производная функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной $x_i$ в произвольной точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в свою очередь является функцией $n$ переменных, и ее дифференцирование может быть продолжено.

ОПР. Частной производной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ порядка $k$ в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называют результат последовательного дифференцирования:

$$\frac{\partial^k f}{\partial^{k_1} x_1 \partial^{k_2} x_2 ... \partial^{k_n} x_n} = \frac{\partial^{k_n}}{\partial^{k_n} x_n}\left(\frac{\partial^{k_{n-1}}}{\partial^{k_{n-1}} x_{n-1}}\left(\cdots\left(\frac{\partial^{k_2}}{\partial^{k_2} x_2}\left(\frac{\partial^{k_1} f}{\partial^{k_1} x_1}\right)\right)\right)\right),$$

где $k = k_1 + k_2 + ... + k_n$.

Следующая теорема определяет условия независимости частных производных от порядка дифференцирования.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для функции $z = f(x, y)$ существуют и непрерывны смешанные производные $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ в некоторой точке $(x; y)$ открытого множества $D \subset R^2$. Тогда $f''_{xy} = f''_{yx}$.

ДОК. Если задана функция $z = \varphi(x, y)$, то ее приращением по переменной $x$ называют выражение: $\Delta_{x,h}\varphi = \varphi(x+h; y) - \varphi(x; y)$.

Приращение по переменной $y$ равно $\Delta_{y,h}\varphi = \varphi(x; y+h) - \varphi(x; y)$.

Тогда $\Delta_{x,h}\Delta_{y,h} f = \Delta_{x,h}\big(f(x; y+h) - f(x; y)\big) =$

$= f(x+h; y+h) - f(x; y+h) - f(x+h; y) + f(x; y) = \Delta_{y,h}\Delta_{x,h} f$.

Применяя теорему о среднем для производных в некоторой окрестности точки $(x; y)$, получим $\Delta_{x,h}\Delta_{y,h} f = \Delta_{x,h}(h \cdot f'_y(x; y + \theta \cdot h)) =$

$h \cdot (f'_y(x+h; y+\theta \cdot h) - f'_y(x; y+\theta \cdot h)) = h^2 f''_{yx}(x + \theta_1 \cdot h; y + \theta \cdot h)$.

Из непрерывности смешанной производной $f''_{yx}$ в точке $(x; y)$ следует, что $f''_{yx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta_{x,h}\Delta_{y,h} f}{h^2}$. Аналогично доказывается, что

$f''_{xy} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta_{y,h}\Delta_{x,h} f}{h^2}$ и поскольку числители дробей равны, то

$f''_{xy} = f''_{yx}$. Поскольку дифференциал функции в произвольной точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ также является функцией $n$ переменных, возможно повторное дифференцирование.

ОПР. Дифференциалом порядка $k$ функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называют выражение:

$$d^k f = d(d...(d(df))).$$

ВЫРАЖЕНИЕ второго дифференциала через частные производные

$$d^2 f = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2,$$

где частные производные вычисляются в некоторой точке $(x; y)$.

ДОК.

$d^2 f = d(df) = d(f'_x dx + f'_y dy) = dx(f''_{xx}dx + f''_{xy}dy) + dy(f''_{yx}dx + f''_{yy}dy).$

В предположении непрерывности смешанных производных

$f''_{xy} = f''_{yx}$, $d^2 f = f''_{xx}(dx)^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{yy}(dy)^2$.

Для удобства записи дифференциалов высокого порядка используют операторную форму:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f.$$

Например, третий дифференциал функции двух переменных по этой формуле имеет вид:

$$d^3 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f = f'''_{xxx}(dx)^3 + 3f'''_{xxy}(dx)^2 dy + 3f'''_{xyy}dx(dy)^2 + f'''_{yyy}(dy)^3.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Докажите, что форма второго дифференциала не является инвариантной.

Если $z = f(u_1, u_2)$ функция переменных $u_1$ и $u_2$, которые в свою очередь являются функциями $u_1 = u_1(x, y)$ и $u_2 = u_2(x, y)$ переменных $x$ и $y$, то

$dz = f'_{u_1} du_1 + f'_{u_2} du_2, d^2 z\Big|_{(x,y)} = du_1 d(f'_{u_1}) + f'_{u_1} d^2 u_1 +$

$du_2 d(f'_{u_2}) + f'_{u_{12}} d^2 u_2 = f''_{u_1 u_1}(du_1)^2 + 2 f''_{u_1 u_2} du_1 du_2 + f''_{u_2 u_2}(du_2)^2 +$

$f'_{u_1} d^2 u_1 + f'_{u_{12}} d^2 u_2 = d^2 z\Big|_{(u_1,u_2)} + f'_{u_1} d^2 u_1 + f'_{u_{12}} d^2 u_2$.

