517
М54

МИФИ

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по теме

"ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ"

Москва 1997

577
М54

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Московский государственный инженерно-физический
институт (технический университет)

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

по теме

"ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ"

ИНР - 2 эк
АНЛ - 2 эк
НБО - 1 эк
ИВМК - 5 эк
АУЛ - 40 эк
Всего - 50 эк. 17387)

Рекомендовано
советом факультета "ЭТФ"

Москва 1997

ФБ 504

519.8(07)

УДК 517

Методическая разработка по теме "Исследование функций". М.: МИФИ, 1997. – 24 с.

Разработка включает в себя рассмотрение способов исследования функций и построения графиков. В ней приведен подробный разбор исследования и построения графиков явно заданных функций и параметрически заданных функциональных зависимостей.

Предназначена для студентов первого семестра всех факультетов при самостоятельном изучении темы "Исследование функций", а также для преподавателей при проведении занятий на эту тему. В этой разработке даны 26 вариантов домашних заданий, которые можно использовать при проведении зачёта по данному разделу математического анализа.

Составители: А.П.Горячев, М.М.Тищенко

1. Введение

В данной методической разработке показаны способы исследования функций и построения графиков как явно заданных функций, так и параметрически заданных функциональных зависимостей, при которых необходимо указать ряд характерных точек, промежутков и иных свойств, присущих этим графикам, а именно:

1) область определения и множество значений;
2) промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения;
3) периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат);
4) расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат;
5) асимптоты графика;
6) промежутки монотонности и точки экстремума;
7) направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной);
8) специфические особенности графика.

Каждый из вариантов состоит из двух соотношений: $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Необходимо по предлагаемой выше схеме построить графики в координатах (t, x), (t, y) и (x, y), т.е. два графика явно заданных функций и один график параметрически заданной функциональной зависимости.

2. Пример выполнения варианта задания

Исследование и построение графиков явно заданных функций и параметрически заданных функциональных зависимостей (согласно приведённой во введении схеме из восьми пунктов) будет проведено на следующем примере:

$$x(t) = \frac{1}{t \ln|t|}; \qquad y(t) = \frac{t}{\ln|t|}.$$

Вначале будет проведено исследование явно заданной функции $x(t)$затем – явно заданной функции $y(t)$исследование параметрически заданной функциональной зависимости $x(t)$, $y(t)$. Исследования будут сопровождаться построением соответствующих графиков.

2.1. Исследование явно заданной функции $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ и построение её графика

1) *Область определения и множество значений.*

Так как $\ln|t|$ определён для всех значений $t \neq 0$ и обращается в нуль лишь при $t = \pm 1$, то область определения заданной функции $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ находится сразу: $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, а вот ответ на вопрос о её множестве значений придётся несколько отложить.

2) *Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.*

Совершенно ясно, что функция $x(t)$ непрерывна для всех значений $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Поскольку функция $\ln|t| \to +\infty$ при $t \to \pm\infty$, то $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0 \pm 0$. Из соотношения $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} \ln t = 0 \pm 0$ следует, что $\lim\limits_{t\to -1\pm 0} x(t) = \pm\infty$, а $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} x(t) = \pm\infty$. Пользуясь правилом Лопиталя можно получить, что $\lim\limits_{t\to 0+0} t\ln t = \lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{\ln t}{1/t} = \left(\text{раскрывая неопределённость вида } \dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{1/t}{-1/t^2} = \lim\limits_{t\to 0+0} (-t) = 0 - 0$, и поэтому $\lim\limits_{t\to 0\pm 0} x(t) = \mp\infty$. Из уже установленного в этом пункте следует, что точки $t = -1$, $t = 0$ и $t = 1$ – точки разрыва второго рода, причём бесконечного разрыва.

3) *Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат).*

Данная функция не является периодичной, так как в противном случае точки, в которых функция не определена, повторялись бы через период. Область её определения симметрична относительно точки $t = 0$ и для всякого значения $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ верно соотношение $x(-t) = -x(t)$. Таким образом, мы имеем дело с непериодической нечётной функцией.

