МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.А. Гришин

ФАКУЛЬТЕТ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Математический анализ 1

Курс лекций

Москва 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.А. Гришин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ 1

Курс лекций

Москва 2008

УДК 517.1(075)
ББК 22.161я7
Г 85

Гришин С.А. Математический анализ 1: Курс лекций.
М.: МИФИ, 2008. - 79 с.

Курс лекций по основам математического анализа снабжен большим количеством примеров, облегчающих восприятие материала лекций на практических занятиях. В нем содержатся теоретические упражнения, которые помогут студенту при подготовке к экзамену. В конце каждой лекции приводятся экзаменационные вопросы.

Адресовано студентам первого курса, изучающим математический анализ в первом семестре.

Рекомендовано редсоветом МИФИ в качестве учебного пособия.

Рецензент: доцент В.Д. Попов

ISBN 978-5-7262-0919-7

Корректор Н.В. Шумакова

Верстка книги полностью соответствует предоставленному автором оригиналу - макету.

Подписано в печать 20.05.08 Формат 60×84 1/16
Тираж 100 экз. Объем 5,0 п.л. Изд. № 059-1 Заказ
Типография МИФИ, Каширское шоссе, д.31

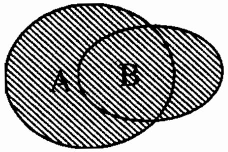
Оглавление

Лекция 1. Вещественные числа.

П.1. Множества, простейшие операции над множествами

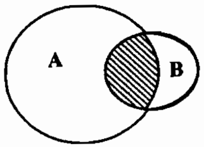
Объединение множеств:

$A+B=A\cup B=\{x\in A+B : x\in A \text{ или } x\in B\}$

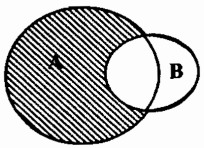


Пересечение множеств:

$A\cdot B=A\bigcap B=\{x\in A\cdot B : x\in A \text{ и } x\in B\}$

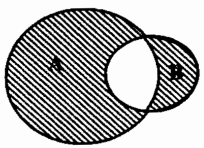


Разность множеств: $A\setminus B=A-B=\{x\in A\setminus B : x\in A \text{ и } x\notin B\}$

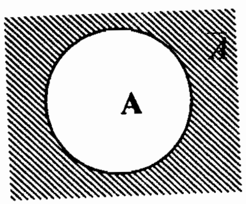


Симметрическая разность:

$A\Delta B=(A+B)-(A\cdot B)=(A\setminus B)+(B\setminus A)$



Отрицание множеств: $\overline{A}=\{x\in \overline{A} : x\notin A\}$.



ПРИМЕР 1. A – множество студентов, сдавших физику и математику на оценку 4 или 5. B – множество студентов с рыжими волосами. C – множество студентов, занимающихся спортом. Какие студенты входят в множество $(A\Delta B)\cdot\overline{C}$?

Ответ: это либо не рыжие хорошисты, не занимающиеся спортом, либо рыжие троечники, не занимающиеся спортом.

Приведем несколько «формул» в алгебре множеств:

1) $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$. 2) $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$ 3) $A\cdot\left(\overline{B}+B\right)=A$

и способ их доказательств.

ПРИМЕР 2. Доказать, что $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$.

ДОК. $x\in\overline{A\cdot B}$

$$\Rightarrow x\notin A\cdot B\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\notin A,\\ x\notin B\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\overline{A},\\ x\in\overline{B}\end{array}\right.\Rightarrow x\in\overline{A}+\overline{B}.\ x\in\overline{A}+\overline{B}$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\overline{A},\\ x\in\overline{B}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\notin A,\\ x\notin B\end{array}\right.\Rightarrow x\notin A\cdot B\Rightarrow x\in\overline{A\cdot B}.$$

П.2. Вещественные числа (множество R)

Аксиомы вещественных чисел.

1. Аксиомы сложения. В множестве вещественных чисел определена операция сложения, т.е. $\forall x,y\in R$ определено вещественное число $x+y$, причем эта операция удовлетворяет условиям:

1.1) существует нуль, т.е. такой элемент $\theta\in R$, для которого

$$x+\theta=\theta+x=x,\quad \forall x\in R.$$

1.2) существует «противоположный» элемент:

$$\forall x\in R\ \exists(-x): x+(-x)=\theta.$$

1.3) «правило расстановки скобок»:

$$(x+y)+z=x+(y+z),\quad \forall x,y,z\in R.$$

1.4) коммутативность: $x+y=y+x$.

2. Аксиомы умножения. Во множестве вещественных чисел определена операция умножения, т.е. $\forall x,y\in R$ определено вещественное число $x\cdot y$, причем эта операция удовлетворяет условиям:

2.1) существует единица, т.е. такой элемент $1\in R$, для которого

$$1\cdot x=x\cdot 1=x,\quad \forall x\in R.$$

2.2) для каждого $x \neq \theta$ существует «обратный» элемент x^{-1}:

$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

2.3) «правило расстановки скобок»:

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \ \forall x, y, z \in R$.

2.4) коммутативность: $x \cdot y = y \cdot x$

3. Аксиомы сложения и умножения.

3.1) правило раскрытия скобок:

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \ \forall x, y, z \in R$

4. Аксиомы порядка.

Во множестве действительных чисел определено отношение порядка $\leq$ *или* $\geq$, т.е. для каждой пары $x, y \in R$ справедливо одно из высказываний: $x \leq y$ или $x \geq y$. Это отношение удовлетворяет следующим условиям:

4.1. $x \leq x$

4.2. Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

4.3. Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$.

4.4. Если $x \leq y$, то $x + z \leq y + z, \ \forall z \in R$.

4.5. Если $\theta \leq x$ и $\theta \leq y$, то $\theta \leq x \cdot y$

5. Аксиома полноты.

5.1.Пусть X,Y и Z подмножества R такие, что $Y \subset X$ и $Z \subset X$, причем $\forall y \in Y$ и $\forall z \in Z$ справедливо высказывание $y \leq z$. Тогда $\exists a \in X$, для которого $y \leq a \leq z$ при любых $y \in Y, z \in Z$

Множество, содержащее более двух элементов, с введенными операциями сложения и умножения, удовлетворяющими аксиомам 1 – 5 ,называется множеством вещественных чисел, а его элементы – вещественными (или действительными) числами.

Отметим некоторые СЛЕДСТВИЯ из аксиом вещественных чисел:

Сл.1. Единственность нуля.

Док. Если нуля два, θ_1 *и* θ_2, то $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

Сл.2. $-(-x) = x$.

Док. $-(-x) = \theta - (-x) = x + (-x) + (-(-x)) = x + \theta = x$.

Сл3. $\theta \cdot x = \theta, \ \forall x \in R$

Док. $x = x \cdot 1 = x \cdot (1 + \theta) = x + x \cdot \theta = x + \theta \cdot x$, т.е. $\theta \cdot x = \theta$.

Сл.4. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Док.

$\theta = (1 + (-1)) \cdot (1 + (-1)) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)$

$= 1 + (-1) + (-1) + (-1) \cdot (-1) =$

$= \theta + (-1) + (-1) \cdot (-1) = (-1) + (-1) \cdot (-1)$, т.е. $(-1) \cdot (-1) = 1$.

П.3. КОМПЛЕКСНЫЕ числа и действия с ними

Обобщение понятия числа возможно на пути включения вещественных чисел в более обширное множество, в котором некоторые аксиомы вещественных чисел (4-5) не выполняются. В этом множестве должны быть введены операции (сложение, умножение, деление) так, чтобы их сужение на множество вещественных чисел сохраняло смысл аналогичной операции в R.

ОПР. Комплексным числом z называют пару вещественных чисел: $z = (a, b)$. Число a называют вещественной, а b - мнимой частью комплексного числа z. Если мнимая часть равна нулю, то комплексное число $(a, 0)$ называют вещественным или действительным. Его отождествляют с вещественным числом $a = (a, 0)$. Если вещественная часть комплексного числа равна нулю, то число называют чисто мнимым. В качестве примера чисто мнимого числа рассмотрим число $i = (0, 1)$, называемое мнимой единицей. Два комплексных числа равны, если у них равны вещественные и мнимые части. Отношение порядка для комплексных чисел не определены: нельзя сказать, что одно комплексное число больше или меньше другого комплексного числа. Например, высказывание о том, что комплексное число положительно, имеет смысл только в том случае, если оно вещественное положительное число.

ОПР. Операция сложения двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определена так: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, т.е. складываются вещественные и мнимые части комплексного числа.

ОПР. Операция умножения двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ определена так:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

ОПР. Операция деления двух комплексных чисел

$z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ определена так:

$$z_1/z_2=\frac{1}{a_2^2+b_2^2}(a_1\cdot a_2+b_1\cdot b_2,\, a_2b_1-a_1b_2).$$

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ.

1. Если во всех операциях участвуют комплексные числа с нулевой мнимой частью, т.е. действительные числа, то их действия сводятся к аналогичным операциям в R.

2. Введенные операции сложения, умножения и деления удовлетворяют аксиомам 1-3.

Действительно, роль нуля в аксиоме 1.1 играет 0=(0,0). Противоположным элементом для $z=(a,b)$ является число $(-a,-b)$. Легко проверяется для сложения правило расстановки скобок и коммутативность сложения. Единицей в аксиоме 2.1 является число $(1,0)$ – вещественная единица:

$$z\cdot 1=(a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1)=(a,b)=z.$$

Комплексное число $z^{-1}=\dfrac{1}{a^2+b^2}(a,-b)=\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},-\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$ является обратным элементом к $z=(a,b)$, поскольку

$$z\cdot z^{-1}=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\frac{ab-ba}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1\cdot$$

Проверим правило расстановки скобок в аксиоме 2.3 умножения:

$$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)\cdot(a_3,b_3)=$$

$$=((a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+a_2b_1)b,\ (a_1b_2+a_2b_1)a_3+(a_1a_2-b_1b_2)b_3).$$

Аналогично, $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(a_1,b_1)\cdot(a_2a_3-b_2b_3,\ a_2b_3+a_3b_2)=$

$$=(a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+a_3b_2),\ b_1(a_2a_3-b_2b_3)+a_1(a_2b_3+a_3b_2)).$$

Если внимательно посмотреть на вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел, то легко заметить, что они равны друг другу и $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Проверьте выполнение аксиом 2.4 и 3.1.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Проверьте, что если λ вещественное число, то

$$\lambda\cdot z=(\lambda a,\lambda b)$$

ПРИМЕР 3. Проверим, что $i^2=-1$.

РЕШЕНИЕ. $i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ интерпретация комплексного числа.

Если на плоскости XOY рассмотрена декартовая система координат, то любому комплексному числу $z=(a,b)$ соответствует точка на плоскости с координатами (a,b) и вектор с началом в точке $(0,0)$ и концом в точке (a,b). Вещественным числам соответствуют точки на оси OX. Операции сложения комплексных чисел соответствует сложение векторов на плоскости, умножению комплексного числа $z=(a,b)$ на вещественное число λ соответствует умножение вектора на λ.

ОПР. Модулем комплексного числа $z=(a,b)$ называют число

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Модуль комплексного числа – это длина соответствующего ему вектора на плоскости XOY.

ОПР. Аргументом комплексного числа $z=(a,b)$, обозначение $\arg z$, называют угол, который образует соответствующий ему вектор с положительным направлением оси OX. Принято считать, $\arg z\in[0;2\pi)$.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ форма комплексного числа.

Комплексное число можно представить в форме

$$z=(a,b)=a\cdot(1,0)+b\cdot(0,1)=a\cdot 1+bi=a+bi,$$

которая называется алгебраической. Здесь a и b – вещественная и мнимые части комплексного числа, а i мнимая единица. Эта форма удобна для выполнения операций над комплексными числами в виде преобразования алгебраических выражений с дополнительным условием: $i^2=-1$.

ПРИМЕР 4. Вычислить $z=\dfrac{1+i}{(1-i)^2}$.

РЕШЕНИЕ.

$$z=\frac{1+i}{1-2i+i^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1+i}{i}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+i)i}{i^2}=\frac{1}{2}(i+i^2)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА комплексного числа.
Если $\varphi = \arg z$, то $a = \operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$ и $b = \operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$.
Тогда комплексное число можно представить в форме:

$$z = a + bi = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

которая называется тригонометрической. Проследим за умножением комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) +$$
$$+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)) = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. В частности,

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

КОРЕНЬ степени n из комплексного числа.
ОПР. Комплексное число α называется корнем степени n из комплексного числа z, если $\alpha^n = z$.
ТЕОРЕМА. Существует ровно n значений корня степени n из комплексного числа z. Все они имеют одинаковый модуль, равный $\sqrt[n]{|z|}$, и аргументы, вычисляемые по формуле:

$$\arg\alpha_k = \frac{\arg z + 2\pi k}{n},\ k = 0,1,\ldots,(n-1).$$

ДОК.

$$\alpha^n = z \Rightarrow |\alpha|^n = |z|, \begin{cases}\cos(n\arg\alpha) = \cos\arg z\\ \sin(n\arg\alpha) = \sin\arg z\end{cases} \Rightarrow |\alpha| = \sqrt[n]{|z|},$$

$n\arg\alpha = \arg z + 2\pi k$, $k = 0,1,\ldots,(n-1)$.

ПРИМЕР 5. Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

РЕШЕНИЕ. $|i| = 1$, $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$. $\arg\alpha_0 = \dfrac{\pi}{6}$, $\arg\alpha_1 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6}$,
$\arg\alpha_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{3\pi}{2}$. $\alpha_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $\alpha_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$, $\alpha_2 = -i$.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Докажите, что для решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с произвольными комплексными коэффициентами, справедлива формула: $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, где корень вычисляется из комплексного числа.

П.4. Отображения множеств

Пусть X и Y два множества, принадлежащие R. Функцией $y = f(x)$, определенной на множестве X и принимающей значения в множестве Y, называют закон (правило), по которому каждому $x \in X$ сопоставляется единственное число $y \in Y$. Множество $X = D_f$ называется областью определения функции $y = f(x)$, множество $Y = E_f = \{y \in Y : \exists x \in X : y = f(x)\}$ областью ее значений. Удобно полагать, что с функцией связаны три объекта (X,f,Y): 1) область определения X, 2) правило f, 3) область значений Y. Если у двух функций хотя бы один из трех компонентов различаются, такие функции принято считать различными. Например, функции $(R, \sin, [-1;1])$ и $([-\pi/2;\pi/2], \sin, [-1;1])$ разные.
Отображение множеств $X \to Y$, осуществляемое функцией $y = f(x)$, называется сюръекцией, если $Y_f = Y$, и инъекцией, если каждое значение $y \in Y_f$ принимается функцией $y = f(x)$ только в одной точке $x \in X$, т.е. из равенства $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Если отображение $X \to Y$ одновременно сюръективно и инъективно, то оно называется биекцией. Функция $y = f_A(x)$ называется сужением функции $y = f(x)$ на множество A, если отображение $A \to Y$ удовлетворяет условию $f_A(x) = f(x)$, $\forall x \in A$. Множество значений функции $y = f_A(x)$ называется образом множества A при отображении $y = f(x)$. Множество $\{x \in X : f(x) \in B\}$ называется прообразом множества $B \subset Y$ при отображении $y = f(x)$. Если функция $y = f(x)$ осуществляет биективное отображение $X \to Y$, то на множестве Y может быть определена

функция $x = g(y)$, для которой $f(g(y)) \equiv y, \quad y \in Y$. Эта функция называется обратной к функции $y = f(x)$.

