МИФИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по теме

"Нахождение пределов"

Москва 2004

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МИНИСТЕРСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по теме

"Нахождение пределов"

Москва 2004

УДК 519.2(07)
ББК 22.171я7
М 54

Методические указания по теме "Нахождение пределов".
М.: МИФИ, 2004. – 24 с.

Рассмотрены некоторые способы решения задач, предлагаемых студентам первого семестра всех факультетов в домашнем задании ДЗ 2–7: нахождение пределов и выделение главных членов у числовых последовательностей и функций одной переменной. Приведена краткая таблица свойств эквивалентных величин. Дано 30 примерно одинаковых по трудности вариантов домашних заданий.

Предназначены для студентов первого курса всех факультетов.

Авторы: А.П. Горячев, Ю.Н. Гордеев, Д.С. Теляковский/
Под редакцией доцента А.П. Горячева.

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

1. Вычисление предела последовательности

1.1. Пример решения задачи

Найти предел последовательности или доказать, что он не существует.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, заданную рекуррентным соотношением:

$$x_0 = 0; \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 4x_n + 5}{10}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (1.1)$$

Докажем, пользуясь методом математической индукции, что последовательность (1.1) ограничена, а именно:

$$0 \leqslant x_n < 1. \qquad (1.2)$$

Левое из неравенств (1.2) выполняется согласно определению последовательности (1.1), откуда также вытекает и правое из неравенств (1.2) для $n = 0$. Предположим, что неравенство (1.2) справедливо для некоторого натурального n, и установим, что оно будет выполняться и для $n + 1$.

Действительно,

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_{n+1}^2 - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{(x_n - 1)(x_n + 5)}{10\,(x_{n+1} + 1)} < 0,$$

то есть

$$x_{n+1} < 1.$$

Тем самым неравенство (1.2) полностью доказано для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Покажем, что последовательность (1.1) является монотонной. Разность

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{x_{n+1} + x_n} = \frac{(1 - x_n)(9x_n + 5)}{10(x_{n+1} + x_n)},$$

и поскольку $x_n < 1$ согласно (1.2), то $x_{n+1} > x_n$, то есть последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ является монотонно возрастающей.

Таким образом, последовательность (1.1) монотонна и ограничена. Следовательно, по теореме о сходимости монотонных и ограниченных последовательностей существует предел

$$b = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{1.3}$$

Отметим, что из (1.1) и (1.3) согласно теоремам о предельном переходе в неравенствах следует, что

$$0 \leqslant b \leqslant 1. \tag{1.4}$$

Для нахождения b рекуррентную формулу (1.1) запишем в виде

$$10x_{n+1}^2 = x_n^2 + 4x_n + 5.$$

Переходя в этом равенстве к пределу, получим:

$$10 \cdot \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n + 4 \lim_{n\to\infty} x_n + 5.$$

Так как $b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$, то величина b удовлетворяет квадратному уравнению

$$10b^2 = b^2 + 4b + 5, \iff 9b^2 - 4b - 5 = 0, \iff b = 1 \text{ или } b = -\frac{5}{9}.$$

Отсюда и из (1.4) следует, что $b = 1$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

1.2. Варианты заданий. Найти предел последовательности или доказать, что он не существует

№	Последовательность
1	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + x_n + 1}{3}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
2	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + 2x_n + 3}{6}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
3	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + x_n + 2}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
4	$x_0 = \dfrac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3x_n^2 + 2x_n + 1}{6}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
5	$x_0 = \dfrac{1}{3}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3x_n^2 + 1}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
6	$x_0 = -\dfrac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 + x_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
7	$x_0 = \dfrac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n - x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
8	$x_0 = \dfrac{5}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + x_n + 1}{3}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
9	$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + 2x_n + 3}{6}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
10	$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{x_n^2 + x_n + 2}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