4) *Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.*

Рассматривая знак функции $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ или, что то же самое, знак функции $t\ln|t|$ в различных участках области определения, нетрудно видеть, что функция $x(t) > 0$ при $t \in (-1,0)\bigcup(1,+\infty)$, $x(t) < 0$ при $t \in (-\infty,-1)\bigcup(0,1)$. Так как для всех t из области определения $x(t) \neq 0$ и функция $x(t)$ не определена при $t = 0$, мы заключаем, что у графика пересечений с осями нет.

5) *Асимптоты графика.*

Из п. 2 вытекает, что график имеет три вертикальные асимптоты: $t+1=0$ при $t \to -1 \pm 0$, $t = 0$ при $t \to 0 \pm 0$, $t-1=0$ при $t \to 1 \pm 0$, а также одну горизонтальную: $x = 0$ при $t \to \pm\infty$.

6) *Промежутки монотонности и точки экстремума.*

Вычислим первую производную $\dfrac{dx}{dt}$. Поскольку $\dfrac{d}{dt}(\ln|t|) = \dfrac{1}{t}$ (в этом можно убедиться, рассматривая случаи $t > 0$ и $t < 0$), то мы получаем $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\ln|t|+1}{(t\ln|t|)^2}$. Поэтому $x(t)$ возрастает при $t \in \left(-\dfrac{1}{e},0\right)$ и $t \in \left(0,\dfrac{1}{e}\right)$, $x(t)$ убывает при $t \in (-\infty,-1)$, $t \in \left(-1,-\dfrac{1}{e}\right)$, $t \in \left(\dfrac{1}{e},1\right)$ и $t \in (1,+\infty)$.

Отметим, что отсюда и из п. 2 следует, что $x(t)$ принимает любые положительные и любые отрицательные значения, а так как (как уже отмечалось в п. 4) для всех допустимых значений t функция $x(t) \neq 0$, то множество значений этой функции (вопрос п. 1, на который пока ещё не дан ответ) следующее: $x \in (-\infty,0)\bigcup(0,+\infty)$.

Характер монотонности меняется внутри области определения в точках $\pm\dfrac{1}{e}$. Поэтому $\left(\dfrac{1}{e};-e\right) \approx (0.368;-2.718)$ – точка максимума, а $\left(-\dfrac{1}{e};e\right) \approx (-0.368;2.718)$ – точка мини-

мума. Приближённые значения здесь и в дальнейшем указаны только для облегчения перенесения точек на график.

7) *Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).*

Вычислим вторую производную $\frac{d^2x}{dt^2}$. После несложных преобразований получаем: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2\ln^2|t| + 3\ln|t| + 2}{(t\ln|t|)^3}$. Поскольку квадратный трёхчлен относительно $\ln|t|$, стоящий в числителе этой дроби, всегда положителен (у него отрицательный дискриминант, а старший коэффициент $2 > 0$), то знак $\frac{d^2x}{dt^2}$ определяется знаменателем этой дроби, точнее, знаком произведения $t\ln|t|$. Поэтому выпуклость вверх у графика имеет место при $t \in (-\infty, -1)$ и $t \in (0, 1)$, выпуклость вниз – при $t \in (-1, 0)$ и $t \in (1, +\infty)$, а точек перегиба нет.

8) *Специфические особенности графика.*

Какими-либо специфическими особенностями, не указанными выше, эта функция и её график, по-видимому, не обладают.

Резюмируя вышеизложенное, для рассматриваемой функции $x = \frac{1}{t\ln|t|}$ получаем следующие результаты исследования.

1) *Область определения и множество значений.*

$t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$,
$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) *Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.*

Функция $x(t)$ непрерывна при
$t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$; $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0 \pm 0$,
$\lim\limits_{t\to -1\pm 0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to 0\pm 0} x(t) = \mp\infty$, $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} x(t) = \pm\infty$.

Точки $t=-1$, $t=0$ и $t=1$ – точки разрыва второго рода (бесконечный разрыв).

3) *Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика отнсительно осей координат и начала координат).*

Непериодическая нечётная функция.

4) *Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.*

Функция $x(t)>0$ при $t\in(-1,0)\bigcup(1,+\infty)$, $x(t)<0$ при $t\in(-\infty,-1)\bigcup(0,1)$. Пересечений с осями нет.

5) *Асимптоты графика.*

Ими являются следующие прямые: $t+1=0$ при $t\to-1\pm0$, $t=0$ при $t\to0\pm0$, $t-1=0$ при $t\to1\pm0$, $x=0$ при $t\to\pm\infty$.