ПРИМЕР 6. $f(x) = \sin x, \quad x \in X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], Y = [-1;1]$.

Функция $y = \arcsin x$ является обратной.

ПРИМЕР 7. Отображение $X = [-1;1] \to Y = [0;1]$, осуществляемое функцией $y = x^2$, сюръективно.

ПРИМЕР 8. Отображение $X = [0;1] \to Y = [0;1]$, осуществляемое функцией $y = x^2$, биективно и функция $y = \sqrt{x}$ обратная.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Множества, операции над множествами, примеры.
2. Аксиомы вещественных чисел и их следствия.
3. Комплексные числа, действия с ними в алгебраической и тригонометрической формах.
4. Корень степени n из комплексного числа.
5. Отображения множеств. Сюръективные, инъективные и биективные отображения. Обратное отображение. Примеры.

Лекция 2. Множество вещественных чисел (продолжение).

П.1. Понятия $\sup X$ и $\inf X$

ОПР. Числовое множество X называют ограниченным сверху, если найдется число M, для которого $x \le M, \quad \forall x \in X$.

ОПР. Числовое множество X называют ограниченным снизу, если найдется число m, для которого $m \le x, \quad \forall x \in X$.

ОПР. Числовое множество X называют ограниченным , если найдутся числа m и M, для которых $m \le x \le M, \quad \forall x \in X$.

Наименьшее из чисел M, ограничивающих сверху множество X, называют точной верхней гранью этого множества. Аналогично, наибольшее из чисел m , ограничивающих множество X снизу, называют точной нижней гранью множества X. Точнее об этом в следующем определении.

ОПР. Число $\tilde{M}$ называют точной верхней гранью множества X, $\tilde{M} = \sup X$, если выполнены два условия:

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \le \tilde{M}$, 2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > \tilde{M} - \varepsilon$.

ОПР. Число $\tilde{m}$ называют точной нижней гранью множества X, $\tilde{m} = \inf X$, если выполнены два условия

1) $\forall x \in X \Rightarrow x \ge \tilde{m}$, 2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x_\varepsilon \in X : x < \tilde{m} + \varepsilon$.

Точные верхняя и нижняя грани множества X могут не принадлежать множеству X.

ПРИМЕР 1. Множество X является множеством значений последовательности $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Найти $\sup X$ и $\inf X$.

РЕШЕНИЕ. Докажем, что $\sup X = 2$. Действительно,

$a_n = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2} \le 2, \quad \forall n \in N$. Для любого

$\varepsilon > 0 \quad \exists \, a_n > 2 - \varepsilon$. Решаем последнее неравенство относительно n:

$2 - \frac{3}{n+2} > 2 - \varepsilon \;\Rightarrow n > \frac{3-2\varepsilon}{\varepsilon}$. Заметим, что $2 \notin X$. Поскольку последовательность a_n возрастающая, то $a_1 = 1 \ge a_n \quad \forall n \in N$, т.е. $\inf X = 1$ и $1 \in X$.

ТЕОРЕМА 1. Любое непустое, ограниченное сверху множество $X \in R$, имеет $\sup X$.

ДОК. Пусть У – множество верхних граней множества X: $y \in Y : x \le y, \forall x \in X$. По аксиоме о полноте множества вещественных чисел (аксиома 5), найдется число $\widetilde{M}$, для которого $x \le \widetilde{M} \le y,\ \ \forall x \in X, \forall y \in Y$. Таким образом, $\widetilde{M} \in Y$ и является в нем наименьшим элементом, т.е. $\widetilde{M} = \sup X$.

УПРАЖНЕНИЕ. Множество X имеет только одну точную верхнюю грань.

ДОК. Пусть $\widetilde{M}_1$ и $\widetilde{M}_2$ - две такие грани и $\widetilde{M}_1 < \widetilde{M}_2$. Тогда по определению $\sup X$ для $\varepsilon = \widetilde{M}_2 - \widetilde{M}_1$ найдется $x_\varepsilon > \widetilde{M}_1$, что противоречит условию $\widetilde{M}_1 = \sup X$.

Аналогично доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Любое непустое, ограниченное снизу множество $X \in R$, имеет и единственное $\inf X$.

П.2. Множество рациональных чисел Q

Числа вида $\dfrac{m}{n}$, $m, n \in Z$, $n \ne 0$ называются рациональными. Два рациональных числа $\dfrac{m_1}{n_1}$ и $\dfrac{m_2}{n_2}$ равны, если $m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Множество $X \in R$ называется всюду плотным в R, если $\forall a, b \in R, a < b\ \ \exists x \in X : a \le x < b$ *или* $a < x \le b$.

ТЕОРЕМА 3. Множество Q рациональных чисел всюду плотно в R.

ДОК. Пусть $a < b$ два произвольных вещественных числа. Выберем натуральное n, для которого $\dfrac{1}{n} < (b - a)$. Пусть K множество целых чисел $\left\{k \in K : \dfrac{k}{n} \le a\right\}$. Множество K ограничено сверху и существует $\widetilde{k} = \sup K$, притом $\widetilde{k} \in K$. Тогда $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\widetilde{k}+1}{n} \in [a; b]$.

ОПР. Два множества X и Y называются равномощными, если существует биекция $f : X \to Y$.

ОПР. Множество X равномощное с N называется счетным.

ТЕОРЕМА 4. Множество Q счетное.

ДОК. Покажем, что всякое бесконечное подмножество Y счетного множества X также счетное. $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда $Y = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, ..\}$ и отображение $f : k \to n_k$ является биекцией $N \to Y$.

Рассмотрим множество X точек на плоскости с координатами $(p;q)$, $p \in Z$, $q \in N$. Множество X счетное.
(соответствующая биекция изображена на рис.1)

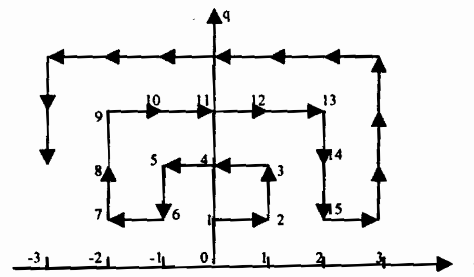


Рис.1

Рассмотрим подмножество $\widetilde{X} \in X$, состоящее из пар $(p;q)$, $p \in Z$, $q \in N$, для которых дробь $\dfrac{p}{q}$ несократима. По доказанному, множество $\widetilde{X}$ счетное и отображение $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to Q$ биективное. Тогда отображение $N \xrightarrow{f} \widetilde{X} \xrightarrow{\widetilde{f}} Q$ биекция и множество рациональных чисел счетное.

П.3. Система вложенных отрезков

ОПР. Система отрезков $[a_n; b_n]$ называется системой вложенных отрезков, если $[a_m; b_m] \subset [a_n; b_n],\ \forall m > n$.

ТЕОРЕМА 5. Любая система вложенных отрезков имеет общую точку.

ДОК. Рассмотрим множества $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $B=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Множества А и В ограничены и $x \le y,\ \forall x \in A, \forall y \in B$. Тогда по аксиоме полноты существует $c \in R$, для которого

$$x \le c \le y,\ \forall x \in A, \forall y \in Y \text{., т.е. } c \in [a_n; b_n],\ \forall n \in N.$$

ОПР. Система вложенных отрезков называется стягивающейся, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \to b_n - a_n < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 6. Система стягивающихся отрезков имеет единственную общую точку.

ДОК. Пусть c_1 и c_2 две такие точки и $x \le c_1 < c_2 \le y,\ \forall x \in A, \forall y \in B$.
Тогда $y - x > c_2 - c_1$, т.е. $b_n - a_n > c_2 - c_1,\quad \forall n \in N$.
Последнее противоречит условию стягивания.

ТЕОРЕМА 7 . Множество всех точек отрезка $[0;1]$ несчетно.

ДОК. Предположим обратное: $[0;1] = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$. Разобьем отрезок $[0;1] = \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ на части и выберем ту из них, которая не содержит x_1. Далее выбранный отрезок разобьем на три части и выберем ту, которая не содержит x_2 и т.д. Полученная совокупность вложенных отрезков стягивающаяся. По теореме 1 существует число $c \in [0;1]$, не совпадающее ни с одним из x_n. Полученное противоречие доказывает, что множество [0;1] несчетно. Множества равномощные с [0;1] называются множествами мощности континуума.

УПРАЖНЕНИЯ:

1. Докажите, что множество всех интервалов с рациональными концами счетное.
2. Докажите, что множество попарно не пересекающихся интервалов на действительной оси, конечно или счетное.
3. Множество всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, имеет мощность континуума.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Числовые множества. Понятие точной верхней и нижней грани. Теорема о существовании точной верхней и нижней грани ограниченного числового множества.
2. Множество рациональных чисел. Теорема о всюду плотности рациональных чисел.
3. Счетные множества. Теорема о счетности множества рациональных чисел.
4. Система вложенных отрезков. Теорема о непустоте их пересечения. Система стягивающихся вложенных отрезков. Теорема о единственности точки их пересечения.
5. Теорема о несчетности множества точек отрезка вещественной оси.

Лекция 3. Последовательности, предел последовательности.

ОПР. Последовательностью $\{a_n\}$ называют числовую функцию, заданную на множестве N натуральных чисел

$$\forall n \in N \xrightarrow{f} a_n = f(n).$$

Последовательность может задаваться явно, например,

$$(1)\ a_n = \frac{3n+2}{n+1} \quad (2)\ a_n = \frac{n\cos\frac{n\pi}{3}}{n+1} \quad (3)\ a_n = n \quad (4)\ a_n = (-1)^n n$$

и рекуррентно, например, (5) $a_{n+1} = a_n + d$ (ариф. прогр.)

(6) $a_{n+1} = qa_n$ (геом. прогр.) (7) $a_n = f(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$.

ОПР.Последовательность $\{a_n\}$ ограничена (сверху, снизу), если этим свойством обладает множество ее значений.

ОПР. Последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает (убывает), если $a_n \le a_{n+1}$, $(a_n \ge a_{n+1})$ для любого n. Если неравенства строгие, говорят о строгом возрастании (убывании) последовательности.

В примерах: (1) монотонно возрастающая, ограниченная последовательность; (2) ограниченная, не монотонная последовательность; (3) монотонно возрастающая, неограниченная последовательность ; (4) неограниченная, не монотонная последовательность; (5) неограниченная, монотонно убывающая при d<0, монотонно возрастающая при d>0; (6) ограниченная при $|q| \le 1$, неограниченная при $|q| > 1$, монотонная при $q > 0$, не монотонная при $q < 0$.

ОПР. Окрестностью точки x_0 радиуса ε>0 называют множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in R; |x - x_0| < \varepsilon\}.$$

ОПР. Множество $\overset{0}{U}_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ называют выколотой окрестностью точки x_0.

ОПР. Число B называют предельной точкой (частичным пределом) последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(B)$ содержит бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

В примерах: (1) число $B = 3$ является единственной предельной точкой последовательности; (2) числа $B = \pm 1, \pm\frac{1}{2}$ являются предельными точками последовательности; (3), (4), (5) предельных точек не имеют; (6) число $B = 0$ предельная точка при $|q| \le 1$, при $|q| > 1$ предельных точек нет.

ОПР. Число A называется пределом последовательности, если A ее предельная точка и вне любой окрестности $U_\varepsilon(A)$ содержится конечное число членов последовательности $\{a_n\}$:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \to |a_n - A| < \varepsilon.$$

Если последовательность имеет предел, то она называется сходящейся. В примерах: (1) последовательность имеет предел $A = 3$; (2), (3), (4), (5) предела не имеют; (6) имеет предел A=0 при $|q| \le 1$, не имеет предела при $|q| > 1$.

ТЕОРЕМА 1. Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

ДОК. Из ограниченности последовательности $\{a_n\}$ следует существование отрезка $[c_1;b_1]$, для которого $a_n \in [c_1;b_1]$, $\forall n$. Разделим отрезок пополам и выберем ту половину $[c_2;b_2]$, которая содержит бесконечное число $\{a_n\}$. Если обе половины обладают этим свойством, то выбираем любую. Делим отрезок $[c_2;b_2]$ пополам и выбираем ту половину $[c_3;b_3]$, которая содержит бесконечное число $\{a_n\}$. Продолжая процесс деления, построим систему стягивающихся, вложенных отрезков $[c_n;b_n]$.По теореме о вложенных отрезках существует число B, принадлежащее каждому отрезку $[c_n;b_n]$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ окрестность $U_\varepsilon(B)$ содержит отрезок $[c_n;b_n]$ с достаточно большим номером n_ε. Тогда, по построению последовательности $[c_n;b_n]$ в окрестности $U_\varepsilon(B)$ содержится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

ОПР. Последовательность $\{a'_n\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}$, если $a'_k = a_{n_k}$. Всякая предельная точка подпоследовательности $\{a'_n\}$ является предельной точкой последовательности.

ТЕОРЕМА 2. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предельную точку B, то она имеет сходящуюся подпоследовательность, имеющую B своим пределом.

ДОК. Выберем в каждом отрезке $[c_k;b_k]$, описанном в теореме 1, член a_{n_k} последовательности $\{a_n\}$. Подпоследовательность $\{a'_k\}$, $a'_k = a_{n_k}$, имеет, по построению, число B своим пределом.

В примерах: (2) подпоследовательность $\{a'_k\}, a'_k = a_{6k}$ имеет предел $B_1=1$, подпоследовательность $\{a'_k\}, a'_k = a_{6k\pm1}$ имеет предел $B_2=0{,}5$, подпоследовательность $\{a'_k\}, a'_k = a_{6k\pm2}$ имеет предел $B_3= - 0{,}5$, подпоследовательность $\{a'_k\}, a'_k = a_{6k+3}$ имеет предел $B_4= - 1$; (4) подпоследовательность $\{a'_k\}, a'_k = a_{2k}$ имеет предел $B_1=1$, подпоследовательность $\{a'_k\}, a'_k = a_{2k+1}$ имеет предел $B_2= - 1$.

ТЕОРЕМА 3.Если последовательность $\{a_n\}$имеет предел, равный A, то любая ее подпоследовательность сходится, причем A является ее пределом (доказать самостоятельно).