Независимость формы второго дифференциала наступает только в случае, если $d^2 u_1 = 0$ и $d^2 u_2 = 0$, т.е. если $u_1$ и $u_2$ линейные функции.

П.2. Формула Тейлора

ТЕОРЕМА 2. Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $m+1$ в окрестности $U_\theta(x^0)$ точки $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, то существует точка $\xi \in U_\theta(x^0)$, для которой $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) +$

$$+ df\Big|_{x^0} + \frac{1}{2!} d^2 f\Big|_{x^0} + ... \frac{1}{m!} d^m f\Big|_{x^0} + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f\Big|_{x=\xi}.$$

ДОК. Рассмотрим функцию одной переменной $t$:

$F(t) = f(x^0 + t(x - x^0))$, где $x \in U_\theta(x^0)$ фиксировано. В условиях теоремы функция $F(t)$ имеет $(m+1)$ непрерывную производную по переменной $t \in [0;1]$ и к ней применима формула Тейлора в дифференциальной форме:

$$F(t) = F(0) + dF\big|_{t=0} + \frac{1}{2!} d^2 F\Big|_{t=0} + ... + \frac{1}{m!} d^m F\Big|_{t=0} + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} F\Big|_{t=\mu},$$

где $\mu \in [0;1]$. Вычислим входящие в нее дифференциалы:

$$dF\Big|_{t=0} = \Delta t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dt} = \Delta t \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_i - x_i^0\right) = df\Big|_{x=x^0} \cdot \Delta t.$$

Аналогично, $d^2 F\Big|_{t=0} = d^2 f\Big|_{x=x^0} \cdot (\Delta t)^2$ и $d^m F\Big|_{t=0} = d^m f\Big|_{x=x^0} \cdot (\Delta t)^m$.

Наконец, при $\xi = x^0 + \mu(x - x^0)$, получим

$d^{m+1} F\Big|_{t=\mu} = d^{m+1} f\Big|_{x=\xi} \cdot (\Delta t)^{m+1}$. Полагаем в формуле

$\Delta t = t - 0 = t = 1$ и с учетом, что $F(1) = f(x)$ и $F(0) = f(x^0)$, получим исходную формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Заметим, что $\rho(x^0, x) \geq |\Delta x_i|$ для любого $i = 1,2,...,n$.

В предположении непрерывности частных производных до порядка $m+1$, следует их ограниченность, а выражение $\left|\dfrac{d^{m+1} f\big|_{x=\xi}}{\rho^m (x^0, x)}\right| < \varepsilon$,

при $\rho(x^0, x) < \delta < \theta$, т.е. $d^{m+1} f\big|_{x=\xi} = o(\rho^m (x^0, x))$. Представление $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) +$

$$+ df\big|_{x^0} + \frac{1}{2!} d^2 f\big|_{x^0} + ... \frac{1}{m!} d^m f\big|_{x^0} + o(\rho^m (x^0, x))$$

называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Многочлен

$$T_m(f) = f\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) + df\big|_{x^0} + \frac{1}{2!} d^2 f\big|_{x^0} + ... + \frac{1}{m!} d^m f\big|_{x^0}$$

переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$ степени $m$ называется многочленом Тейлора функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$.

ПРИМЕР 1. Написать многочлен Тейлора степени 2 функции $z = \sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)$ в точке (1,1).

РЕШЕНИЕ. $f(1,1) = 0$, $f'_x(1,1) = \cos\left(\dfrac{\pi x}{y}\right) \cdot \dfrac{\pi}{y}\Big|_{(1;1)} = -\pi$,

$f'_y(1,1) = -\cos\left(\dfrac{\pi x}{y}\right) \cdot \dfrac{\pi x}{y^2}\Big|_{(1,1)} = \pi$, $df\big|_{(1;1)} = -\pi(x-1) + \pi(y-1)$,

$f''_{x,x}(1;1) = -\sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right) \cdot \dfrac{\pi^2}{y^2}\Big|_{(1;1)} = 0$,

$f''_{xy}(1;1) = -\dfrac{\pi}{y^2} \cos\left(\dfrac{\pi x}{y}\right) + \dfrac{\pi^2 x}{y^3} \cdot \sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)\Big|_{(1;1)} = \pi$,

$f''_{yy}(1;1) = \dfrac{2\pi x}{y^3} \cos\left(\dfrac{\pi x}{y}\right) + \dfrac{\pi^2 x^2}{y^4} \sin\left(\dfrac{\pi x}{y}\right)\Big|_{(1;1)} = -2\pi$,

$$d^2 f\Big|_{(1;1)} = 2\pi(x-1)(y-1) - 2\pi(y-1)^2 .$$

Тогда $T_2 = -\pi(x-1) + \pi(y-1) + 2\pi(x-1)(y-1) - 2\pi(y-1)^2$.