6) *Промежутки монотонности и точки экстремума.*

$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{\ln|t|+1}{(t\ln|t|)^2}$; $x(t)$ возрастает при $t\in\left(-\dfrac{1}{e},0\right)$ и $t\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$; $x(t)$ убывает при $t\in(-\infty,-1)$, $t\in\left(-1,-\dfrac{1}{e}\right)$, $t\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ и $t\in(1,+\infty)$.

Точка максимума: $\left(\dfrac{1}{e};-e\right)\approx(0.368;-2.718)$.

Точка минимума: $\left(-\dfrac{1}{e};e\right)\approx(-0.368;2.718)$.

7) *Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).*

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{2\ln^2|t|+3\ln|t|+2}{(t\ln|t|)^3}$; выпуклость вверх при $t\in(-\infty,-1)$ и $t\in(0,1)$, выпуклость вниз при $t\in(-1,0)$ и $t\in(1,+\infty)$. Точек перегиба нет.

На основании этого исследования можно построить график функции $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ (рис. 1).

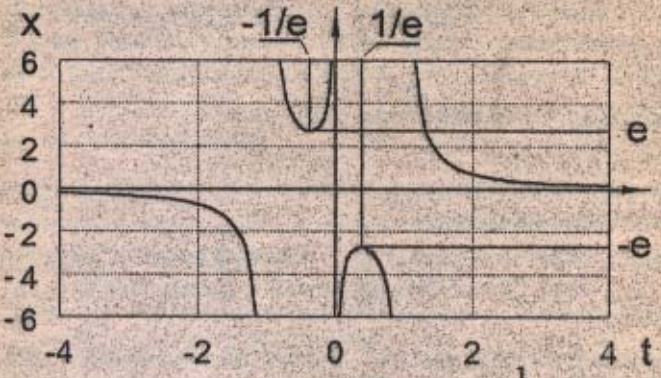

Рис. 1. График функции $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$

2.2. Исследование явно заданной функции $y = \dfrac{t}{\ln|t|}$ и построение её графика

Эта функция исследуется совершенно аналогично только что рассмотренной в п. 2.1 функции $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$. Поэтому мы сразу выпишем ответ, лишь сделав к нему в конце некоторые замечания. Итак, рассматривается функция

$$y = \frac{t}{\ln|t|}.$$

1) *Область определения и множество значений.*
$t \in (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$, $y \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2) *Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.*
Функция $y(t)$ непрерывна для значений $t \in (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$; $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$,

$\lim\limits_{t\to -1\pm 0} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to 0\pm 0} y(t) = 0 \mp 0$, $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} y(t) = \pm\infty$. Точки $t = -1$ и $t = 1$ – точки разрыва второго рода (бесконечный разрыв). Точка $t = 0$ – точка разрыва первого рода (устранимый разрыв).

3) *Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат).*

Непериодическая нечётная функция.

4) *Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.*

Функция $y(t) > 0$ при $t \in (-1,0)\bigcup(1,+\infty)$, $y(t) < 0$ при $t \in (-\infty,-1)\bigcup(0,1)$. Пересечений с осями нет.

5) *Асимптоты графика.*

Ими являются следующие прямые: $t+1=0$ при $t \to -1 \pm 0$, $t-1=0$ при $t \to 1 \pm 0$.

6) *Промежутки монотонности и точки экстремума.*

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\ln|t|-1}{\ln^2|t|}$; $y(t)$ возрастает для значений $t \in (-\infty,-e)$ и $t \in (e,+\infty)$; $y(t)$ убывает для значений $t \in (-e,-1)$, $t \in (-1,0)$, $t \in (0,1)$ и $t \in (1,e)$.
Точка максимума: $(-e;-e) \approx (-2.718;-2.718)$.
Точка минимума: $(e;e) \approx (2.718;2.718)$.

7) *Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).*

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{2-\ln|t|}{t\ln^3|t|}$; выпуклость вверх при $t \in (-e^2,-1)$, $t \in (0,1)$ и $t \in (e^2,+\infty)$; выпуклость вниз при $t \in (-\infty,-e^2)$, $t \in (-1,0)$ и $t \in (1,e^2)$. Точки перегиба: $\left(-e^2;-\dfrac{e^2}{2}\right) \approx (-7.389;-3.695)$, при этом производная $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=-e^2} = \dfrac{1}{4} = 0.25$; $\left(e^2;\dfrac{e^2}{2}\right) \approx (7.389;3.695)$, при этом

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=e^2} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

8) *Специфические особенности графика.*

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0\pm 0} = 0 - 0.$$

Добавление точки $(0;0)$ устраняет разрыв при $t = 0$, даёт точку касания с осью Ot, точку пересечения с осью Oy и ещё одну точку перегиба.