ТЕОРЕМА 4. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

ДОК. Пусть $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\varepsilon>0$ произвольно мало. Тогда, по определению предела, множество E_a значений последовательности $\{a_n\}$с номерами $n>n_\varepsilon$ принадлежит $U_\varepsilon(A)$ и является ограниченным. Если добавить к E_a конечное множество значений $\{a_n\}$ с номерами $n\le n_\varepsilon$, то полученное множество также будет ограниченным.

ТЕОРЕМА 5. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то он единственный.

ДОК. Пусть таких пределов два: A_1 и A_2. Выберем $\varepsilon<0{,}5\cdot|A_1-A_2|$. Тогда окрестности $U_\varepsilon(A_1)$ и $U_\varepsilon(A_2)$ не пересекаются и в каждой из них должны содержаться все члены последовательности, кроме конечного их числа, что невозможно.

УПРАЖНЕНИЯ: 1. Приведите пример последовательности, имеющей три предельные точки. 2. Множество рациональных чисел счетное, поэтому существует последовательность, членами которой являются все рациональные числа. Какое множество предельных точек такой последовательности?

ТЕОРЕМА 6. Всякая монотонно возрастающая (убывающая), ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.

ДОК. Заметим, что из ограниченности сверху и условия $a_1\le a_n,\ \forall n$ следует ограниченность $\{a_n\}$. Тогда по теореме 1 у нее есть предельная точка А. Докажем, что А является пределом последовательности $\{a_n\}$. Пусть $U_\varepsilon(A)$ произвольная окрестность точки А. Поскольку А предельная точка, то

$$\exists\ n_\varepsilon : a_{n_\varepsilon} \in U_\varepsilon(A),\ a_{n_\varepsilon} \le a_n \le A,\ \forall n > n_\varepsilon,$$

т.е. вне окрестности $U_\varepsilon(A)$ содержится только конечное число членов последовательности.

ОПР. Пусть M_a – множество предельных точек последовательности $\{a_n\}$. Предположим, что оно не пусто и ограничено. Числа $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=\sup M_a$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n=\inf M_a$ называют верхним и нижним пределами последовательности $\{a_n\}$.

ТЕОРЕМА 7. Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то числа $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ являются предельными точками и принадлежат M_a.

ДОК. Построим подпоследовательность $\{a'_k\}$, предел которой равен $\overline{A} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$. По определению $\sup M_a$, для $\varepsilon_k = 2^{-k}$ существует a_{n_k} : $\overline{A} - \varepsilon_k < a_{n_k} < \overline{A}$. Тогда подпоследовательность $a'_k = a_{n_k}$ сходящаяся и $\overline{A}$ ее предел, т.е. $\overline{A}$ предельная точка.

Доказательство для $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ аналогично.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Последовательности и способы их задания, примеры. Ограниченные, монотонные последовательности. Предельные точки (частичные пределы) последовательности. Теорема о существовании предельных точек.
2. Предел последовательности. Теорема о единственности предела. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
3. Подпоследовательности. Предельная точка как предел сходящейся подпоследовательности . Понятие верхнего и нижнего предела последовательности. Теорема о принадлежности верхнего и нижнего пределов множеству предельных точек последовательности.
4. Теорема о существовании предела монотонной, ограниченной последовательности.

Лекция 4. Предел последовательности (продолжение).

ОПР. Последовательность называется фундаментальной (или удовлетворяющей критерию Коши), если

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \text{ и } \forall p \in N \to |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon .$$

ТЕОРЕМА 1. Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна и наоборот.

ДОК. Пусть последовательность фундаментальна $\{a_n\}$. Тогда она ограничена. Действительно, все члены последовательности $\{a_n\}$ с номерами, большими n_ε, лежат на интервале $(a_{n_\varepsilon+1} - \varepsilon; a_{n_\varepsilon+1} + \varepsilon)$, остальные, возможно, этому интервалу не принадлежат, но их конечное число. Тогда по теореме 1 (лекция3) последовательность $\{a_n\}$ имеет предельную точку A. Докажем, что A является пределом $\{a_n\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем натуральное n_ε, для которого

(1) $|A - a_{n_\varepsilon}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (A – предельная точка) ; (2) $|a_{n_\varepsilon+p} - a_{n_\varepsilon}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall p > 0$ (фундаментальность). Тогда

$$|A - a_n| = |A - a_{n_\varepsilon+p}| \le |A - a_{n_\varepsilon}| + |a_{n_\varepsilon} - a_{n_\varepsilon+p}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,\forall n > n_\varepsilon .$$

Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходящаяся. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдем натуральное число n_ε, для которого

(3) $|A - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; (4) $|A - a_{n+p}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall p > 0$ и $\forall n > n_\varepsilon$.

Тогда $|a_{n+p} - a_n| \le |a_{n+p} - A| + |A - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

т.е. последовательность фундаментальна.

ОПР. Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

ОПР. Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если $\forall\varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \to |a_n| > \varepsilon$. В этом случае: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

ТЕОРЕМА 2 (о связи сходящейся последовательности с бесконечно малой последовательностью).

Если $\{a_n\}$ сходящаяся последовательность, имеющая пределом число A, то существует бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$, такая, что $a_n = A + \alpha_n$.

ДОК. Проверим, что последовательность $\alpha_n = a_n - A$ бесконечно малая.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \rightarrow |\alpha_n| = |a_n - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

ТЕОРЕМА 3 (о связи бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями).

Если последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая, то последовательность $\alpha_n = \dfrac{1}{a_n}$ бесконечно малая последовательность (б.м.п).

Если $\{a_n\}$ бесконечно малая последовательность и $a_n \neq 0$, то $\alpha_n = \dfrac{1}{a_n}$ бесконечно большая последовательность (б.б.п).

ДОК. По условию последовательность $\{a_n\}$ бесконечно большая:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \rightarrow |a_n| > \dfrac{1}{\varepsilon} \rightarrow |\alpha_n| = \dfrac{1}{|a_n|} < \varepsilon$, т.е. последовательность α_n бесконечно малая.

Если $\{a_n\}$ б.м.п., то

$\forall M > 0 \ и \ \varepsilon = \dfrac{1}{M} \, \exists n_M : \forall n > n_M \rightarrow |a_n| < \varepsilon \rightarrow \dfrac{1}{|a_n|} = |\alpha_n| > \dfrac{1}{\varepsilon} = M$.

ТЕОРЕМА 4 (арифметические теоремы о бесконечно малых последовательностях).

Пусть α_n и β_n две бесконечно малые последовательности, θ_n ограниченная последовательность. Тогда (1) последовательность $\alpha_n + \beta_n$ бесконечно малая; (2) последовательность $\theta_n \cdot \alpha_n$ бесконечно малая.

ДОК. (1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \rightarrow |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}, |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} \rightarrow$
$|\alpha_n + \beta_n| < |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$;

(2) $|\theta_n| \leq M$, $\forall n$ (ограниченность):

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \rightarrow |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ (б.м.п), $|\theta_n \cdot \alpha_n| \leq M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 5 (арифметические теоремы о пределах последовательностей).

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ две сходящиеся последовательности и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

ДОК. утверждения (3): $a_n = A + \alpha_n$, $b_n = B + \beta_n$, где α_n, β_n б.м.п. (теорема 2). Если $B \neq 0$, то последовательность $\dfrac{1}{Bb_n}$ ограничена и $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{Bb_n}(a_n B - b_n A)$. Последовательности $(a_n B - b_n A)$ б.м.п. и $\dfrac{1}{Bb_n}(a_n B - b_n A)$ б.м.п. (теорема 4). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$ (теореме 2). Утверждения (1), (2) доказать самостоятельно.

ТЕОРЕМА 6 (о переходе к пределу в неравенствах).

Пусть (1) $\{a_n\}$, $a_n > 0, \forall n$ сходящаяся последовательность. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = A \geq 0$. Пусть (2) $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ две сходящиеся последовательности, причем $a_n > b_n, \forall n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

ДОК. утверждения (1). Предположим противное : $A<0$. Тогда для $\varepsilon<\dfrac{|A|}{2}\ \exists\, n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon \to a_n<A+\varepsilon<0$, что противоречит условию (1) теоремы.

Док. утверждения (2). Для последовательности $\theta_n=a_n-b_n$ выполняются условия (1) теоремы, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}a_n - \lim\limits_{n\to\infty}b_n\geq 0$.

ТЕОРЕМА 7 (о промежуточной последовательности).
Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $a_n\leq b_n, \forall n$ две сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$. Последовательность $\{\theta_n\}$ удовлетворяет неравенству : $a_n\leq\theta_n\leq b_n, \forall n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=A$.

ДОК. $\forall\varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon:\forall n>n_\varepsilon\to A-\varepsilon<a_n\leq\theta_n\leq b_n<A+\varepsilon$,

т.е. $|A-\theta_n|<\varepsilon$.

ТЕОРЕМА 8 (замечательный предел). Последовательность

$a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ имеет предел, равный числу e=2,71….

ДОК. Напомним формулу бинома Ньютона:

$(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}c_n^k a^{n-k}b^k$, где $c_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n\cdot(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$

коэффициенты бинома. Применим формулу для

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\ldots=$$

$=1+1+\dfrac{1}{2!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+\dfrac{1}{3!}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{2}{n}\right)+\ldots$. При увеличении n число слагаемых в сумме увеличивается, а каждое слагаемое также увеличивается, т.е. $\{a_n\}$ монотонно возрастающая последовательность. Докажем ее ограниченность сверху:

$$a_n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\ldots<1+2=3.$$

Тогда по теореме 6 (лекция 3) $\{a_n\}$ имеет предел и он называется числом е.

УПРАЖНЕНИЯ: 1. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ сходящаяся, то последовательность $\{|a_n|\}$ также сходящаяся;
2. Справедливо ли утверждение: сумма двух бесконечно больших последовательностей является бесконечно большой последовательностью? (обосновать); 3. Доказать, что произведение двух бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.
1. Фундаментальная последовательность. Теорема о сходимости фундаментальной последовательности.
2. Бесконечно малые последовательности. Теорема о связи сходящейся и бесконечно малой последовательностями.
3. Бесконечно большие последовательности. Теорема о связи бесконечно большой и бесконечно малой последовательностями.
4. Арифметические теоремы о бесконечно малых последовательностях.
5. Арифметические теоремы о пределах.
6. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.
7. Теорема о промежуточной последовательности.
8. Число е.

Лекция 5. Предел функции

Предполагаем, что функция $f: E \xrightarrow{f} R$ определена в выколотой окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$ точки a радиуса θ.

ОПР. (Коши) Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon : 0 < \delta_\varepsilon < \theta : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \to |f(x) - A| < \varepsilon .$$

ОПР.(Гейне) Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если

$$\forall \{x_n\}, x_n \neq a,: \lim_{n \to \infty} x_n = a \to \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A .$$

Множество V на числовой оси называется открытым, если $\forall a \in V \, \exists \overset{0}{U}_\theta(a) \subset V$. Любое открытое множество V(a), содержащее точку a, называют окрестностью точки a.

ОПР.(топологическое) Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, обозначение $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если

$$\forall V(A) \exists V(a) : \forall x \in V(a) \cap \overset{0}{U}_\theta \to f(x) \in V(A) .$$

ТЕОРЕМА 1. Определения по Гейне и по Коши предела функции в точке эквивалентны, т.е. если число A является пределом функции по Коши, то оно же является пределом по Гейне и наоборот.

ДОК. (1) Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ по Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta_\varepsilon : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \to |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность, для которой $\exists n_{\delta_\varepsilon} : \forall n > n_{\delta_\varepsilon} \to |x_n - a| < \delta_\varepsilon$. Тогда $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$. (2) Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ по Гейне. Предположим, что число А не является пределом функции $f(x)$ по Коши. Тогда

$$\exists \tilde{\varepsilon} > 0 : \forall \delta = \frac{1}{n} \exists x_n : 0 < |x_n - a| < \delta \to |f(x_n) - A| > \tilde{\varepsilon} .$$

Построенная последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Тогда $\exists n_{\tilde{\varepsilon}} : \forall n > n_{\tilde{\varepsilon}} \to |f(x_n) - A| < \tilde{\varepsilon}$. Полученное противоречие доказывает, что число A является пределом функции по Коши.

ОПР. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной в окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$, если существует число М, для которого

$$|f(x)| < M, \forall x \in \overset{0}{U}_\theta(a) .$$

ТЕОРЕМА 2. Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке, то она ограничена в окрестности этой точке.

ДОК. Из определения предела, следует, что для $\varepsilon = 1$ существует $\overset{0}{U}_\theta(a)$ такая, что

$$|f(x)| - |A| \le |f(x) - A| < 1 \to |f(x)| < |A| + 1 = M, \forall x \in \overset{0}{U}_\theta(a) .$$

ТЕОРЕМА 3 (о единственности предела). Если функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = a$, то он только один.

ДОК. Предположим противное: числа A и B являются пределами функции, причем $A < B$. Выберем $\varepsilon < 0{,}5|A - B|$, тогда существует окрестность $\overset{0}{U}_\delta(a)$, для которой

$$B - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon, \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)).$$

Тогда $B - A < 2\varepsilon$, что противоречит выбору числа ε.

ТЕОРЕМА 4 (о переходе к пределу в неравенстве).

Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют пределы А и В в точке $x = a$ и $f(x) \le g(x)$, для всех $x \in \overset{0}{U}_\theta(a)$. Тогда $A \le B$.

ДОК. Предположим противное : $A > B$. Выберем $\varepsilon < 0{,}5|A - B|$.

Тогда существует окрестность $\overset{0}{U}_\delta(a)$, для которой

$g(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x), \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$, что противоречит условию теоремы.

ТЕОРЕМА 5 (о знаке функции в окрестности точки).
Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0$, то существует $\overset{0}{U}_\delta(a)$, для которой

$$f(x) > 0, \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a).$$

ДОК. Выберем любое $\varepsilon < 0{,}5A$. Тогда, по определению предела, найдется $\overset{0}{U}_\delta(a)$, для которой $f(x) > A - \varepsilon > 0, \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a)$.

ТЕОРЕМА 6 (о промежуточной функции). Пусть для трех функций, определенных в $\overset{0}{U}_\theta(a)$, справедливо неравенство:

1) $f(x) \le \varphi(x) \le g(x), \forall x \in \overset{0}{U}_\theta(a)$ и 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$.

ДОК. $\begin{matrix} \forall\varepsilon > 0\, \exists\,\delta_\varepsilon : 0 < \delta_\varepsilon < \theta : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \to \\ A - \varepsilon < f(x) \le \varphi(x) \le g(x) < A + \varepsilon \end{matrix}$

т.е. $|A - \varphi(x)| < \varepsilon$.

ОПР. Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$, удовлетворяет критерию Коши, если

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\,\delta_\varepsilon : 0 < \delta_\varepsilon < \theta : \forall x', x'' \in \overset{0}{U}_\delta(a) \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 7. Для того, чтобы функция $y = f(x)$, определенная в окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$, имела предел в точке a, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла критерию Коши в окрестности точки a.