продолжение на следующей странице

продолжение	
№	Последовательность
11	$x_0 = 3, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3x_n^2 + 2x_n + 1}{6}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
12	$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{3x_n^2 + 1}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
13	$x_0 = -\dfrac{1}{3}, \quad x_{n+1} = x_n + 2x_n^2 + 3x_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
14	$x_0 = \dfrac{1}{4}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n - x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
15	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + x_n + 1}{3}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
16	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2x_n + 3}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
17	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + x_n + 2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
18	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \dfrac{3x_n^2 + 2x_n + 1}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
19	$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = \dfrac{3x_n^2 + 1}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
20	$x_0 = -\dfrac{1}{3}, \quad x_{n+1} = x_n + 3x_n^2 + 2x_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
21	$x_0 = \dfrac{3}{5}, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n - x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
окончание на следующей странице	

		окончание
№	Последовательность	
22	$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 2x_n + 3}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
23	$x_0 = \dfrac{3}{2}, \quad x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + x_n + 2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
24	$x_0 = \dfrac{3}{4}, \quad x_{n+1} = \dfrac{3x_n^2 + 2x_n + 1}{6}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
25	$x_0 = \dfrac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \dfrac{3x_n^2 + 1}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
26	$x_0 = -\dfrac{1}{3}, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 + 2x_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
27	$x_0 = -\dfrac{1}{3}, \quad x_{n+1} = x_n + 2x_n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
28	$x_0 = -\dfrac{1}{4}, \quad x_{n+1} = x_n + 4x_n^2 + 2x_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
29	$x_0 = \dfrac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n + x_n^2 - x_n^3, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	
30	$x_0 = \dfrac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$	

2. Вычисление предела функции

Для нахождения пределов функций (а также для выделения главных членов последовательностей и функций) нам потребуются асимптотические разложения некоторых основных элементарных функций при $x \to 0$ (табл. 1), а также свойства символа "o малое" (табл. 2).

Таблица 1

$\sin x = x + o(x)$	$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$
$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
$\ln(1+x) = x + o(x)$	$\operatorname{sh} x = x + o(x)$
$e^x = 1 + x + o(x)$	$\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$
$a^x = 1 + x \ln a + o(x)$	$\operatorname{th} x = x + o(x)$

Пусть C – некоторая постоянная, не равная нулю, а α, β и γ – произвольные вещественные числа. Тогда справедливы соотношения:

Таблица 2

$o(f) \pm o(f) = o(f)$	$o(Cf) = o(f)$
$Co(f) = o(f)$	$o(o(f)) = o(f)$
$o(f + o(f)) = o(f)$	$\left(f^{\alpha} \cdot o\left(f^{\beta}\right)\right)^{\gamma} = o\left(f^{(\alpha+\beta)\gamma}\right)$

2.1. Пример решения задачи

Найти предел функции или доказать, что он не существует:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}. \tag{2.1}$$

В этом примере мы имеем дело с неопределённостью вида 1^∞. Так как $(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \mathrm{e}^{\operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln\cos x}$, то воспользовавшись непрерывностью показательной функции, будем искать предел показателя. Согласно приведённым выше таблицам при $x \to 0$ имеем:

$$\operatorname{ctg}^2 x \cdot \ln\cos x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) =$$

$$= \frac{-\dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{(x + o(x))^2} = \frac{-\dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)}{x^2 + o\left(x^2\right)} = \frac{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}}{1 + \dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}} \to -\frac{1}{2},$$

то есть предел (2.1) равен $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