Замечание к п. 2. В том, что $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$, можно убедиться, раскрывая эту неопределённость по правилу Лопиталя.

Замечание к п. 5. Отсутствие наклонных асимптот вида $y = kt + b$ вытекает из того, что хотя и существует $k = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{y}{t} = \lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{1}{\ln|t|} = 0$, но тем не менее предел $\lim\limits_{t\to\pm\infty} (y - kt) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$, т. е. не существует (см. п. 2 и замечание к нему).

Замечание к пп. 1 и 6. Ответ на вопрос п. 1 о множестве значений функции $y(t)$ решается, как и вопрос о множестве значений функции $x(t)$, в п. 6, после того, как мы убедимся, что функция $y(t)$, убывая при $t \in (-1,0)$ и $t \in (0,1)$, принимает любое не равное нулю значение.

Замечание к п. 8. То, что график с добавленной точкой $(0;0)$ при $t \to 0\pm 0$ имеет с осью Oy пересечение, т. е. соприкосновение нулевого порядка, а с осью Ot – касание, т. е. соприкосновение первого порядка, вытекает из того, что согласно п. 6 предел $\lim\limits_{t\to 0} \frac{dy}{dt} = 0$, а согласно п. 7 предел $\lim\limits_{t\to 0} \frac{d^2y}{dt^2} = \infty$ (в этом можно убедиться, например, по правилу Лопиталя). Следовательно, график пересекает ось Oy под ненулевым углом (соприкосновение нулевого порядка) и имеет соприкосновение в точности первого порядка с осью Ot, так как $\lim\limits_{t\to 0} \frac{dy}{dt} = 0$, а $\lim\limits_{t\to 0} \frac{d^2y}{dt^2} \neq 0$, точнее, не существует.

На основании этого исследования можно построить график функции $y = \frac{t}{\ln|t|}$ (рис. 2, график а).