ДОК. (1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\,\delta_\varepsilon : 0 < \delta_\varepsilon < \theta : \forall x', x'' \in \overset{0}{U}_\delta(a) \to |f(x') - A| < 0{,}5\varepsilon,\ |f(x'') - A| < 0{,}5\varepsilon$$

и

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A - (f(x'') - A)| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon.$$

(2) Пусть функция удовлетворяет критерию Коши и $\{x_n\}$ произвольная последовательность, $x_n \ne a$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Тогда $\forall\varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon$ и $p > 0 \to |f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$

и последовательность $\{f(x_n)\}$ фундаментальная. По доказанному (для последовательностей), существует число A, для которого $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Пусть $\{x'_n\}$ другая последовательность, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$. Тогда последовательность $\{f(x'_n)\}$ также фундаментальная и потому сходящаяся. Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = B$.

Если $A \ne B$, то последовательность, $\{x''_n\} = \{x_n, x'_n\} = x_1, x'_1, x_2, x'_2, ..$ также сходящаяся и $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = a$. Последовательность $\{f(x''_n)\}$ не может быть сходящейся (у нее, по крайней мере, два частичных предела A и B), хотя она фундаментальна. Источником полученного противоречия явилось предположение о том, что $A \ne B$, поэтому $A = B$ и функция имеет предел по Гейне, равный A.

ОПР. Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$, называется бесконечно малой функцией в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

ОПР. Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$, называется бесконечно большой функцией в точке a, если

$$\forall M > 0\, \exists\,\delta_M : 0 < \delta_M < \theta : \forall x \in \overset{0}{U}_{\delta_M} \to |f(x)| > M.$$

ТЕОРЕМА 8 (о связи функции, имеющей предел, с бесконечно малой функцией). Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела предел в точке a равный A, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление: $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция в точке a.

ДОК. (1) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то функция $\alpha(x) = f(x) - A$ бесконечно малая функция в точке $x = a$. Действительно,

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\,\delta_\varepsilon : 0 < \delta_\varepsilon < \theta : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \to |f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon$$

(2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}(A+\alpha(x)) = A$.

ТЕОРЕМА 9 (о связи между бесконечно большой и малой функциями). Если $y = f(x)$ бесконечно большая функция в точке a, то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая в этой точке. Если $\alpha(x)$ бесконечно малая функция в точке a и $\alpha(x) \neq 0,\ \forall x \in \overset{0}{U}_\theta(a)$, то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая в этой точке.

ДОК. (1)

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon : 0 < \delta_\varepsilon < \theta : \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \to |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \to |\alpha(x)| = \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon.$$

ДОК. (2)

$$\forall M > 0\ \exists\delta_M : 0 < \delta_M < \theta : \forall x \in \overset{0}{U}_\delta(a) \to |\alpha(x)| < \frac{1}{M} \to |f(x)| = \frac{1}{|\alpha(x)|} > M.$$

ТЕОРЕМА 10 (арифметические теоремы о бесконечно малых). Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции в точке a, то $\alpha(x)+\beta(x)$ также бесконечно малая функция. Если $f(x)$ ограниченная в окрестности точки a функция, то $f(x)\cdot\alpha(x)$ бесконечно малая функция (доказать самостоятельно).

ТЕОРЕМА 11 (арифметическая теорема о пределах).

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то (1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A+B$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$; (3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

ДОК. утверждения (2). По теореме о связи $f(x) = A+\alpha(x)$, $g(x) = B+\beta(x)$, где функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции. Тогда $f(x)\cdot g(x) = (A+\alpha(x))(B+\beta(x)) = A\cdot B+\gamma(x)$, где $\gamma(x) = A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)$ бесконечно малая функция (теоремы 8 и 10). Утверждения(1) и (3) доказать самостоятельно или со ссылкой на соответствующую теорему для последовательностей.

УПРАЖНЕНИЯ: 1) Верно ли утверждение : произведение б.м.ф. на б.б.ф. есть ограниченная функция? 2) Может ли функция в одной точке быть б.м., а в другой – б.б.ф. ? 3) Всегда ли сумма двух бесконечно больших функций является бесконечно большой функцией?

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Определение предела функции по Коши и Гейне и их эквивалентность.
2. Ограниченность функции в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.
3. Теорема о единственности предела функции.
4. Теорема о переходе к пределу в неравенствах.
5. Теорема о промежуточной функции.
6. Критерий Коши для функции в окрестности точки. Теорема об эквивалентности критерия Коши существованию предела у функции.
7. Бесконечно малые функции, теорема о связи функций, имеющих предел, и бесконечно малых функций.
8. Бесконечно большие функции, теорема об их связи с бесконечно малыми функциями.
9. Арифметическая теорема о пределах функций.

Лекция 6. Предел функции (продолжение)

П.1. ПЕРВЫЙ замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

ДОК. (см. рис. 2) Для всех $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ справедливы неравенства:

$|\sin x|\le|x|$ ($|x|$ - длина дуги AB$_1$, $|\sin x|$ - длина дуги катета AB) и

$0\le 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\le\frac{x^2}{2}$.

Функция $\frac{x^2}{2}$ б.м.ф. в точке $x=0$ и поэтому, на основании теоремы о промежуточной функции, $\alpha(x)=1-\cos x$ также б.м.ф. Тогда из теоремы о связи $\lim_{x\to 0}\cos x=1$.

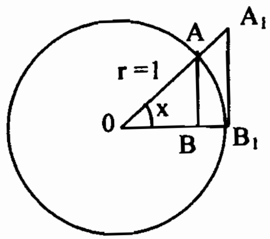


Рис.2

Площадь Δ OAB $=0{,}5\sin x\cdot\cos x$, площадь сектора AOB$_1=0{,}5x$, площадь ΔOA$_1$B$_1=0{,}5\cdot tgx$. Справедливо неравенство: площадь Δ OAB< площадь сектора OAB< площадь ΔOA$_1$B$_1$

$$\Rightarrow\sin x\cos x<x<tgx\Rightarrow\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}.$$

По доказанному, $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, поэтому на основании теорем о промежуточной функции и арифметической теореме о пределах получим $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

ПРИМЕР 1. Вычислить $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{x^3}$.

РЕШЕНИЕ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-tgx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\frac{1}{\cos x})}{x^3}=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\sin^2\frac{x}{2}}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}.$$

П.2. ВТОРОЙ замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

ДОК. (1) Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность, $x_n>0$, для которой $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. Тогда $\frac{1}{x_n}>1\ \forall n>n_0$ и для каждого n найдутся натуральные числа $k_n: k_n\le\frac{1}{x_n}<k_n+1$ или $\frac{1}{k_n+1}<x_n\le\frac{1}{k_n}$. Справедливо неравенство

$$y_n=\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}\le(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}\le\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=z_n.$$

Последовательности $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ сходятся к числу e, поэтому на основании теоремы о промежуточной последовательности $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ по Гейне, а значит и по Коши.

(2) Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность, $x_n<0$, для которой $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. Обозначим $y_n=-x_n$. Тогда

$$(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=\left(\frac{1}{1-y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}}=\left(1+\frac{y_n}{1-y_n}\right)^{\frac{1}{y_n}}.$$

Обозначим $z_n = \dfrac{y_n}{1-y_n}$. Тогда $z_n > 0,\ \forall n > n_0$ и $\dfrac{1}{y_n} = 1 + \dfrac{1}{z_n}$.

Из доказанного в (1) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty}(1+z_n)^{1+\frac{1}{z_n}} = \lim_{n\to\infty}(1+z_n)(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}} = e.$$

СЛЕДСТВИЯ: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

ДОК. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

ДОК. Замена $t = e^x - 1 \to x = \ln(1+t)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)} = 1.$$

П.3. Сравнение функций

ОПР. (О – большое). Рассматриваются функции $f, g : \overset{0}{U}_\theta(a) \to R$. Говорят, что функция $y = f(x)$ есть О - большое от функции $y = g(x)$ в окрестности точки $x = a$, обозначение $f(x) = O(g(x))$, если $\exists C > 0, \exists \delta : 0 < \delta < \theta : \forall x \in \overset{0}{U}_\delta \to |f(x)| \le C|g(x)|$.

ПРИМЕР 2. $f(x) = x\sin^3\left(\dfrac{1}{x}\right) = O(x)$ в окрестности точки $x = 0$.

РЕШЕНИЕ. $|f(x)| \le |x|$. Если $g(x) \ne 0$ в окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$, то условие $f(x) = O(g(x))$ равносильно ограниченности функции $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в окрестности точки $x = a$. Последнее выполняется, например, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = K \ne 0$.

ОПР. (о – маленькое). Функция $y = f(x)$ есть о - малое от функции $y = g(x)$ в окрестности точки $x = a$, обозначение

$f(x) = o(g(x))$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

$\alpha(x) = o(1)$ – бесконечно малая функция $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{1} = 0$.

ПРИМЕР 3 (алгебра о - малых в точке $x = 0$).

(1) $o(x)\cdot o(x) = o(x^2)$; (2) $o(x) + o(x) = o(x)$;

(3) $o(f(x)) = \alpha(x)\cdot f(x)$, где $\alpha(x)$ б.м.ф.; (4) $o(x) = x\cdot o(1)$.

РЕШЕНИЕ: (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)\cdot o(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x} = 0$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)+o(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x} + \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x} = 0$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(f(x))}{f(x)} = 0 \Rightarrow \dfrac{o(f(x))}{f(x)} = \alpha(x)$, б.м.ф.;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x} = 0 \Rightarrow \dfrac{o(x)}{x} = o(1) \Rightarrow o(x) = x\cdot o(1)$.

ОПР. Бесконечно малые в точке $x = a$ функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ называются эквивалентными, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Обозначение $f(x) \sim g(x)$. Отношение эквивалентности транзитивно: $f(x) \sim g(x)$, $g(x) \sim \varphi(x)$, то $f(x) \sim \varphi(x)$ и симметрично: $f(x) \sim g(x) \to g(x) \sim f(x)$.

ТАБЛИЦА эквивалентных бесконечно малых в точке $x = 0$.

(1) $\sin x \sim x$; (2) $tgx \sim x$; (3) $a^x - 1 \sim x\ln a$; (4) $e^x - 1 \sim x$;

(5) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$; 6) $\arcsin x \sim x$; (7) $\ln(1+x) \sim x$;

(7) $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$; (8) $arctgx \sim x$; (9) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

ДОК. Формулы (1),(2),(3), (6), (8) уже обсуждались; (7) и (9) получаются из них переходом к основанию e и замены

$t = \arcsin x \to x = \sin t$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{t}{\sin t} = 1$; (5) – аналогично; (10) $(1+x)^{\alpha} - 1 = e^{\alpha\ln(1+x)} - 1 \sim \alpha\ln(1+x) \sim \alpha x$.

ТЕОРЕМА 1 (о замене бесконечно малой на эквивалентную).

Если бесконечно малые функции $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$ в точке $x = a$, и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

ДОК. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f_1(x)}\cdot\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}\cdot\dfrac{g_1(x)}{g(x)} = A$.

ТЕОРЕМА 2 (о связи эквивалентных бесконечно малых).

Если две бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны в точке $x = a$, то $f(x) = g(x) + o(g(x))$. Если бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то они эквивалентны.

ДОК. (1)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(1) \to f(x) = g(x) + o(1)\cdot g(x) = g(x) + o(g(x))$$

ДОК. (2)

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} = 1 + o(1) \to \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

П. 4. Пределы на бесконечности. Односторонние пределы.

ОПР. Функция $y = f(x)$ имеет предел на бесконечности, обозначение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall|x| > \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

ОПР. Функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = a$ справа, обозначение $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x : a \le x < a + \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

ОПР. Функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = a$ слева, обозначение $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x : a - \delta \le x < a \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

ОПР. Функция $y = f(x)$ имеет предел на $+\infty$, обозначение $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x : x > \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

ОПР. Функция $y = f(x)$ имеет предел на $-\infty$, обозначение $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x : x < -\delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЯ: 1. Сформулируйте понятие $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Сформулируйте понятие $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A + 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Первый замечательный предел.
2. Второй замечательный предел и его следствия.
3. Понятия $O(f(x))$ и $o(f(x))$. Примеры.
4. Эквивалентные бесконечно малые функции, таблица эквивалентных бесконечно малых функций (с доказательством).
5. Теорема о замене бесконечно малой на эквивалентную.
6. Теорема о связи эквивалентных бесконечно малых функций.

Лекция 7. Непрерывные функции.

П.1. Непрерывность функции в точке

ОПР. Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности $U_\theta(a)$, называется непрерывной в точке $x = a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ОПР. (эквивалентное). Функция $y = f(x)$, определенная в окрестности $U_\theta(a)$, называется непрерывной в точке $x = a$, если ее приращение $\Delta f = f(a+\Delta x) - f(a) = o(1)$ является бесконечно малой функцией в точке $\Delta x = 0$, ($\Delta x = x - a$).

ДОК. Эквивалентность определений следует из теоремы о связи функции, имеющей предел, и бесконечно малой функции.

ПРИМЕР 1.Доказать непрерывность функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

РЕШЕНИЕ. $\Delta y = (1+\Delta x)^2 - 1 = \Delta x \cdot (2+\Delta x) = o(1)$, т.к. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta x \cdot (2+\Delta x) = 0$.

ПРИМЕР 2. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \ne 0 \\ 2, x = 0 \end{cases}$ разрывная в точке $x = 0$ и непрерывная в любой точке $x \ne 0$.

РЕШЕНИЕ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \ne 2 = f(0)$, т.е. функция не является непрерывной в точке $x = 0$. Пусть $x = a \ne 0$. Тогда $\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\sin a}{a} = \dfrac{a(\sin x - \sin a) - \sin a(x-a)}{xa}$. Функция $y = \dfrac{1}{ax}$ ограничена в окрестности точки $x = a$. Функции $y = \sin x - \sin a$ и $y = x - a$ бесконечно малые в точке $x = a$, поэтому $\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{\sin a}{a} = o(1)$, т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

ТЕОРЕМА 1 (арифметическая теорема о непрерывных функциях). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке $f(x) + g(x)$. Тогда сумма $f(x) + g(x)$, произведение $f(x) \cdot g(x)$ и частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}, (g(a) \ne 0)$ непрерывные функции в точке $x = a$.

ДОК. Следует из арифметической теоремы о пределах.

Пусть заданы две функции $g : E \xrightarrow{g} U$ и $f : U \xrightarrow{f} R$

ОПР. Функция $\varphi : E \xrightarrow{\varphi} R$, определенная по правилу $\varphi(x) = f(g(x))$, называется композицией функций f и g или сложной функцией.

ПРИМЕР 3. Функция $y = \sqrt{1+x^2}$ сложная и является композицией функций $z = x^2 + 1$ и $y = \sqrt{z}$.