2.2. Варианты заданий. Найти предел функции или доказать, что он не существует

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2^{3x} + 3^{2x} - \cos x\right)^{\operatorname{ctg} x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2^{x} - \sin 2x\right)^{\operatorname{ctg} x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x + 3^x}{2}\right)^{2\operatorname{ctg} x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^{2x} + 3^{3x} + 4^{5x}}{3}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}\right)^{\operatorname{ctg} 2x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2^{3x} + 3\sin 2x\right)^{\operatorname{ctg} 3x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+\cos x+\cos 2x}{3}\right)^{\frac{3}{\sin x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^x+\cos 3x+\sin 2x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x-3^{2x}+\cos 3x\right)^{\frac{1}{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x+3^x-4^x\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{\frac{x}{2}}+3^{\frac{x}{3}}}{2}\right)^{\frac{12}{\sin x}}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}+e^{3x}+e^{4x}}{3}\right)^{\operatorname{ctg} 2x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{2x}+2\sin x\right)^{\operatorname{ctg} 2x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+\cos 2x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3^x+\cos x-\sin 2x}{2}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{3x}}{2}\right)^{\frac{\cos 2x}{\sin x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+2^{2x}+2^{3x}}{3}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+\cos 2x+\sin x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{3x}+3^{2x}-4^x\right)^{\frac{\cos 3x}{\sin x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{\frac{x}{3}}+3^{\frac{x}{2}}}{2}\right)^{24\operatorname{ctg} 2x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^x+3^x+\cos x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{3x}-3^{2x}+4^x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{2x}+3^{3x}+\cos 4x}{3}\right)^{\frac{3}{\sin x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}-2\sin 3x\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2^{4x}+3^{3x}+\cos 4x}{3}\right)^{\frac{\cos 2x}{\sin x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\dfrac{\sin 3x}{3}\right)^{\frac{\cos 2x}{\sin x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-\cos x+\cos 2x)^{\operatorname{ctg} x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}-\dfrac{\sin 2x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin 2x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+\sin x\right)^{\operatorname{ctg}2x}$. 30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x^2}-\operatorname{tg}x\right)^{\operatorname{ctg}x}$.

3. Выделение главного члена функции

3.1. Пример решения задачи

Найти для функции $f(x)$ при $x\to x_0$ главный член вида $C\,(x-x_0)^\alpha$:

$$f(x)=(\cos 2x)^{3\operatorname{tg}^2 x}-1,\quad \text{если } x\to 0. \tag{3.1}$$

Запишем функцию (3.1) в виде

$$f(x)=e^{3\operatorname{tg}^2 x\cdot\ln\cos 2x}-1 \tag{3.2}$$

и, воспользовавшись таблицами 1 и 2, преобразуем показатель у экспоненты в выражении (3.2). Мы имеем:

$$3\operatorname{tg}^2 x\cdot\ln\cos 2x=3\big(x+o(x)\big)^2\ln\big(1-2x^2+o\,(x^2)\big)=$$

$$=3\big(x^2+o\,(x^2)\big)\big(-2x^2+o\,(x^2)\big)=$$

$$=3\big(-2x^4+o\,(x^4)\big)=-6x^4+o\,(x^4).$$

Отсюда и из (3.2) получаем

$$f(x)=e^{-6x^4+o(x^4)}-1=$$

$$=-6x^4+o\,(x^4)+o\big(-6x^4+o\,(x^4)\big)=-6x^4+o\,(x^4),$$

то есть

$$f(x)-g(x)=o\left(x^4\right),$$

где $g(x)=-6x^4$. Следовательно,

$$f(x)\sim -6x^4.$$

Таким образом, $C=-6$, а $\alpha=4$.

3.2. Варианты заданий

Найти для функции $f(x)$ при $x \to x_0$ главный член вида $C\,(x - x_0)^{\alpha}$.

1. $f(x) = (\cos x)^{\cos x} - 1, \qquad x \to 0.$
2. $f(x) = x^{\operatorname{ctg} x} - 1, \qquad x \to 1.$
3. $f(x) = (\cos x)^{\sin x} - 1, \qquad x \to 0.$
4. $f(x) = (\sin x)^{x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$
5. $f(x) = (\sin x)^{\sin x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$
6. $f(x) = x^{\operatorname{tg} x} - \dfrac{\pi}{4}, \qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$
7. $f(x) = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$
8. $f(x) = (\cos x)^{x} - 1, \qquad x \to 0.$
9. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$
10. $f(x) = x^{\sin x} - 1, \qquad x \to 1.$
11. $f(x) = (\sin x)^{\cos x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$
12. $f(x) = (\cos x)^{x} - 1, \qquad x \to 2\pi.$
13. $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{ctg} x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$
14. $f(x) = x^{\cos x} - \dfrac{1}{\pi}, \qquad x \to \pi.$
15. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$
16. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$

17. $f(x) = x^{\cos x} - 1, \qquad x \to 1.$

18. $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$

19. $f(x) = x^{\sin x} - \dfrac{\pi}{2}, \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$