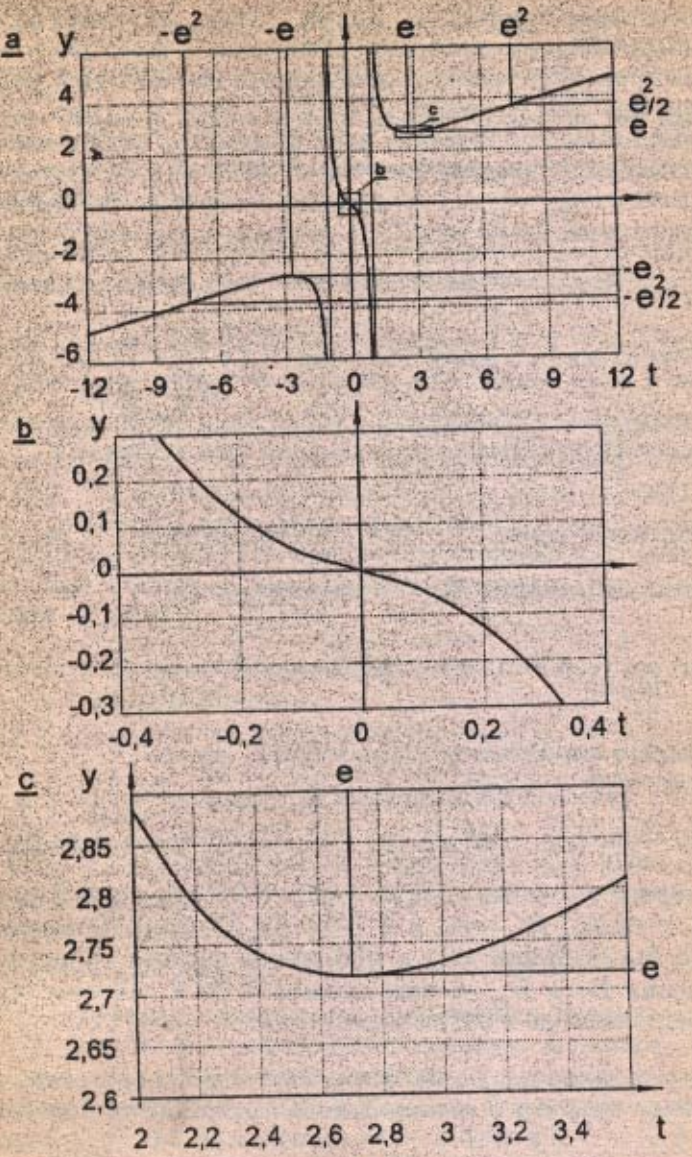

Рис. 2. График функции $y = \dfrac{t}{\ln|t|}$ (a) и его фрагменты b и c

Рассматривая график "a" рис. 2, видим, что было бы желательно иметь более подробные графики этой функции в окрестностях хотя бы некоторых из отмеченных на нём точек. Поэтому приводим ещё два графика - "b" (рис. 2) и "c" (рис. 2), которые иллюстрируют поведение этой функции в отмеченных прямоугольниках: в окрестностях точек $(0;0)$ и $(e;e)$. Окрестность точки максимума $(-e;-e)$ центрально-симметрична окрестности точки минимума $(e;e)$ (п. 3), а график исследуемой функции $y=\dfrac{t}{\ln|t|}$ в окрестностях точек перегиба в нашем случае будет мало отличаться от прямой, так как $\left.\dfrac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=\pm e^2}=\left.\dfrac{2-\ln|t|}{t\ln^3|t|}\right|_{t=\pm e^2}=0$ (п. 7) и ввиду её непрерывности в достаточно малых окрестностях точек перегиба эта вторая производная будет близка к нулю.

2.3. Исследование параметрически заданной функциональной зависимости $x=\dfrac{1}{t\ln|t|}$, $y=\dfrac{t}{\ln|t|}$ и построение её графика

1) *Область определения и множество значений.*

Из 1-х пунктов исследования функций $x=\dfrac{1}{t\ln|t|}$ (см. с. 6) и $y=\dfrac{t}{\ln|t|}$ (см. с. 8) можно заключить, что независимое переменное $t\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$, а функции $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Отметим, что если бы функции $x(t)$ и $y(t)$ имели разные области определения D_x и D_y, то нам пришлось бы в качестве области определения по t взять пересечение $D=D_x\bigcap D_y$.

2) *Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.*

Из 2-х пунктов исследования функций $x=\dfrac{1}{t\ln|t|}$ (см. с. 6) и $y=\dfrac{t}{\ln|t|}$ (см. с. 8) видим, что $x(t)$, $y(t)$ непрерывны

что $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0 \pm 0$, $\lim\limits_{t\to -1\pm 0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to 0\pm 0} x(t) = \mp\infty$, $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to -1\pm 0} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to 0\pm 0} y(t) = 0 \mp 0$, $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} y(t) = \pm\infty$. В случае параметрически заданной функциональной зависимости характер точек разрыва не определяется.

3) *Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат).*

Из 3-х пунктов исследования функций $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ (см. с. 7) и $y = \dfrac{t}{\ln|t|}$ (см. с. 9) ясно, что имеем дело с непериодической функциональной зависимостью. Поскольку при всех значениях t из области определения обе функции $x(t)$ и $y(t)$ – нечётные, т. е. $x(-t) = -x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то видим, что при замене знака у аргумента t наряду с точкой $(x(t); y(t))$ на графике присутствует также и симметричная ей относительно начала координат точка $(-x(t); -y(t)) = (x(-t); y(-t))$.

4) *Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.*

Из 4-х пунктов исследования функций $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ (см. с. 7) и $y = \dfrac{t}{\ln|t|}$ (см. с. 9) можно заключить, что $x(t) > 0$ при всех $t \in (-1, 0) \bigcup (1, +\infty)$, $x(t) < 0$ при всех $t \in (-\infty, -1) \bigcup (0, 1)$, $y(t) > 0$ при всех $t \in (-1, 0) \bigcup (1, +\infty)$, $y(t) < 0$ при всех $t \in (-\infty, -1) \bigcup (0, 1)$, а пересечений с осями нет.