ТЕОРЕМА 2 (о непрерывности сложной функции).
Если функция $z = g(x)$ непрерывна в точке $x = a$, функция $y = f(z)$ непрерывна в точке $z = g(a)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

ДОК. Из условия теоремы
$\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta_1 > 0 : \to \left(|f(z) - f(\varphi(a))| < \varepsilon, \forall z \in U_{\delta_1}(\varphi(a))\right)$
и $\exists\, \delta_2 > 0 : \to |\varphi(x) - \varphi(a)| < \delta_1 : \forall x \in U_{\delta_2}(a)$. Тогда
$\forall x \in U_{\delta_2}(a) \to z = \varphi(x) \in U_{\delta_1}(\varphi(a))$ и $|f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon$.

П. 2. Непрерывность функции на отрезке

ОПР. Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка. Непрерывность в граничных точках отрезка [a;b] понимается как предел справа и слева:

(1) $\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 : \forall x \in [a; a+\delta) \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 : \forall x \in [b; b-\delta) \to |f(x) - f(b)| < \varepsilon$.

ОПР. Функция $y = f(x)$ ограничена на отрезке [a;b], если $\exists\, M > 0 : \forall x \in [a;b] \to |f(x)| < M$.

ТЕОРЕМА 3 (1- я теорема Вейерштрасса).
Всякая непрерывная функция $y = f(x)$ на отрезке ограничена на этом отрезке.

ДОК. Предположим противное: функция $y = f(x)$ на отрезке [a;b] неограниченная $\to \forall n \in N\ \exists x_n : |f(x_n)| > n$. Последовательность $\{x_n\}$ ограниченная по построению, поэтому по теореме 1(лекция 3) у нее есть предельная точка $c \in [a;b]$. Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывная в точке c, она ограничена в окрестности этой точки (теорема 2(лекция 5)),т.е. $\exists M\ \forall x \in U_\theta(c) \to |f(x)| < M$. Тогда в окрестности $U_\theta(c)$ может находиться не более конечного числа членов последовательности $\{x_n\}$, что противоречит тому, что c – предельная точка последовательности $\{x_n\}$. Доказано, что множество $E_f = \{y \in R : \exists x \in [a;b] : f(x) = y\}$ значений функции $y = f(x)$ ограничено. Тогда по теореме о точной верхней и нижней грани существует $A = \inf E_f$ и $B = \sup E_f$.

ОПР. Если $A = \inf E_f \in E_f$, то число A называется наименьшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке [a;b].

Обозначение $A = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$.

ОПР. Если $B = \sup E_f \in E_f$, то число B называется наибольшим значением функции $y = f(x)$ на отрезке [a;b].

Обозначение $B = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$.

ТЕОРЕМА 4 (2 – я теорема Вейерштрасса).

Непрерывная функция на отрезке принимает наименьшее и наибольшее значения.

ДОК. (1) Пусть $A = \inf E_f$. Тогда, по определению точной нижней грани, $\forall n \in N\ \exists x_n : A \le f(x_n) < A + \frac{1}{n}$. Последовательность $x_n \in [a;b]$ ограничена, поэтому у нее есть предельная точка $c_1 \in [a;b]$. Тогда у нее есть подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c_1$, и по теореме о промежуточной последовательности $\lim\limits_{л\to\infty} f(x_{n_k}) = A$. Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = c_1$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c_1) = A$, т.е. $A \in E_f$.

(2) Пусть $B = \sup E_f$. Тогда, по определению точной верхней грани, $\forall n \in N\ \exists x_n : B - \frac{1}{n} \le f(x_n) < B$. Последовательность $x_n \in [a;b]$ ограничена, поэтому у нее есть предельная точка $c_2 \in [a;b]$. Тогда у нее есть подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c_2$, и по теореме о промежуточной последовательности $\lim\limits_{л\to\infty} f(x_{n_k}) = B$. Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = c_2$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c_2) = B$, т.е. $B \in E_f$.

ТЕОРЕМА 5 (о нуле непрерывной функции).

Пусть $y = f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[a;b]$, причем $f(a)\cdot f(b) < 0$. Тогда существует точка $c \in [a;b] : f(c) = 0$.

ДОК. Разобьем отрезок $[a;b]$ на две равные части. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана. Если $f(\frac{a+b}{2}) \ne 0$, то выберем тот из отрезков разбиения, для которого значения функции на концах отрезка имеют разные знаки. Обозначим этот отрезок через $[a_1;b_1]$. Повторим процесс деления: выберем тот из отрезков разбиения отрезка $[a_1;b_1]$, для которого значения функции на концах отрезка имеют разные знаки. Обозначим этот отрезок $[a_2;b_2]$ и т.д. Построенная последовательность вложенных отрезков – стягивающаяся. По теореме о системе стягивающихся отрезков существует точка $c \in [a;b]$, принадлежащая каждому из отрезков $[a_n;b_n]$. Если $f(c) \ne 0$, то из непрерывности функции $y = f(x)$ следует, что $f(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $U_\theta(c)$, что противоречит способу построения последовательности отрезков $[a_n;b_n]$, т.е. $f(c) = 0$.

ТЕОРЕМА 6. (о структуре области значений непрерывной функции на отрезке)

$$E_f = [A;B].$$

ДОК. Пусть C произвольное число из отрезка $[A;B]$: $A < C < B$. Требуется доказать, что $C \in E_f$. Рассмотрим функцию:

$\varphi(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на отрезке $[a;b]$,

$\varphi(c_1) = f(c_1) - C = A - C < 0$ и $\varphi(c_2) = f(c_2) - C = B - C > 0$,

т.е. на концах отрезка $[c_1;c_2]$ функция $\varphi(x) = f(x) - C$ принимает значения разных знаков и, по теореме 5, у нее есть ноль на этом отрезке: $\exists\, \tilde{c} \in [c_1;c_2] \subset [a;b]: \varphi(\tilde{c}) = 0 \to f(\tilde{c}) = C$.

П.3. Равномерная непрерывность

ОПР. Функция $y = f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta_\varepsilon : \forall x_1, x_2 \in X : |x_1 - x_2| < \delta \to |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Из непрерывности функции на некотором множестве X не следует ее равномерная непрерывность.

ПРИМЕР 4. Доказать, что функция $y = x^2$ непрерывная на множестве $X = [0;+\infty)$ не является на нем равномерно непрерывной.

РЕШЕНИЕ. $\forall x_1, x_2 \in [0;+\infty)$ разность $|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2|(x_1 + x_2)$ может быть сделана как угодно большой за счет удаленности x_1, x_2 от начала координат.

ТЕОРЕМА 7 (Гейне).

Всякая функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке $[a;b]$ равномерно непрерывна на этом отрезке.

ДОК. Предположим противное: функция не является равномерно непрерывной. Тогда существует $\tilde{\varepsilon} > 0$ такое, что для любого $\delta = \dfrac{1}{n}$ существуют x_1^n и x_2^n такие, что $|x_1^n - x_2^n| < \dfrac{1}{n}$, для которых $|f(x_1^n) - f(x_2^n)| > \tilde{\varepsilon}$ при любых $n \in N$. Последовательности $\{x_1^n\}$ и $\{x_2^n\}$ ограничены и по теореме 1(лекция 3) из них можно выбрать сходящиеся подпоследовательности, причем, по построению,

$\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_2^{n_k} = x_0 \in [a;b]$. По условию теоремы функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, поэтому существует N:

$\forall k > N \to |f(x_1^{n_k}) - f(x_0)| < \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ и $|f(x_2^{n_k}) - f(x_0)| < \dfrac{\tilde{\varepsilon}}{2}$.

Тогда $|f(x_1^{n_k}) - f(x_2^{n_k})| \le |f(x_1^{n_k}) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_2^{n_k})| < \tilde{\varepsilon}$,

что противоречит выбору последовательности $\{x_1^n\}$ и $\{x_2^n\}$, т.е. функция равномерно непрерывна.

ОПР. Функция $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in X: |x_1 - x_2| < \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$

называется колебанием функции $y = f(x)$ на множестве X.

Равномерная непрерывность функции на множестве X означает, что для нее $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ: 1) Докажите, что кубическое уравнение всегда имеет корень; 2) Докажите, что функция $y = \sin x$ непрерывна в точке $x = a$; 3) Приведите пример непрерывной неограниченной на интервале $(a;b)$ функции; 4) Докажите, что

4.1 $\omega_{f+g}(\delta) \le \omega_f(\delta) + \omega_g(\delta)$; 4.2 $\omega_{\alpha f}(\delta) = \alpha\omega_f(\delta)$, для $\alpha = const$; 4.3 $\omega_{f\cdot g}(\delta) \le \sup|f(x)| \cdot \omega_g(\delta) + \sup|g(x)| \cdot \omega_f(\delta)$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Непрерывность функции в точке. Арифметические теоремы о непрерывных функциях. Непрерывность сложной функции.
2 Непрерывность функции на отрезке. Теорема об ограниченности непрерывной функции на отрезке.
3. Теорема о наибольшем и наименьшем значении непрерывной функции на отрезке.
4. Теорема о нуле непрерывной функции.
5. Теорема о структуре области значений непрерывной функции.
6. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема о равномерной непрерывности функции на отрезке.

Лекция 8 . Монотонные функции. Производная.

П.1. Монотонные функции

ОПР. Функция $y = f(x)$: $E \to R$ называется возрастающей на множестве E, обозначение $f \uparrow$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2 \to f(x_1) \le f(x_2).$$

ОПР. Функция $y = f(x)$: $E \to R$ называется строго возрастающей на множестве E, обозначение $f \uparrow\uparrow$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2).$$

ОПР. Функция $y = f(x)$: $E \to R$ называется убывающей на множестве E, обозначение $f \downarrow$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2 \to f(x_1) \ge f(x_2).$$

ОПР. Функция $y = f(x)$: $E \to R$ называется строго убывающей на множестве E, обозначение $f \downarrow\downarrow$, если

$$\forall x_1, x_2 \in E, x_1 < x_2 \to f(x_1) > f(x_2).$$

ТЕОРЕМА 1. Если $f \uparrow$ на $(a;b)$, то существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf E_f$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \sup E_f$, где E_f множество значений функции $y = f(x)$ на $(a;b)$.

ДОК. (1) Пусть $\sup E_f = +\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in (a;b): f(x_\varepsilon) > \varepsilon$. Выберем $\delta = b - x_\varepsilon$. Тогда $\forall x: b - \delta < x < b \to x > x_\varepsilon$ и поэтому $f(x) \ge f(x_\varepsilon) > \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

(2) Пусть $\sup E_f = B < \infty$.Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in (a;b): B - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le B$. Выберем $\delta = b - x_\varepsilon$. Тогда $\forall x: b - \delta < x < b \to x > x_\varepsilon$ и поэтому $B - \varepsilon < f(x) \le B$, т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = B$.

(3) Пусть $\inf E_f = -\infty$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in (a;b): f(x_\varepsilon) < -\varepsilon$. Выберем $\delta = x_\varepsilon - a$. Тогда $\forall x: a < x < a + \delta \to x < x_\varepsilon$ и поэтому $f(x) \le f(x_\varepsilon) < -\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$.

(4) Пусть $\inf E_f =$ A. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in (a;b): A \le f(x_\varepsilon) \le A + \varepsilon$.

Выберем $\delta = x_\varepsilon - a$, тогда $\forall x: a < x < a + \delta \to x < x_\varepsilon$ и поэтому $A \le f(x) < f(x_\varepsilon) < A + \delta$, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f \uparrow$ на $(a;b)$, то для любого $x_0 \in (a;b)$ существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

ТЕОРЕМА 2 . Если $f \downarrow$ на $(a;b)$, то существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \sup E_f$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \inf E_f$, где E_f множество значений функции $y = f(x)$ на $(a;b)$.

ДОК. Достаточно применить теорему 1 для функции $y = -f(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $f \downarrow$ на $(a;b)$, то для любого $x_0 \in (a;b)$ существуют $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

ТЕОРЕМА 3 (о существовании обратной функции).

Если $f \uparrow\uparrow$ (или $f \downarrow\downarrow$) непрерывная функция на [a;b], то существует и единственная обратная к ней функция g^{-1}, определенная на отрезке $[f(a); f(b)]$, и непрерывная, строго возрастающая (или убывающая) на этом отрезке.

ДОК. Пусть функция $f \uparrow\uparrow$ и f непрерывна на [a;b]. Тогда $E_f = [f(a); f(b)]$. Для любого $y \in E_f$ существует и единственное значение $x = x(y) \in [a;b]$, для которого $f(x) = y$. Действительно, если таких значений два: x_1 и x_2, например $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$. Положим $g^{-1}(y) = x(y)$. Тогда $f(g^{-1}(y)) \equiv y$ на $E_f = [f(a); f(b)]$, т.е. g^{-1} обратная к f функция. Докажем ее непрерывность на E_f. Пусть y_0 произвольная точка интервала $(f(a); f(b))$ и $x_0 = g^{-1}(y_0) \in (a;b)$. Тогда для любого $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \min(b - x_0, x_0 - a)$ существует $\delta = \delta_\varepsilon = \min(y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0)$ такое, что $\forall y: |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|g^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon$.

Строгое возрастание функции g^{-1} следует из неравенств:

$\forall y_1, y_2 \in E_f, y_1 < y_2 : y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2) \to x_1 < x_2 \to g^{-1}(y_1) < g^{-1}(y_2)$.

Непрерывность функции g^{-1} в граничных точках $y = f(a)$ и $y = f(b)$ следует из теоремы 1:

$\lim\limits_{y \to f(a)+0} g^{-1}(y) = \inf E_{g^{-1}} = a = g^{-1}(f(a))$,

$\lim\limits_{y \to f(b)-0} g^{-1}(y) = \sup E_{g^{-1}} = b = g^{-1}(f(b))$.

П.2. Производная функции в точке

ОПР. $f:(a;b) \to R,\ x_0 \in (a;b)$. Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, называют число

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

ПРИМЕР 1. Вычислить производную функции $y = \sin x$ в произвольной точке x.

РЕШЕНИЕ.

$$\sin' x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \cos x.$$

МЕХАНИЧЕСКИЙ смысл производной.

$S(t)$ путь, пройденный материальной точкой к моменту времени t, $S(t + \Delta t) - S(t)$ расстояние, пройденное точкой за время Δt, $\dfrac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ средняя скорость движения,

$S'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ скорость в момент времени t.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл производной.

Точки $A(x; f(x))$ и $B(x + \Delta x; f(x + \Delta x))$ на графике функции $y = f(x)$ соединены прямой $L_{сек}$ секущей, (см. рис. 3),

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ - угловой коэффициент прямой $L_{сек}$,

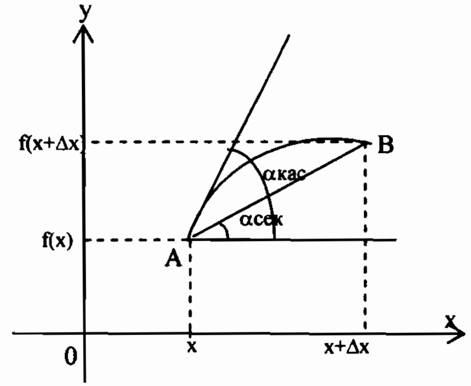


Рис. 3

При $\Delta x \to 0$ прямая $L_{сек}$ поворачивается вокруг точки A, занимая предельное положение касательной к графику функции в точке A.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной. Производная функции $y = f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x.