20. $f(x) = x^{\cos x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$

21. $f(x) = (\operatorname{ctg} x)^{x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$

22. $f(x) = x^{\operatorname{tg} x} - 1, \qquad x \to 1.$

23. $f(x) = (\cos x)^{\operatorname{tg} x} - 1, \qquad x \to 0.$

24. $f(x) = x^{\sin x} - \dfrac{2}{3\pi}, \qquad x \to \dfrac{3\pi}{2}.$

25. $f(x) = x^{\cos x} - 1, \qquad x \to \dfrac{3\pi}{2}.$

26. $f(x) = x^{\sin x} - 1, \qquad x \to \pi.$

27. $f(x) = x^{\cos x} - 2\pi, \qquad x \to 2\pi.$

28. $f(x) = x^{\sin x} - 1, \qquad x \to 2\pi.$

29. $f(x) = x^{\operatorname{ctg} x} - 1, \qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$

30. $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} - 1, \qquad x \to \dfrac{5\pi}{4}.$

Найти для функции $f(x)$ при $x \to x_0$ главный член вида $\dfrac{C}{(x - x_0)^{\alpha}}$

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\ln \cos x}, \qquad x \to 0.$

2. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{\sin x^3}, \qquad x \to 0.$

3. $f(x) = \dfrac{1 + \sin^2 x - \operatorname{ch} x}{e^x - \cos x}$, $\qquad x \to 0.$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\ln \operatorname{tg} x}$, $\qquad x \to \dfrac{\pi}{4}.$

5. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{1 - \sin x}}$, $\qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$

6. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^3 - 3x + 2}$, $\qquad x \to 1.$

7. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} \sqrt[3]{x}}{1 - \cos \sqrt[3]{x}}$, $\qquad x \to 0.$

8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}}$, $\qquad x \to 0.$

9. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{e^{x^2} - \cos x}$, $\qquad x \to 0.$

10. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2 \sin x - \operatorname{tg} 2x}$, $\qquad x \to 0.$

11. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{ch} x} - \sqrt{1 - x^2}}$, $\qquad x \to 0.$

12. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1} - \sqrt[3]{x - 1}}{\sin^2 \pi x}$, $\qquad x \to 2.$

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sin\left(\sqrt{x^2 + 5} - 3\right)}$, $\qquad x \to 2.$

14. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}$, $\qquad x \to 0.$

15. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \cos 2x \cdot \operatorname{ch} x}}$, $\qquad x \to 0.$

16. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}}$, $\qquad x \to \dfrac{\pi}{2}.$

17. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x} - \ln(e + x)}$, $\qquad x \to 0.$

18. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{sh} 3x} - 1}{1 - \sqrt{\cos x}}$, $\quad x \to 0.$

19. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[5]{\sin x}}{\cos^3 x}$, $\quad x \to \dfrac{\pi}{2}.$

20. $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}$, $\quad x \to 0.$

21. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x} - \sqrt[5]{\cos 5x}}$, $\quad x \to 0.$

22. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sin 3x + \cos 5x}}$, $\quad x \to \pi.$

23. $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x}$, $\quad x \to 0.$

24. $f(x) = \dfrac{(1-\operatorname{tg}^2 x)^2}{\sqrt{2}\cos x - 1}$, $\quad x \to \dfrac{\pi}{4}.$

25. $f(x) = \dfrac{\pi - 4\operatorname{arcctg} x}{\ln^2 x}$, $\quad x \to 1.$

26. $f(x) = \dfrac{\sqrt[5]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^4 x}$, $\quad x \to \dfrac{\pi}{2}.$

27. $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{tg} \pi x}{\ln^2 \operatorname{tg} \pi x}$, $\quad x \to \dfrac{1}{4}.$

28. $f(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3} - 2\cos x\right)^2}$, $\quad x \to \dfrac{\pi}{6}.$

29. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x}$, $\quad x \to \pi.$

30. $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}^2 \sqrt[3]{x}}{x^2 \sin \sqrt[5]{x^3}}$, $\quad x \to 0.$

Найти для функции $f(x)$ при $x \to \infty$ главный член вида Cx^{α}

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$, $\qquad x \to +\infty.$

2. $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{4x^2+1}}{3x - \sqrt{9x^2 - 4x + 1}}$, $\qquad x \to +\infty.$