ОПР. Функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ имеет локальный максимум (минимум), если $f(x) \le f(x^0)$ (соответственно $f(x) \ge f(x^0)$ ) для всех $x \in U_\theta(x^0)$. Если неравенства строгие для $x \ne x^0$, то говорят о строгом экстремуме – максимуме или минимуме.

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие экстремума).

Если функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ имеет локальный максимум (минимум), то все частные производные $f'_{x_1}(x^0) = f'_{x_2}(x^0) = ... = f'_{x_n}(x^0) = 0$, либо хотя бы одна из них не существует.

ДОК. (аналогичное для функции одной переменной)

ТЕОРЕМА 4 (достаточные условия экстремума).

Пусть функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет непрерывные частные производные до порядка 2 в окрестности $U_\theta(x^0)$ и

1) $f'_{x_1}(x^0) = f'_{x_2}(x^0) = ... = f'_{x_n}(x^0) = 0$, 2) квадратичная форма

$$D_2(\Delta x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \text{ с матрицей } A = \{a_{ij}\},\ a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\Big|_{x=x^0}$$

знакоопределенная. Тогда у функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x = x^0$ экстремум типа максимум, если $D_2(\Delta x) < 0$, и минимум, если $D_2(\Delta x) > 0$.

ДОК. Разложим функцию по формуле Тейлора до членов второго порядков: $\Delta f = D_2(\Delta x) + o(\rho^2(x^0, x))$, поскольку $D_2(\Delta x) = d^2 f\Big|_{x=x^0}$. Тогда знак приращения $\Delta f$ определяется знаком $D_2(\Delta x)$ для достаточно малых значений $\rho\left(x^0, x\right)$.

Замечание. Если квадратичная форма $D_2(\Delta x)$ знаконеопределена в окрестности $U_\theta(x^0)$ стационарной точки, то функция не имеет экстремума в этой точке. В курсе алгебры устанавливается критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы.

Критерий СИЛЬВЕСТРА. Обозначим через $\Delta_i$ главный минор матрицы $A$ порядка $i$. Квадратичная форма $D_2(\Delta x)$ положительно определена, если все ее главные миноры положительны. Квадратичная форма $D_2(\Delta x)$ отрицательно определена, если знаки ее главные миноры чередуются, начиная с $\Delta_1 = a_{11} < 0$, т.е. $\Delta_2 > 0$, ..., $(-1)^n \Delta_n > 0$. В остальных случаях, при $\Delta_i \neq 0$, квадратичная форма знаконеопределена.

ПРАВИЛО исследования функции на экстремум:

1. Найти стационарные точки функции, решая систему $f'_{x_i} = 0,\ i = 1, 2, \dots, n$ алгебраических уравнений.

2. Вычислить все значения вторых частных производных в стационарных точках и составить матрицу второго дифференциала $D_2(\Delta x)$.

3. Применить критерий Сильвестра и определить тип экстремальной точки.

Замечание. Если у функции есть точки, в которых частные производные первого порядка не существуют, то нет и вторых производных и квадратичной формы. Поведение функции в этих точках должно быть исследовано особо. Следует отметить также, что условия теоремы 3 достаточные для экстремума, и невыполнение их не говорит о том, что у функции в данной точке нет экстремума.

ПРИМЕР 2. Функция $f(x, y) = x^3 + y^2$ имеет (0,0) единственной стационарной точкой, матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, для которой $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Квадратичная форма $D_2(\Delta x) = y^2 \geq 0$ знакоположительной не является. Однако, по определению, функция не имеет экстремума в точке (0;0), поскольку $\Delta f = x^3 + y^2$ меняет знак в любой окрестности точки (0;0), например, для $\tilde{x} = (\varepsilon;0)$ $\Delta f = \varepsilon^3 > 0$, для $\tilde{\tilde{x}} = (-\varepsilon;0)$ $\Delta f = -\varepsilon^3 < 0$.