ТЕОРЕМА 4 (о непрерывности дифференцируемой функции).

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывная в этой точке.

ДОК. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x) \to$

$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Тогда $f(x) = f(x_0) + \beta(x - x_0)$, где

$\beta(x - x_0) = (f'(x_0) + \alpha(x - x_0))(x - x_0)$ бесконечно малая функция в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ПРИМЕР 2 . Функция $y = |x - 2|$ непрерывна в точке $x = 2$, но не имеет производной в этой точке.

РЕШЕНИЕ. $\Delta f = f(2+\Delta x) - f(2) = |\Delta x|$ бесконечно малая функция в точке $\Delta x = 0$, т.е.функция $y = |x-2|$ непрерывна в точке $x = 2$. Функция $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела в точке $\Delta x = 0$, поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0}\left(-\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = -1$, $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = 1$ и пределы справа и слева не совпадают.

ТЕОРЕМА 5 (арифметическая теорема о производных).
Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют производную в точке x_0, то 1) $(f+g)'\big|_{x_0} = f'\big|_{x_0} + g'\big|_{x_0}$;

$$(2)\left(f \cdot g\right)'\Big|_{x_0} = f'\big|_{x_0} \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'\big|_{x_0};$$

$$(3)\left(\frac{f}{g}\right)'\Bigg|_{x_0} = \frac{f'\big|_{x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'\big|_{x_0}}{g^2(x_0)}, \text{ при } g(x_0) \neq 0.$$

ДОК. утверждения (2):

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x) - f(x_0)g(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0+\Delta x) +$$

$$+ f(x_0) \cdot \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} f'\big|_{x_0} \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'\big|_{x_0},$$

т.к. функция $y = g(x)$ непрерывна в точке x_0 (теорема 4).

Док. утверждения(3) :

$$\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0)g(x_0+\Delta x) \cdot \Delta x} =$$

$$= \frac{1}{g(x_0)g(x_0+\Delta x)}\left(\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}\right) \xrightarrow{\Delta x \to 0}$$

$$\frac{f'\big|_{x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'\big|_{x_0}}{g^2(x_0)},$$ т.к. при $g(x_0) \neq 0$ функция $\frac{1}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0 (теорема 4).

(1) доказать самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЯ:

1) Докажите непосредственно, что $(e^{2x})' = 2e^{2x}$.

2) Найдите функцию обратную к функции $y = x^2 + 1$ на $(-\infty;0]$.

3) Функция $y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$. Найдите производную функции в точке $x = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Монотонные функции. Теорема о существовании предела монотонной функции.
2. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.
3. Понятие производной функции, ее механический и геометрический смысл. Примеры.
4. Теорема о непрерывности функции, имеющей производную.
5. Арифметическая теорема о производных.

Лекция 9 . Производная функции (продолжение)

П.1. Производная обратной функции

ТЕОРЕМА 1(производная обратной функции).

Пусть $f:[a;b]\xrightarrow{f}R$ непрерывная, строго монотонная (возрастающая или убывающая) функция на отрезке [a;b], имеющая в точке $x=x_0\in(a;b)$ производную $f'(x_0)\neq 0$. Тогда обратная функция $x=g^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0=f(x_0)$ и

$$\left(g^{-1}(y)\right)'\Big|_{y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

ДОК. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{g^{-1}(y_0+\Delta y)-g^{-1}(y_0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta y}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

П.2. Производная сложной функции

ТЕОРЕМА 2 (производная сложной функции).

Пусть функция $y=g(x)$, определенная и непрерывная в окрестности $U_\theta(x_0)$, имеет производную в точке $x=x_0$. Функция $z=f(y)$ определена и непрерывна в окрестности $U_\theta(y_0)$, где $y_0=g(x_0)$, и имеет производную в точке $y=y_0$. Тогда сложная функция $z=f(g(x))$ имеет производную в точке $x=x_0$ и

$$z'\big|_{x_0}=f'(y_0)\cdot g'(x_0).$$

ДОК.

$\exists\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta y}=f'(y_0)\to\dfrac{\Delta z}{\Delta y}=f'(y_0)+\alpha(\Delta y)\to\Delta z=f'(y_0)\Delta y+\alpha(\Delta y)\Delta y$

$\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=g'(x_0)\to\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=g'(x_0)+\beta(\Delta x)\to\Delta y=g'(x_0)\Delta x+\beta(\Delta x)\Delta x$,

где $\alpha(\Delta y)$ и $\beta(\Delta x)$ бесконечно малые функции. Тогда

$\Delta z=f'(y_0)\cdot g'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta y)\Delta y+\beta(\Delta x)f'(y_0)\Delta x$,

и $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=f'(y_0)\cdot g'(x_0)+\gamma(\Delta x)$, где

$\gamma(\Delta x)=\alpha(\Delta y)\cdot\dfrac{\Delta y}{\Delta x}+\beta(\Delta x)\cdot f'(y_0)$ бесконечно малая функции в точке $\Delta x=0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=f'(y_0)\cdot g'(x_0)$.

П.3. Таблица производных элементарных функций

(1) $(x^n)'=nx^{n-1}$; (2) $\sin'x=\cos x$; (3) $\cos'x=-\sin x$;

(4) $tg'x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; (5) $ctg'x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

6) $\arcsin'x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; (7) $\arccos'x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(8) $arctg'x=\dfrac{1}{1+x^2}$; (9) $arcctg'x=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

(10) $(e^x)'=e^x$; (11) $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$; (12) $\ln'x=\dfrac{1}{x}$;

(13) $\log'_a x=\dfrac{1}{x\ln a}$.

ДОК. (10) $(e^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x$;

(11) $(a^x)'=(e^{x\ln a})'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\ln a$;

(12) $\ln'x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}$; (13) $\log'_a x=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

(1) $(x^n)'=(e^{n\ln x})'=e^{n\ln x}\cdot\dfrac{n}{x}=x^n\cdot\dfrac{n}{x}=nx^{n-1}$

(2)

$$\sin' x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x;$$

(3) $\cos' x = (\sin(\frac{\pi}{2}-x))' = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x;$

(4) $tg'x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$

(6) $\arcsin' x = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

(7) $\arccos' x = \left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

(8) $arctg'x = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+tg^2(arctgx)} = \frac{1}{1+x^2}.$

(9) $arcctg'x = \left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$; (5) – самостоятельно.

П.4. Дифференциал функции

ОПР. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x = x_0$, если ее приращение можно представить в виде:

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)$ бесконечно малая функция в точке $\Delta x = 0$.

ОПР. Главная линейная часть приращения, величина $df = A\cdot\Delta x$, называется дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

ТЕОРЕМА 3. Существование производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости.

ДОК. (1) Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема. Тогда

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ и $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = A = f'(x_0)$.

(2) Если функция $y = f(x)$ имеет производную $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$, то, по теореме о связи $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ - б.м.ф., т.е. $\Delta f = A\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, при $A = f'(x_0)$.

СЛЕДСТВИЕ. Дифференциал функции $y = f(x)$ имеет вид $df = f'(x_0)\cdot\Delta x$. Функция $y = x$ имеет производную, равную 1, поэтому $\Delta x = dx$. Тогда

$$df = f'(x_0)\cdot dx.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл дифференциала.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(x_0; f(x_0))$, имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Приращение ординаты касательной, соответствующей изменению аргумента на $\Delta x = x - x_0$, равно $f'(x_0)\cdot\Delta x$, т.е. равно значению дифференциала $df = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

ИНВАРИАНТНОСТЬ формы дифференциала.

Если $z = f(y)$ функция независимой переменной y, то ее дифференциал имеет форму $df = f'(y_0)\cdot dy$. Если $z = f(y)$ - сложная функция и $y = g(x)$, то

$$df = f'(y_0)\cdot g'(x_0)dx = f'(y_0)dg = f'(y_0)dy,$$

т.е. форма записи дифференциала не зависит от того, является ли y независимой переменной или функцией другой переменной. Это свойство дифференциала называется его инвариантностью.

П.5. Арифметические операции с дифференциалами

(1) $d(f+g) = df + dg$

(2) $d(f\cdot g) = g\cdot df + f\cdot dg$.

(3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\cdot df - f\cdot dg}{g^2}$

П.6. Производная и дифференциал функций, заданных параметрически

Функцию $f : X \to Y$ можно задавать с помощью двух отображений $\varphi_1 : T = [\alpha;\beta] \to X$ и $\varphi_2 : T = [\alpha;\beta] \to Y$ композицией $y = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x))$. Такую функцию записывают в форме $\begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$. Существование $\varphi_1^{-1}(x)$ может обеспечить, например, строгая монотонность функции $x = \varphi_1(t)$.

ПРИМЕР 1. Функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ на отрезке [-1; 1] может быть задана параметрически: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$, $t \in [0;\pi]$. Тогда

$y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

ТЕОРЕМА 4 (о дифференцируемости функции заданной параметрически).

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi_1(t), \\ y = \varphi_2(t), \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$, причем $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ дифференцируемые на отрезке $[\alpha;\beta]$ функции и $\varphi_1'(t) \neq 0$. Тогда в каждой точке x, соответствующей значению t, т.е. $x = \varphi_1(t)$, существуют производная $f'(x)$, равная $f'(x)\big|_{x=\varphi(t)} = \dfrac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}$, и дифференциал

$$df\big|_{x=\varphi_1(t)} = \varphi_2'(t)dt.$$

ДОК. (1) $f'(x)\big|_{x=\varphi(t)} = \left(\varphi_2\left(\varphi_1^{-1}(x)\right)\right)' = \varphi_2'(t) \cdot \left(\varphi_1^{-1}(x)\right)' = \dfrac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)}$.

(2) $df = f'(x)dx = \dfrac{\varphi_2'(t)}{\varphi_1'(t)} \cdot \varphi_1'(x)dt = \varphi_2'(t)dt$.

УПРАЖНЕНИЯ: 1) Постройте для функции $y = chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, определенной на $[0;+\infty)$, обратную функцию и найдите ее производную.

2) Неявную функцию, заданную уравнением $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$, записать в параметрической форме и найти ее производную в точке $x = 1,\ y = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Теорема о производной обратной функции.
2. Теорема о производной сложной функции.
3. Таблица производных элементарных функций.
4. Дифференцируемость функции, теорема о необходимом и достаточном условии дифференцируемости.
5. Дифференциал функции, связь дифференциала с производной, геометрический смысл дифференциала, инвариантность формы дифференциала.
6. Производная и дифференциал функции, заданной параметрически.

Лекция 10 . Теоремы о среднем для производных.

П.1 Локальный экстремум функции

ОПР. Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума функции $y = f(x)$, определенной в некоторой окрестности $U_\theta(x_0)$, если $f(x) \le f(x_0), \forall x \in U_\theta(x_0)$. Если неравенство строгое для всех $x \ne x_0$, то говорят о строгом локальном максимуме.

ОПР. Точка $x = x_0$ называется точкой локального минимума функции $y = f(x)$, определенной в некоторой окрестности $U_\theta(x_0)$, если $f(x) \ge f(x_0), \forall x \in U_\theta(x_0)$. Если неравенство строгое для всех $x \ne x_0$, то говорят о строгом локальном минимуме. Если функция имеет в точке $x = x_0$ локальный минимум или локальный максимум, то говорят о локальном экстремуме функции.

ПРИМЕР 1(не характерный).

Функция $f(x) = \begin{cases} |x|, x \ne 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$ имеет, по определению, в точке $x = 0$ строгий локальный максимум, поскольку

$f(x) < f(0) = 1, \forall x \in \overset{0}{U}_{1/2}(0)$, несмотря на то, что убывает в левосторонней окрестности и возрастает в правосторонней окрестности точки $x = 0$. Следующая теорема рассматривает необходимые условия локального экстремума.

ТЕОРЕМА 1 (теорема Ферма). Если функция $y = f(x)$ в точке Δx имеет локальный экстремум, то либо функция не имеет производную в точке $x = x_0$, либо эта производная равна нулю.

ДОК. (1) Если производной в точке $x = x_0$ нет, то теорема доказана (см. пример 1). (2) Пусть производная $f'(x_0)$ существует и $f'(x_0) \ne 0$. Тогда $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ и знак Δf для достаточно малых Δx определяется знаком выражения $f'(x_0)\Delta x$, а он меняется в зависимости от знака Δx.

Последнее противоречит условию локального экстремума в точке $x = x_0$, т.е. $f'(x_0) = 0$.

П.2. Теоремы о среднем для производных

ТЕОРЕМА 2 (теорема Ролля). Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям: 1) непрерывности на отрезке [a;b]; 2) дифференцируемости в каждой точке интервала (a;b); 3) $f(a) = f(b)$, то существует на интервале (a;b) такая точка c, для которой $f'(c) = 0$.

ДОК. По теореме 4 (лекция 7) непрерывная на $[a;b]$ функция принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения: $\max\limits_{x \in [a;b]} f(x) = f(c_1)$ и $\min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = f(c_2)$. Если одна из точек c_1 или c_2 принадлежит интервалу $(a;b)$, то теорема доказана, поскольку эта точка является точкой локального экстремума и, по теореме 1, $f'(c) = 0$. Если $c_1 = c_2$ или $c_1 \ne c_2$, но они совпадают с концами отрезка, то $\max\limits_{x \in [a;b]} f(x) = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$ и функция постоянная на отрезке [a;b] и $f'(c) \equiv 0, \forall c \in (a,b)$.

ПРИМЕР 2 . Функция $y = |x|$ на отрезке $[-1;1]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, кроме одного: в точке $x = 0$ функция не имеет производную. При этом утверждение теоремы не выполняется: $f'(x) = -1$ для $x < 0$ и $f'(x) = 1$ для $x > 0$.

ТЕОРЕМА 3 (теорема Коши).

Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ удовлетворяют условиям:

1) непрерывности на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируемости в каждой точке интервала $(a;b)$;

3) $g'(x) \ne 0$ на интервале $(a;b)$, то существует на интервале $(a;b)$ такая точка c, для которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

ДОК. Из условия теоремы следует, что $g(a) \ne g(b)$. Действительно, если $g(a) = g(b)$, то функция $y = g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и тогда найдется такая точка c, для которой $g'(c)=0$, что противоречит условию 3) теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$\varphi(x)=\big(g(b)-g(a)\big)f(x)-\big(f(b)-f(a)\big)g(x)$.

Проверим, что $\varphi(a)=\varphi(b)$. Действительно,

$\varphi(b)-\varphi(a)=(g(b)-g(a)(f(b)-f(a))--(f(b)-f(a))(g(b)-g(a))=0$,

и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролля. Тогда найдется $c\in(a;b)$, для которой

$$\varphi'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)-(f(b)-f(a))g'(c)=0.$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 4 (теорема Лагранжа).