3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + x^2} - x}{\sqrt[x]{3} - \sqrt[x]{2}}$, $\qquad x \to +\infty.$

4. $f(x) = (x+3)^2 \sin\left(e^{\frac{3}{x}} - 1\right)$, $\qquad x \to \infty.$

5. $f(x) = \dfrac{\ln(x + 2^x)}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$, $\qquad x \to +\infty.$

6. $f(x) = x^3 \left(\cos\dfrac{3}{x} - \cos\dfrac{1}{3x}\right)$, $\qquad x \to \infty.$

7. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x} - \operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$, $\qquad x \to \infty.$

8. $f(x) = \dfrac{4^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x+1}}}{x}$, $\qquad x \to \infty.$

9. $f(x) = x^3 \ln\cos\dfrac{\pi}{x}$, $\qquad x \to \infty.$

10. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x^2} \cdot \ln \operatorname{ch} x$, $\qquad x \to \infty.$

11. $f(x) = x^2 \ln\dfrac{x+1}{x-2}$, $\qquad x \to \infty.$

12. $f(x) = \sqrt[3]{1 + \dfrac{3}{x}} - \sqrt[4]{1 + \dfrac{4}{x}}$, $\qquad x \to \infty.$

13. $f(x) = \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^2$, $\quad x \to +\infty$.

14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$, $\quad x \to -\infty$.

15. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1+7x^2+x^4}{1-x^3+x^4}} - 1$, $\quad x \to -\infty$.

16. $f(x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$, $\quad x \to -\infty$.

17. $f(x) = \sqrt[3]{1+\arcsin\dfrac{1}{x}} - \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $\quad x \to \infty$.

18. $f(x) = x^2 \operatorname{ch}\dfrac{1}{x}$, $\quad x \to \infty$.

19. $f(x) = \dfrac{x^3}{2x+1} + \dfrac{x^4+4x^3-2}{1-2x^2}$, $\quad x \to \infty$.

20. $f(x) = \sqrt{x^4+x^2\sqrt{x^4+1}} - \sqrt{2x^4-1}$, $\quad x \to \infty$.

21. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^5+x^2+1}{x^2-x-1}} \ln \operatorname{sh} x$, $\quad x \to +\infty$.

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[5]{x^5+1}}$, $\quad x \to +\infty$.

23. $f(x) = x\left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x-1}\right)$, $\quad x \to +\infty$.

24. $f(x) = \arcsin^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, $\quad x \to -\infty$.

25. $f(x) = \dfrac{\ln(3+\sqrt[3]{x})}{\ln(6+\sqrt[6]{x})} \ln \operatorname{ch} x$, $\quad x \to +\infty$.

26. $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$, $\quad x \to -\infty$.

27. $f(x) = \left(\sqrt[3]{\cos\dfrac{1}{x}} - 1\right)\sqrt{x+1}$, $\quad x \to +\infty$.

28. $f(x) = \sqrt{x^4-x^2-7} - \sqrt{x^4+x^3-2}$, $\quad x \to +\infty$.

29. $f(x) = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x} \cdot \sin \dfrac{1}{x}$, $\qquad x \to +\infty$.

30. $f(x) = (x - \ln \operatorname{ch} x) \sqrt{x^4 - 1}$, $\qquad x \to +\infty$.

4. Выделение главного члена последовательности

4.1. Пример решения задачи

Найти для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *главный член вида* $\dfrac{C}{n^{\alpha}}$.

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ задана формулой:

$$x_n = \sqrt{\sqrt{n^2+1}+n} - \sqrt{\sqrt{n^2-1}+n}. \tag{4.1}$$

Преобразуем формулу (4.1) к виду

$$x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} - \sqrt{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1}\right).$$

Далее, воспользовавшись таблицами 1 и 2, последовательно имеем:

$$x_n = \sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+1} - \sqrt{1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)+1}\right] =$$

$$= \sqrt{2n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \sqrt{1-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\right] =$$

$$= \sqrt{2n}\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+o\left[\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] -\right.$$

$$-1-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+o\left[-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\Bigg\}=$$

$$=\sqrt{2n}\left[\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

то есть $x_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Следовательно, $C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ и $\alpha=\dfrac{3}{2}$.