ПРИМЕР 3. Функция $f(x,y) = x^4 + y^2$ имеет (0;0) единственной своей стационарной точкой и матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ второго дифференциала такая же, как в примере 2. Однако в точке (0;0) функция имеет минимум.

ПРИМЕР 4. Исследовать функцию $f(x,y) = (x^2 - y)e^y$ на экстремум.

РЕШЕНИЕ. Составим систему для определения стационарных точек функции: $f'_x = 2xe^y = 0$, $f'_y = \left(x^2 - y - 1\right) = 0$. Функция имеет единственную стационарную точку (0;-1). Матрица квадратичной формы имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & -1/e \end{pmatrix}$ и знак второго дифференциала не определен. Функция не имеет экстремумов.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
2. Дифференциалы высших порядков. Выражение дифференциалов через частные производные. Неинвариантность формы второго дифференциала.
3. Формула Тейлора для функции нескольких переменных с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано.
4. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума.
5. Экстремум функции нескольких переменных. Достаточные условия экстремума. Критерий Сильвестра.

## Лекция 26. Условный экстремум, наибольшее и наименьшее значение в области

### П.1. Условный экстремум

ОПР. В точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет условный максимум (минимум) при наличии ограничений в форме системы уравнений связи: $\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $k = 1,2,...,m$, если для любых решений $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \overset{0}{U}_\theta(x^0)$ этой системы выполнено неравенство $f(x_1, x_2, ..., x_n) < f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, ($f(x_1, x_2, ..., x_n) > f(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$).

В отличие от локального экстремума здесь предполагается выполнение неравенства не для всех $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \in \overset{0}{U}_\theta(x^0)$, а только для тех, которые удовлетворяют системе уравнений связи.

ПРИМЕР 1. Исследовать функцию $u = x^2 + y^2$ на экстремум, если переменные $x$ и $y$ связаны соотношением: $x + y = 1$.

РЕШЕНИЕ. Выражая $y$ через $x$ из уравнения связи и подставляя его в функцию, получим $u = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$ – квадратный трехчлен, имеющий минимум в точке $x = 0{,}5$. Тогда функция $u = x^2 + y^2$ на прямой $x + y = 1$ имеет условный минимум в точке $(0{,}5;0{,}5)$.

Предположим, что функции $\varphi_k$, $k = 1,2,...,m$ и $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируемы и система связей определяет неявно функции

$$\begin{cases} x_{n-m+1} = \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-m}), \\ x_{n-m+2} = \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-m}), \\ x_{n-m+l} = \psi_l(x_1, x_2, ..., x_{n-m}), \\ \quad x_n = \psi_m(x_1, x_2, ..., x_{n-m}). \end{cases}$$

Здесь переменные $x_1, x_2, ..., x_{n-m}$ полагаются свободными, а переменные $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, ..., x_{n-m+l}, ..., x_n$ зависимыми от них. Дифференциалы зависимых переменных равны $dx_{n-m+l} = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} dx_i$ , $l = 1,2,...,m$ .и выражаются линейно через дифференциалы свободных переменных. Тогда дифференциал функции $u = \tilde{f}(x_1, x_2, ..., x_{n-m}) = f(x_1, x_2, ..., x_{n-m}, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_m)$ связан с дифференциалами свободных переменных соотношением:

$$df = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+l}} dx_{n-m+l} = \sum_{i=1}^{n-m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+l}} \cdot \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} \right) dx_i .$$

Для вычисления частных производных $\frac{\partial \psi_l}{\partial x_i}$ воспользуемся системой уравнений связи: $\begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_{n-m}, \psi_1, ..., \psi_m) \equiv 0, \\ \varphi_2(x_1, ..., x_{n-m}, \psi_1, ..., \psi_m) \equiv 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, ..., x_{n-m}, \psi_1, ..., \psi_m) \equiv 0 \end{cases}$ , которые тождественны по свободным переменным. Тогда частные производные $\frac{\partial \psi_l}{\partial x_i}$ связаны системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n-m+l}} \cdot \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} = 0, \\ k = 1, ..., m \end{cases} .$$

В предположении о независимости уравнений в системы связей, определитель матрицы $\phi = \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n-m+l}} \right\}$ порядка $m \times m$ в точке $x^0 = \left( x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 \right)$ отличен от нуля, и система имеет решение:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \\ . \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_i} \end{pmatrix} = -\phi^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \\ . \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\partial f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+1}}; \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+2}}; ...; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ матрицу-строку из частных производных функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по зависимым переменным, $\partial \varphi_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \\ . \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} \end{pmatrix}$ матрицу - столбец,

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_m) = -\partial f \cdot \phi^{-1}$. Тогда дифференциал функции $\tilde{f}$ в матричной форме примет вид: $d\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n-m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \cdot \partial \varphi \right) dx_i$.