Если функция $y=f(x)$ 1) непрерывная на отрезке $[a;b]$, 2) дифференцируемая в каждой точке интервала (a;b), то существует на интервале $[a;b]$ такая точка c, для которой $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

ДОК. Следует из теоремы Коши для $g(x)=x$.

П.3 Следствия из теорем о среднем.

ТЕОРЕМА 5 (правило Лопиталя для неопределенности $\dfrac{0}{0}$).

Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$: 1) непрерывные на $[a;b)$ (a и b не обязательно конечны); 2) дифференцируемые в каждой точке интервала $(a;b)$; 3) $g'(x)\neq 0$ на интервале $(a;b)$;

4) $f(a)=g(a)=0$; 5) существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

Тогда $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

ДОК. Для любого $x\in[a;b)$ на отрезке $[a;x]$ выполняются условия теоремы Коши, и найдется $c=c(x)<x$, для которого

$\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Если $x\to a+0$, то $c(x)\to a+0$ и

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c(x))}{g'(c(x))}==\lim_{c\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=A.$$

В теореме допускается случай $A=\pm\infty$.

ТЕОРЕМА 6 (правило Лопиталя для неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$: 1) непрерывны на $[a;b)$ (a и b не обязательно конечны); 2) дифференцируемы в каждой точке интервала $(a;b)$; 3) $g'(x)\neq 0$ на интервале $(a;b)$;

4) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=\infty$; 5) существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$,

то существует $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

ДОК. (1) Пусть A – конечное число. Тогда

$\forall\varepsilon>0\ \exists x_0:\forall x\in(a;x_0)\to\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\varepsilon$. Определим функцию

$\varphi(x,x_0)$ из условия $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\cdot\varphi(x,x_0)$, т.е.

$\varphi(x,x_0)=\dfrac{g(x)-g(x_0)}{g(x)}\cdot\dfrac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}$. Заметим, что

$\varphi(x,x_0)\xrightarrow[x\to a+0]{}1$ (условие 5)). Применим к отрезку $[x;x_0]$ и функциям $f(x)$, $g(x)$ теорему Коши. Тогда для некоторой точки $c\in(x;x_0)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\varphi(x,x_0)=\frac{f'(c)}{g'(c)}+\frac{f'(c)}{g'(c)}(\varphi(x,x_0)-1),$$

и всех x, для которых $|\varphi(x,x_0)-1|<\varepsilon$, имеем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|\leq\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}-A\right|+\left|\frac{f'(c)}{g'(c)}\right|\cdot|\varphi(x,x_0)-1|\leq\varepsilon+(|A|+\varepsilon)\cdot\varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

(2) Пусть $A=\infty$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists x_0:\forall x\in(a;x_0)\to\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Если x достаточно близок к a, то из равенства

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\cdot\varphi(x,x_0)$ следует $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|=\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)}\right|\left|\varphi(x,x_0)\right|\geq\dfrac{1}{2\varepsilon}$,

т.е. $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

УПРАЖНЕНИЕ. Пусть $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ и при любых x_1, x_2 из этого отрезка выполняется неравенство:

$|f(x_1)-f(x_2)|\leq C|x_1-x_2|^{1+\alpha}$, $\alpha>0$. Доказать, что функция $y=f(x)$ постоянная.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Локальный экстремум функции, теорема Ферма.
2. Теоремы о среднем для производных. Теорема Ролля.
3. Теоремы о среднем для производных. Теорема Коши.
4. Теоремы о среднем для производных. Теорема Лагранжа.
5. Теорема Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\dfrac{0}{0}$.
6. Теорема Лопиталя для раскрытия неопределенностей $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Лекция 11. Формула Тейлора.

П.1. Производные и дифференциалы высших порядков

ОПР. Производной второго порядка называют производную от функции первой производной. В общем случае,

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

ПРИМЕР 1. Доказать, что

(1) $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$; (2) $\left(x^\alpha\right)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$;

(3) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$; (4) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

(5) $(\ln x)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

ДОК. (3) по индукции. 1) при $n=1$ $(\sin x)'=\cos x=\sin(x+\dfrac{\pi}{2})$ и формула верна; 2) индуктивное предположение для $k=n-1$:

$(\sin x)^{(n-1)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi(n-1)}{2}\right)$. Тогда

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)'=\cos\left(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)=\sin(x+\frac{\pi n}{2}).$$

ПРИМЕР 2. Найти вторую производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases}x=\varphi_1(t),\\ y=\varphi_2(t),\end{cases}$, $t\in[\alpha;\beta]$.

$$y''=(y')'=\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_1'}\right)_t'\cdot t_x'=\frac{\varphi_2''\cdot\varphi_1'-\varphi_2'\cdot\varphi_1''}{(\varphi_1')^2}\cdot\frac{1}{\varphi_1'}==\frac{\varphi_2''\cdot\varphi_1'-\varphi_2'\cdot\varphi_1''}{(\varphi_1')^3}.$$

ОПР. Дифференциалом второго порядка функции, называют дифференциал от первого дифференциала. В общем случае,

$$d^{(n)}f=d\left(d^{(n-1)}f\right).$$

Так $d^{(2)}f=d(df)=d(f'(x)dx)=dxf''(x)dx=f''(x)(dx)^2$.

В общем случае, $d^{(n)}f(x)=f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n$.

ПРИМЕР 3. Форма второго дифференциала не инвариантная.
ДОК. Если сложная функция получена композицией функций $z = f(y)$ и $y = g(x)$, то $dz = f'(y)dy$ и

$$d^2z = dy \cdot d(f'(y) + f'(y) \cdot d^2y = f''(y)(dy)^2 + f'(y)d^2g.$$

Если y – независимая переменная, то $d^2f = f''(y)(dy)^2$, т.е. форма второго дифференциала неизменна, если $d^2g(x) \equiv 0 \to g(x) = ax + b$, в остальных случаях при переходе к сложной функции второй дифференциал изменяет свою форму.

ПРИМЕР 4 (бином Ньютона). Найдем коэффициенты многочлена

$$P_n(x) = (x+1)^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_kx^k + \ldots + c_nx^n.$$

Тогда числа $c_k = \frac{1}{k!}\left((x+1)^n\right)^{(k)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ называются коэффициентами бинома Ньютона, а формулу

$$(a+b)^n = a^n\left(\frac{b}{a}+1\right)^n = a^n\sum_{k=0}^{n} c_k\frac{b^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{n} c_k a^{n-k}b^k.$$

биномом Ньютона.

П.2. Формула Тейлора в с остаточным членом в форме Пеано и ее приложения

ПРИМЕР 5 (многочлен Тейлора). Для каждой функции $y = f(x)$, имеющей n производных в точке $x = a$, можно написать многочлен Тейлора:

$$T^n_{f,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Заметим, что бином Ньютона является многочленом Тейлора функции $(x+1)^n$ в точке $a = 0$. Разность $R^n_{f,a}(x) = f(x) - T^n_{f,a}(x)$ называется остатком формулы Тейлора. Отметим некоторые свойства функции $R^n_{f,a}(x)$:

1) $R^n_{f,a}(a) = 0$, т.к. $R^n_{f,a}(a) = f(a) - T^n_{f,a}(a) = f(a) - f(a) = 0$.

2) $\left(R^n_{f,a}(x)\right)^{(k)}\Big|_{x=a} = 0$, для $k = 1,2,\ldots n$, т.к.

$$\left(R^n_{f,a}(x)\right)^{(k)}\Big|_{x=a} = f^{(k)}(a) - f^{(k)}(a) = 0.$$

3) $\left(R^n_{f,a}(x)\right)^{(n+1)} = f^{(n+1)}(x)$.

ТЕОРЕМА 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Если существует производная $f^{(n)}(a)$, то

$$f(x) = T^n_{f,a}(x) + o((x-a)^n).$$

ДОК. Применим правило Лопиталя для вычисления предела:

$$\lim_{x\to a}\frac{R^n_{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{(R^n_{f,a}(x))'}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to a}\frac{(R^n_{f,a}(x))^{(n)}}{n!} =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)}{n!} = 0.$$

П.3. Формулы Тейлора для основных элементарных функций в точке $a = 0$.

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$,

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$,

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$,

(4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$,

(5) $shx = (x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}) + o(x^{2n+1})$,

(6) $chx = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}) + o(x^{2n})$,

(7) $$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+ +\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

ДОК. формулы(2) :

$$(\sin x)^{(2k+1)}\Big|_{x=0}=\sin\left(x+\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)_{x=0}=\sin\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(\pi k)=(-1)^k$$

$$(\sin x)^{(2k)}\Big|_{x=0}=\sin\left(x+\frac{(2k)\pi}{2}\right)_{x=0}=\sin(\pi k)=0\cdot$$

ДОК. формулы (3): $(\ln(1+x))'_{x=0}=\left.\frac{1}{1+x}\right|_{x=0}=1,$

$$(\ln(1+x))''_{x=0}=\left.\frac{-1}{(1+x)^2}\right|_{x=0}=-1,\ (\ln(1+x))^{(3)}_{x=0}=\left.\frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}\right|_{x=0}=(-1)^2\cdot 2!,$$

$$(\ln(1+x))^{(k)}_{x=0}=\left.\frac{(-1)(-2)\ldots(-k+1)}{(1+x)^k}\right|_{x=0}=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

ДОК. формулы (1): $\left(e^x\right)^{(k)}\Big|_{x=0}=e^x\Big|_{x=0}=1.$

ДОК. формулы (4) :

$$shx=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right),e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n),\quad e^x-e^{-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

П.4. Формула для эквивалентной бесконечно малой функции

ТЕОРЕМА 2. Пусть $y=f(x)$ бесконечно малая функция в точке $x=a$, и ее производные $f^{(k)}(x)$ существуют в точке $x=a$ до порядка n , причем $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$, а $f^n(a)\neq 0$. Тогда $f(x)\sim\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

ДОК. По формуле Тейлора : $f(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n)=$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right).$$

П.5. Таблица (расширенная) эквивалентностей элементарных функций в точке $a=0$

(1) $\sin x-x\sim-\frac{1}{6}x^3$; (2) $\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^3$;

(3) $arctgx-x\sim-\frac{1}{3}x^3$; (4) $tgx-x\sim\frac{1}{3}x^3$;

(5) $(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x\sim\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$; (6) $\ln(1+x)-x\sim-\frac{1}{2}x^2$;

(7) $e^x-1-x\sim\frac{1}{2}x^2$; (8) $shx-x\sim\frac{1}{2}x^3$.

ДОК. формулы (3): $(arctgx)'-1=\left.\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)\right|_{x=0}=0,$

$$(arctgx)''=\left.\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)\right|_{x=0}=0,\ (arctgx)^{(3)}_{x=0}=-2.$$

ДОК. формулы (4):

$$(tgx-x)'_{x=0}=\left.\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\right|_{x=0}=0,(tgx-x)''_{x=0}=\left.\left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)\right|_{x=0}=0,$$

$$(tgx-x)^{(3)}_{x=0}=2.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Производные и дифференциалы высших порядков. Вторая производная функции, заданной параметрически.
2. Многочлен Тейлора, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
3. Формула Тейлора для элементарных функций .
4. Формула для эквивалентной бесконечно малой функции. Таблица эквивалентностей.

Лекция 12 . Формула Тейлора (продолжение)

П.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

ТЕОРЕМА 1 (обобщенная теорема Коши).

Пусть даны функции $y = f(x)$, $y = g(x)$, определенные на отрезке $[a;b]$, имеющие непрерывные производные до порядка $(n+1)$ на интервале $(a;b)$, причем

1) $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n)}(a) = 0$ (производные в точке a правые),
2) $g(a) = g'(a) = ... = g^{(n)}(a) = 0$,
3) $g^{(k)}(x) \neq 0,\ x \in (a;b)$, для $k = 0,1,2,...n,(n+1)$.

Тогда существует $c \in (a,b)$, для которого $\dfrac{f(b)}{g(b)} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$.

ДОК. Применим последовательно теорему Коши для функции $f(x)$ и ее производных: существует точка $c_1 \in (a;b)$, для которой : $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f(b)}{g(b)} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_1)}$. На отрезке $[a;c_1]$ выполняются условия теоремы Коши для $f'(x)$ и существует точка $c_2 \in (a;c_1)$, для которой $\dfrac{f(b)}{g(b)} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \dfrac{f'(c_1)-f'(a)}{g'(c_1)-g'(a)} = \dfrac{f''(c_2)}{g''(c_2)}$.

Продолжая, на отрезке $[a;c_n]$ существует точка $c \in (a;c_n)$, для которого $\dfrac{f(b)}{g(b)} = \dfrac{f^{(n)}(c_n)}{g^{(n)}(c_n)} = \dfrac{f^{(n)}(c_n)-f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(c_n)-g^{(n)}(a)} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{g^{(n+1)}(c)}$.

ТЕОРЕМА 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до (n+ 1) порядка на конечном отрезке $[a;b]$. Тогда существует $c \in (a,b)$, для которого

$$f(b) = T^n_{f,a}(b) + R^n_{f,c}(b), \text{ где } R^n_{f,c}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

(остаточный член в форме Лагранжа).

ДОК. Применим обобщенную теорему Коши для функций $\mathcal{F}(x) = f(x) - T^n_{f,a}(x)$ и $g(x) = (x-a)^{(n+1)}$. Условия теоремы проверялись для функции $\mathcal{F}(x)$ (см. пример 5, лекция11) и очевидны для функции $g(x)$. Тогда существует точка $c \in (a,b)$, для которой

$$\frac{\mathcal{F}(b)}{(b-a)^{(n+1)}} = \frac{\mathcal{F}^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \to \mathcal{F}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

П.2. Интервалы монотонности

ОПР. Функция возрастает в точке $x = a$, если $\Delta f \cdot \Delta x > 0$ для любых достаточно малых Δx, т.е. положительным приращениям аргумента соответствуют положительные приращения функции и уменьшению аргумента ($\Delta x < 0$) соответствует уменьшение значения функции ($\Delta f < 0$).

ОПР. Функция убывает в точке $x = a$, если $\Delta f \cdot \Delta x < 0$ для любых достаточно малых Δx, т.е. положительным приращениям аргумента соответствуют отрицательные приращения функции и уменьшению аргумента ($\Delta x < 0$) соответствует увеличение значения функции ($\Delta f > 0$).

ОПР. Интервал $(a;b)$ называется интервалом возрастания (убывания) функции $y = f(x)$, если каждая его внутренняя точка является точкой возрастания (убывания) функции.

ТЕОРЕМА 3 (достаточные монотонности функции).

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируемая на интервале $(a;b)$ и $f'(x) > 0$, ($f'(x) < 0$) , $\forall x \in (a,b)$. Тогда функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$.

ДОК. (1) для возрастания функции. Пусть $[x_1;x_2] \subset (a;b)$. Тогда по теореме о среднем Лагранжа существует число $c \in (x_1;x_2)$, для которого $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0 \to f(x_1) < f(x_2)$.