4.2. Варианты заданий. Найти для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ главный член вида $\dfrac{C}{n^{\alpha}}$

1. $x_n=\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1}-2\sqrt[3]{n}$.
2. $x_n=\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3-n}-2n$.
3. $x_n=\sqrt[4]{n+1}+\sqrt[4]{n-1}-2\sqrt[4]{n}$.
4. $x_n=\sqrt[3]{n^3+n^2-n}+\sqrt[3]{n^3-n^2+n}-2n$.
5. $x_n=\sqrt{n^2+2n}+\sqrt[3]{n^3-3n^2+5n}-2n$.
6. $x_n=\sqrt[3]{n^2+1}+\sqrt[3]{n^2-1}-2\sqrt[3]{n^2}$.
7. $x_n=\sqrt{n^2+2}+\sqrt[3]{n^3-3n}-2n$.
8. $x_n=\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt[4]{n^2-1}-2\sqrt{n}$.
9. $x_n=\sqrt[3]{n^3+n^2+n}+\sqrt[3]{n^3-n^2+n}-2n$.

10. $x_n = \sqrt{n^2+2n} + \sqrt[3]{n^3-3n^2+4n} - 2n.$

11. $x_n = \sqrt[3]{n^2+n} + \sqrt[3]{n^2-n} - 2\sqrt[3]{n^2}.$

12. $x_n = \sqrt{n^2-2} + \sqrt[3]{n^3+3n} - 2n.$

13. $x_n = \sqrt[4]{n^2+n} + \sqrt[4]{n^2-n} - 2\sqrt{n}.$

14. $x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+n} + \sqrt[3]{n^3-n^2-n} - 2n.$

15. $x_n = \sqrt{n^2+2n} + \sqrt[3]{n^3-3n^2+3n} - 2n.$

16. $x_n = \sqrt[3]{n^3+1} + \sqrt[3]{n^3-1} - 2n.$

17. $x_n = \sqrt{n^2+2n} + \sqrt[3]{n^3-3n^2} - 2n.$

18. $x_n = \sqrt[4]{n^3+1} + \sqrt[4]{n^3-1} - 2\sqrt[4]{n^3}.$

19. $x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2-n} + \sqrt[3]{n^3-n^2-n} - 2n.$

20. $x_n = \sqrt{n^2+2n} + \sqrt[3]{n^3-3n^2+2n} - 2n.$

21. $x_n = \sqrt[3]{n^3+n} + \sqrt[3]{n^3-n} - 2n.$

22. $x_n = \sqrt{n^2-2n} + \sqrt[3]{n^3+3n^2} - 2n.$

23. $x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+1} + \sqrt[3]{n^3-n^2+2} - 2n.$

24. $x_n = \sqrt[4]{n^3+n} + \sqrt[4]{n^3-n} - 2\sqrt[4]{n^3}.$

25. $x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2} + \sqrt[3]{n^3-n^2} - 2n.$

26. $x_n = \sqrt{n^2+2n} + \sqrt[3]{n^3-3n^2+n} - 2n.$

27. $x_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+n} + \sqrt[3]{n^3-n^2+1} - 2n.$

28. $x_n = \sqrt[4]{n^3+n^2} + \sqrt[4]{n^3-n^2} - 2\sqrt[4]{n^3}.$

29. $x_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt[3]{n^3-2n} - 2n.$

30. $x_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt[3]{n^3+3n^2}.$

Содержание

Александр Петрович Горячев
Юрий Николаевич Гордеев
Дмитрий Сергеевич Теляковский

Методические указания по теме
"Нахождение пределов"

Под редакцией доцента А.П. Горячева

Редактор Н.В. Шумакова
Оригинал-макет изготовлен А.П. Горячевым

Подписано в печать 30.03.04 Формат 60 × 84 1/16.
Уч.-изд. л. 1,5. Печ. л. 1,5. Тираж 2000 экз.
Изд. № 030 – 1. Заказ № 397 .

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31