ТЕОРЕМА 1 (необходимый критерий условного экстремума). Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ условный экстремум при наличии связей $\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $k = 1,2,...,m$, причем матрица $\tilde{\phi} = \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right\}$ порядка $m \times n$ в точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ имеет ранг m . Тогда функция

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 \cdot \varphi_1(x) + \lambda_2 \cdot \varphi_2(x) + ... + \lambda_m \cdot \varphi_m(x)$$

$(n+m)$ переменных $(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ имеет нулевые частные производные по всем своим аргументам, либо эти производные не существуют.

ДОК. Без ограничения общности полагаем, что базисный минор матрицы $\tilde{\phi} = \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right\}$ составляют последние $m$ ее столбцов, т.е. переменные $x_1, x_2, ..., x_{n-m}$ свободные, а частные производные по переменным $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, ..., x_{n-m+l}, ..., x_n$ входят в базисный минор. Тогда матрица $\phi = \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n-m+l}} \right\}$, состоящая из последних $m$ столбцов матрицы $\tilde{\phi} = \left\{ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_j} \right\}$, невырожденная и у нее есть обратная. Если в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет условный экстремум, то функция $\tilde{f}$ имеет в точке $\tilde{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_{n-m}^0\right)$ безусловный экстремум и тогда ее дифференциал

$d\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n-m} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \cdot \partial \varphi_i \right) dx_i$ равен нулю при любых значения $dx_i$.

Последнее возможно, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \cdot \partial \varphi_i = 0, \\ i = 1,2,...,n-m \end{cases}$. Поскольку выбор свободных переменных был произвольным, полученные соотношения должны выполняться для всех $i = 1,2,...,n$ .

Запишем систему в координатной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + ... + \lambda_m \cdot \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0 \\ i = 1,2,...,n \end{cases}.$$

Последние равенства выражают нулевое значение частных производных функции

$$F(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 \cdot \varphi_1(x) + \lambda_2 \cdot \varphi_2(x) + ... + \lambda_m \cdot \varphi_m(x)$$

по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ в точке $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$. Ее производные по переменным $\lambda = \left(\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_m\right)$ равны

$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_k} = \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, $k = 1,2,...,m$ в силу уравнений связи.

Функция $F(x, \lambda)$ называется функцией Лагранжа и она легко находится из условий задачи поиска условного экстремума.

ПРАВИЛО нахождения критических точек условного экстремума.

1. Написать функцию Лагранжа.
2. Найти частные производные функции Лагранжа по переменным $x_1, x_2, ..., x_n$ и приравнять их нулю.
3. Полученную систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + ... + \lambda_m \cdot \dfrac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0 \\ i = 1,2,...,n \end{cases}$$ с $(n + m)$ неизвестными

дополнить $m$ уравнениями связи $\begin{cases} \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ k = 1,2,...,m \end{cases}$.

4. Пусть $\left(x_1^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\right)$ решение расширенной системы.

Тогда $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ критическая точка условного экстремума.

Замечание. Для ответа на вопрос есть или нет в найденной критической точке условный экстремум, требуется дополнительное исследование. Оно состоит в попытке выразить из уравнений связи часть переменных через свободные переменные, их подстановку в функцию $f$ и переходу к решению задачи локального экстремума без ограничений. Второй вариант действий сводится к подстановке дифференциалов зависимых переменных в выражение второго дифференциала функции $f$ и установление знакопостоянства полученной квадратичной формы от дифференциалов свободных переменных, например, по критерию Сильвестра.