(2) для убывания функции доказательство по аналогии.

Таким образом, интервалы монотонности функции совпадают с интервалами знакопостоянства ее производной. Для их нахождения необходимо найти производную функции, приравнять ее нулю и найти точки из области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует. Эти точки, называемые критическими, являются границами интервалов монотонности. Если на заданном интервале производная $f'(x) > 0$, то это интервал возрастания функции, в противном случае – это интервал убывания. Точка, в которой $f'(x) = 0$, может служить границей противоположных интервалов монотонности или, например, двух интервалов возрастания, которые можно объединить в один.

ПРИМЕР 1. Функция $y = x^3$ строго возрастает на R, но $x = 0$ не является критической точкой.

П.3. Экстремумы функции. Необходимые и достаточные условия. Понятия локального экстремума (максимума или минимума) можно сформулировать в терминах приращения функции: функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = a$ строгий локальный максимум, если ее приращение $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) < 0$ для любых достаточно малых Δx. Для локального минимума знак неравенства противоположный. Для не строгого локального максимума знаки неравенства не строгие.

ТЕОРЕМА 4 (необходимое условие экстремума). Пусть в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет локальный экстремум. Тогда либо $f'(a) = 0$, либо производной в точке $x = a$ не существует.

ДОК. (1) для максимума. Если производной в точке $x = a$ нет, то теорема доказана. Если производная существует, то

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \le 0 \text{ и } f'(a) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0, \text{ т.е. } f'(a) = 0.$$

(2) для минимума доказательство по аналогии.

ПРИМЕР 2. Функция $y = |x|$ имеет в точке $x = 0$ строгий локальный минимум, хотя в точке $x = 0$ производной у функции нет.

ТЕОРЕМА 5 (достаточное условие экстремума по первой производной). Пусть точка a является границей двух интервалов монотонности $(a_1; a)$ и $(a; b_1)$, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, причем: (1) интервал $(a_1; a)$ является интервалом возрастания, а $(a; b_1)$ интервалом убывания функции. Тогда в точке $x = a$

функция имеет локальный максимум; (2) интервал $(a_1; a)$ является интервалом убывания, а $(a; b_1)$ интервалом возрастания функции, тогда в точке $x = a$ функция имеет локальный минимум.

ДОК. (1) Из непрерывности функции в точке $x = a$ и монотонного роста функции на интервале $(a_1; a)$ следует, что $\sup\limits_{x \in (a_1; a)} f(x) = f(a)$ и $f(x) \le f(a)$ для $\forall x \in (a_1; a)$. Аналогично, $\inf\limits_{x \in (a; b_1)} f(x) = f(a)$ и $f(a) \le f(x)$ для $\forall x \in (a; b_1)$. Тогда $\Delta f \le 0$ для достаточно малых Δx. Если предположить строгую монотонность на интервалах $(a_1; a)$ и $(a; b_1)$, то экстремум будет строгим.

ТЕОРЕМА 6 (достаточное условие экстремума по второй производной). Если точка $x = a$ критическая и существует $f''(a) \ne 0$, то в точке $x = a$ функция имеет локальный минимум, если $f''(a) > 0$, и локальный максимум, если $f''(a) < 0$.

ДОК. Заметим, что в условиях теоремы $f'(a) = 0$. Разложим функцию $y = f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = a$:

$$\Delta f = \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o\left((x-a)^2\right) = \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2(1 + o(1)).$$

Тогда в малой окрестности точки $x = a$, приращение Δf сохраняет знак производной $f''(a)$. Если $f''(a) > 0$, то $\Delta f > 0$ для достаточно малых значений Δx, т.е. в точке $x = a$ локальный минимум. Если $f''(a) < 0$, то $\Delta f < 0$ для достаточно малых Δx и в точке $x = a$ у функции локальный максимум. Последняя теорема обобщается на случай производных более высоких порядков.

ТЕОРЕМА 7 (достаточное условие экстремума по производной четного порядка). Если в точке $x = a$ производные $f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(2n-1)}(a) = 0$, $f^{(2n)}(a) \ne 0$, то в точке $x = a$ функция имеет локальный минимум, если $f^{(2n)}(a) > 0$ и максимум, если $f^{(2n)}(a) < 0$.

ДОК. Воспользуемся формулой Тейлора:

$$\Delta f = \frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!}(x-a)^{2n}(1+o(1)).$$

Тогда знак приращения Δf определяется знаком производной $f^{(2n)}(a)$.

УПРАЖНЕНИЕ. Исследовать функцию на экстремум в окрестности точки $x = a$, если

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(2n)}(a) = 0, \text{ а } f^{(2n+1)}(a) \neq 0.$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Обобщенная теорема Коши и формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
2. Возрастание функции в точке и на интервале. Теорема о достаточном условии возрастания функции на интервале. Нахождение интервалов монотонности.
3. Локальный экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума по первой производной.
4. Достаточное условие экстремума по второй производной и четной производной.

Лекция 13. Исследование функции, график функции.

П.1 Выпуклость функции.

ОПР. Функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется выпуклой (вниз), если выражение $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) > 0$, $\forall x \in \overset{0}{U}_\theta(a)$.

ОПР. Функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ называется выпуклой (вверх), если выражение $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) < 0$, $\forall x \in \overset{0}{U}_\theta(a)$

ОПР. Функция $y = f(x)$ называется выпуклой (вниз или вверх) на интервале (a,b), если она выпукла (вниз или вверх) в каждой точке этого интервала.

ТЕОРЕМА 1(достаточные условия выпуклости по первой производной). Пусть функция $y = f(x)$, дифференцируемая в окрестности точки $x = a$, удовлетворяет условию: (1) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $x \in (a; a+\varepsilon)$ выполняется неравенство $f'(x) < f'(a)$ и при всех $x \in (a-\varepsilon; a)$ выполняется неравенство $f'(x) > f'(a)$. Тогда функция выпукла (вверх) в точке $x = a$.
(2) существует $\varepsilon > 0$ такое, что при всех $x \in (a; a+\varepsilon)$ выполняется неравенство $f'(x) > f'(a)$ и при всех $x \in (a-\varepsilon; a)$ выполняется неравенство $f'(x) < f'(a)$. Тогда функция выпукла (вниз) в точке $x = a$.

ДОК.(1) На отрезке $[a;x] \subset [a;a+\varepsilon)$ к функции $f(x)$ применима теорема Лагранжа: $f(x) - f(a) = f'(c_1)(x-a)$, $c_1 \in (a;x)$. Тогда

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = (f'(c_1) - f'(a))(x-a) < 0.$$

На отрезке $[x;a] \subset (a-\varepsilon;a]$ к функции $f(x)$ также применима теорема Лагранжа: $f(x) - f(a) = f'(c_2)(x-a)$, $c_2 \in (x;a)$. Тогда

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = (f'(c_2) - f'(a))(x-a) < 0.$$

Доказательство (2) проведите самостоятельно.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия выпуклости по второй производной). Если функция $y = f(x)$, имеющая на интервале (a,b) вторую производную, удовлетворяет условию: $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция выпукла (вверх) на интервале (a,b).

Если $f''(x) > 0$ для всех $x \in (a;b)$, то функция выпукла (вниз) на интервале (a,b).

ДОК. Пусть $x_0 \in (a,b)$ произвольная точка интервала (a,b).

По формуле Тейлора:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2(1 + o(1)) < 0$$

для всех $x \in \overset{0}{U}_\theta(x_0)$, т.е. функция выпукла (вверх) в точке x_0.

Второе утверждение теоремы докажите самостоятельно.

ПРАВИЛО для нахождения интервалов выпуклости необходимо: 1) найти вторую производную функции; 2) определить критические точки второго рода, т.е. точки, в которых вторая производная равна нулю, либо не существует; 3) расположить критические точки на числовой оси (на области определения функции) и разбить ее на интервалы, границами которых являются критические точки второго рода; 4) выяснить знак второй производной на каждом из интервалов и определить характер выпуклости.

П.2. Точка перегиба

ОПР. Точка $x = a$ называется точкой перегиба функции $y = f(x)$, если производная $f'(x)$ функция непрерывна в этой точке и $x = a$ является границей двух различных интервалов выпуклости (вверх и вниз).

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие перегиба). Если $x = a$ точка перегиба, то либо $f''(a) = 0$, либо вторая производная в точке $x = a$ не существует.

ДОК. Если вторая производная не существует, то теорема доказана. Если она существует и не равна нулю, то выражение

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2(1 + o(1))$$

сохраняет знак в малой окрестности $\overset{0}{U}_\theta(a)$, т.е. функция выпукла (вверх или вниз) в точке $x = a$ и поэтому точкой перегиба не является.

ТЕОРЕМА 4 (достаточное условие перегиба по второй производной). Пусть функция $y = f(x)$ в окрестности точки $x = a$ удовлетворяет условиям: 1) существует $f''(x)$ для всех $x \in U_\theta(a)$;

2) $f''(x) > 0, \forall x : a - \theta < x < a$ и $f''(x) < 0, \forall x : a < x < a + \theta$

(или $f''(x) < 0, \forall x : a - \theta < x < a$ и $f''(x) > 0, \forall x : a < x < a + \theta$).

Тогда в точке $x = a$ перегиб.

ДОК. Из условия 1) теоремы следует, что функция $f'(x)$ непрерывная в точке $x = a$. Из условия 2) и теоремы 2 следует, что интервалы $(a - \theta; a)$ и $(a; a + \theta)$ являются интервалами выпуклости функции $y = f(x)$ вверх и вниз (или вниз и вверх). Тогда в точке $x = a$ перегиб.

П. 3. Асимптоты графика функции

ОПР. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если функция является бесконечно большой в точке $x = a$.

ПРИМЕР 1. Для функции $y = \dfrac{\sin x}{x(x-2)^2}$ прямая с уравнением $x = 2$ является вертикальной асимптотой, а прямая $x = 0$ асимптотой не является.

ОПР. Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ на бесконечности, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

ПРИМЕР 2. Прямая с уравнением $y = 0{,}5$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = \sqrt{x(x+1)} - x$ на $+\infty$, поскольку

$$\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x(x+1)} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x+1) - x^2}{\sqrt{x(x+1)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}} + 1\right)} = 0{,}5.$$

Заметим, что на $-\infty$ функция не имеет горизонтальной асимптоты.

ОПР. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ на бесконечности, если

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0.$$

ТЕОРЕМА 5. Если график функции $y=f(x)$ имеет прямую $y=kx+b$ своей наклонной асимптотой, то

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

ДОК. По условию $f(x)-kx-b=\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая функция на бесконечности и $\frac{f(x)}{x}=k+\frac{\alpha(x)}{x}$. Поскольку $\frac{\alpha(x)}{x}$ бесконечно малая функция на бесконечности, то $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$. По условию $b=f(x)-kx-\alpha(x)$ и по теореме 8 (лекция 5) $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$.

ТЕОРЕМА 6. Если для функции $y=f(x)$ существуют пределы $k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)$, то прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой ее графика.

ДОК. По условию $f(x)-kx=b+\alpha(x)$. Тогда $f(x)-kx-b=\alpha(x)\to\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$.

ПРИМЕР 3. Доказать, что функция $y=\sqrt{x(x+1)}-x$ имеет на $-\infty$ прямую $y=-2x+0{,}5$ своей наклонной асимптотой. Действительно, $k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(x+1)}-x}{x}=k=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x(x+1)}-x}{x}=$

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{t(t-1)}+t}{-t}=-\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{t}}+1\right)=-2 \text{ и } b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x(x+1)}+x\right)=\lim_{t\to+\infty}(\sqrt{t(t-1)}-t)=0{,}5.$$

П.4. Схема построения графика функции

При построении графика функции полезно следовать следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) определить

особенности функции: четность, нечетность, периодичность или его отсутствие; 3) вычислить первую производную функции; 4) отметить на области определения функции критические точки первого рода, отметить интервалы монотонности и определить характер монотонности (возрастание или убывание); 5) среди критических точек отметить точки экстремума (максимума или минимума); 6) вычислить вторую производную функции; 7) отметить на области определения функции критические точки второго рода, выделить интервалы выпуклости и определить характер выпуклости (вниз или вверх); 8) среди критических точек второго рода отметить точки перегиба; 9) установить асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные, наклонные ; 10) построить график функции с учетом обнаруженных в пунктах 1)-9) особенностей.

ПРИМЕР 4. Построить график функции $y=\sqrt{x(x+1)}-x$.

Решение. 1) $D_y=(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)$; 2) функция общего вида;

3) $f'(x)=\frac{2x-1-2\sqrt{x(x+1)}}{2\sqrt{x(x+1)}}$; 4) $f'(x)>0$ при $x\in(0;+\infty)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty;-1)$, критические точки первого рода $x=-1$ и $x=0$, в них производной нет (она бесконечно большая, вертикальная касательная); 5) точек экстремума нет;

6) $f''(x)=-\frac{1}{4(x(x+1))^{3/2}}$; 7) критические точки второго рода $x=-1$ и $x=0$, в них производной нет, функция на области определения выпукла вверх; 8) точек перегиба нет; 9) вертикальных асимптот нет, прямая $y=0{,}5$ горизонтальная асимптота на $+\infty$ и прямая $y=-2x-0{,}5$ является наклонной асимптотой на $-\infty$.

На рис.4 изображен график функции.

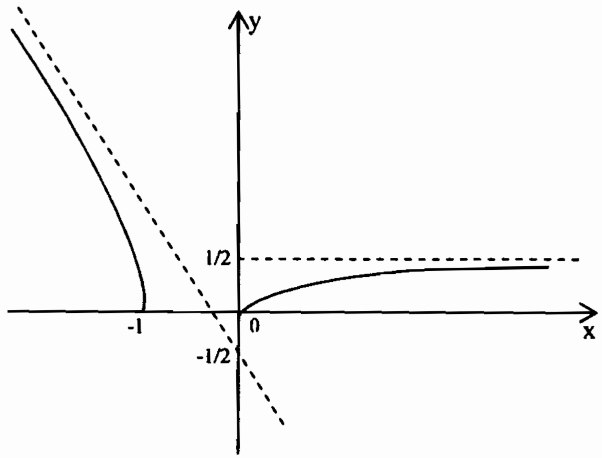


Рис. 4

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВОПРОСЫ.

1. Выпуклость функции, достаточное условие выпуклости по первой производной, достаточное условие выпуклости по второй производной.
2. Точка перегиба, необходимое условие перегиба, достаточное условие перегиба.
3. Асимптоты графика функции : вертикальные, горизонтальные, наклонные. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты.
4. Общая схема исследования функции и построения ее графика. Проиллюстрировать схему на примере по выбору.

Список рекомендованной литературы

1. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одной переменной. Ч. 1-2. М.: Наука, 1969.
2. Зорич В.А.. Математический анализ. Ч. 1-2. М.: Наука, 1984.