**ПРИМЕР 2. Найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в круг радиуса $R$.**

РЕШЕНИЕ. Пусть $(x;y)$, $x \ge 0, y \ge 0$ координаты вершины прямоугольника. Тогда нужно найти максимум функции $S = 4xy$ при условии, что $x^2 + y^2 = R^2$. Составим функцию Лагранжа $F(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - R^2)$ и систему для определения критической точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 4y + 2x\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 4x + 2y\lambda = 0,. \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

Вычитаем из второго уравнения первое: $\begin{cases} (x-y)(4-2\lambda) = 0, \\ 4x + 2y\lambda = 0, \\ x^2 + y^2 = R^2. \end{cases}$

Единственным решением системы в области $x \ge 0$, $y \ge 0$ является тройка $\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}; \dfrac{R}{\sqrt{2}}; -2\right)$. Из соображений существования и единственности решения задачи можно сказать, что искомым прямоугольником будет квадрат со стороной $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$. Формально этот результат может быть получен так:

$$d^2S = 8dx \cdot dy \text{ при } 2xdx + 2ydy\Big|_{x=y=\frac{R}{\sqrt{2}}} = 0 \Rightarrow dy = -dx \text{ и}$$

$d^2S = 8dx \cdot dy = -8(dx)^2 < 0$, т.е. в точке $\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}; \dfrac{R}{\sqrt{2}}; -2\right)$ максимум.

П.2. Наибольшее и наименьшее значение функции в области

Пусть задана функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в замкнутой области $\bar{D} \in R^n$ с границей $\partial D$ – поверхностью, задаваемой уравнением $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ с кусочно-гладкой функцией $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Это означает, что граница может состоять из конечного числа кусков, каждый из которых задается уравнением $\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ с дифференцируемой функцией $\varphi_k$. К границе области относятся также ребра, принадлежащие двум и более кускам границы.
Всякая непрерывная на $D$ функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимает на ней наибольшее и наименьшее значения.
ОПР. Число $A = \min\limits_{x \in D} f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется наименьшим значением функции $f$ в области $D$, если

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq A \quad \forall x \in D$, 2) $\exists \tilde{x} \in D : f(\tilde{x}) = A$.

ОПР. Число $B = \max\limits_{x \in D} f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется наибольшим значением функции $f$ в области $D$, если

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq B \quad \forall x \in D$, 2) $\exists \tilde{\tilde{x}} \in D : f(\tilde{\tilde{x}}) = B$.

Точки $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ могут быть внутренними точками области $D$ или граничными. Если точки $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ внутренние, то они являются критическими точками локального экстремума функции $f$ и их нахождение связано с поиском стационарных точек или точек, где не существует частных производные функции $f$. Если точки $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ принадлежат границе $\partial D$ области, то они являются критическими точками условного экстремума. Число налагаемых связей зависит от количества кусков поверхностей $\varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, которым принадлежит эта точка. Все критические точки заносятся в таблицу, в которой вычисляются значения функции $f$ в этих точках. Из полученных значений выбирают наибольшее и наименьшее.
ПРИМЕР 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin^2(x - y)$ в области $D = \{(x, y) : |x| - 1 \leq y \leq 0\}$.
РЕШЕНИЕ. Найдем внутренние критические точки функции:

$$\begin{cases} z'_x = 2\sin(x - y)\cos(x - y) = 0, \\ z'_y = -2\sin(x - y)\cos(x - y) = 0, \end{cases}$$

т.е. $y = x - \pi k$ или $y = x - \frac{\pi}{2} - \pi k$, $k \in Z$. Первая серия имеет пересечение с $D$ только при $k = 0$. Во всех этих точках значение функции равно нулю. Вторая серия не пересекается с областью $D$. Граница $D$ содержит три куска: 1) $\partial D_1 : y = 0, x \in [-1;1]$, 2) $\partial D_2 : y = -1 - x, x \in [-1;0]$, 3) $\partial D_3 : y = x - 1, x \in [0;1]$.

На первом куске границы $z_1 = \sin^2 x$, и наибольшее ее значение $z_{1,\max} = \sin^2 1$, а наименьшее $z_{1,\min} = 0$. На втором куске границы $z_2 = \sin^2(2x+1), x \in [-1;0]$. В критической точке $x = -0{,}5$ $z_{2,\min} = 0$, на границе отрезка $z_{2,\max} = \sin^2 1$. На третьем куске границы $z_3 = \sin^2 1$ функция постоянна. Таким образом, $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = \sin^2 1$ наименьшее и наибольшее значения функции в области.

УПРАЖНЕНИЕ. Приведите пример функции, у которой есть локальный максимум, но в нем функция не принимает своего наибольшего значения.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Понятие условного экстремума. Необходимый критерий условного экстремума.
2. Метод множителей Лагранжа для нахождения критических точек условного экстремума.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в ограниченной замкнутой области.

## Список рекомендованной литературы


1. Г.Е. Шилов. Математический анализ. Функции одной переменной. Части 1-2.М.: Наука, 1969.
2. В.А. Зорич. Математический анализ. Части 1-2. М.: Наука, 1984.