5) *Асимптоты графика.*

Из 2-го пункта настоящего исследования вытекает, что при $t \to \pm\infty$ график имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, а при $t \to 0 \pm 0$ – горизонтальную асимптоту $y = 0$. Кроме того, график может иметь наклонные асимптоты вида $y = kx + b$ при $t \to -1 \pm 0$ и $t \to 1 \pm 0$ (так как одновременно $x \to \infty$ и $y \to \infty$). Выясним это, а также найдём эти асимптоты, если они существуют. Пусть $t \to 1 \pm 0$. Тогда $k = \lim\limits_{t\to 1\pm 0} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{t\to 1\pm 0} t^2 = 1$,

а $b = \lim\limits_{t\to 1\pm 0}(y-kx) = \lim\limits_{t\to 1\pm 0}(y-x) = \lim\limits_{t\to 1\pm 0}\dfrac{t-\dfrac{1}{t}}{\ln|t|} =$ (по правилу Лопиталя) $= \lim\limits_{t\to 1\pm 0}\dfrac{1+\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t}} = 2$. Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой при $t \to 1 \pm 0$. Аналогично прямая $y = x - 2$ является наклонной асимптотой при $t \to -1 \pm 0$. Этот вывод, впрочем, можно сделать и на основании симметрии графика относительно начала координат.

6) *Промежутки монотонности и точки экстремума.*

Из 6-х пунктов исследования функций $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ (см. с. 7) и $y = \dfrac{t}{\ln|t|}$ (см. с. 9) имеем, что производные $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{\ln|t|+1}{(t\ln|t|)^2}$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\ln|t|-1}{\ln^2|t|}$. Отсюда получаем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} : \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2(1-\ln|t|)}{1+\ln|t|}$. Отмечать, что в этой формуле $t \neq \pm 1$ нет необходимости, так как $t \neq \pm 1$ согласно 1-му пункту. Поэтому y возрастает по x при $t \in (-e,-1)$, $t \in \left(-\dfrac{1}{e},0\right)$, $t \in \left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ и $t \in (1,e)$; y убывает по x при $t \in (-\infty,-e)$, $t \in \left(-1,-\dfrac{1}{e}\right)$, $t \in \left(\dfrac{1}{e},1\right)$ и $t \in (e,+\infty)$. Используя производную $\dfrac{dx}{dt}$ можно заключить, что в точке $\left(-e;-\dfrac{1}{e}\right) \approx (-2.718;-0.368)$ при $t = \dfrac{1}{e} \approx 0.368$ имеет место максимум по x, а в точке $\left(e;\dfrac{1}{e}\right) \approx (2.718;0.368)$ при $t = -\dfrac{1}{e} \approx -0.368$ – минимум по x. Аналогично используя $\dfrac{dy}{dt}$, заключаем, что в точке $\left(-\dfrac{1}{e};-e\right) \approx (-0.368;-2.718)$ при $t = -e \approx -2.718$ имеет место максимум по y, а в точке

$\left(\frac{1}{e};e\right) \approx (0.368;2.718)$ при $t = e \approx 2.718$ – минимум по y.

7) *Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).*

Поскольку $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$, то согласно п. 6 после упрощений имеем, что вторая производная $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2t^3\ln^4|t|}{(1+\ln|t|)^3}$. Отметим, что так как первая производная $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}$, то $\frac{d^2y}{dx^2}$ можно получить и по формуле $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$, используя также 7-е пункты исследования функций $x = \frac{1}{t\ln|t|}$ (см. с. 7) и $y = \frac{t}{\ln|t|}$ (см. с. 9). Из полученной так или иначе формулы $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2t^3\ln^4|t|}{(1+\ln|t|)^3}$ можно заключить, что выпуклость вверх имеет место при $t \in (-\infty,-1)$, $t \in \left(-1,-\frac{1}{e}\right)$ и $t \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$, выпуклость вниз – при $t \in \left(-\frac{1}{e},0\right)$, $t \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ и $t \in (1,+\infty)$, а точки перегиба отсутствуют.

8) *Специфические особенности графика.*

Нетрудно заметить, что $(x(1/t);y(1/t)) = (-y(t);-x(t))$. Это означает, что наряду с точкой $(x;y)$ на графике имеется и точка $(-y;-x)$, которая симметрична точке $(x;y)$ относительно прямой $x+y=0$. Аналогично соотношение $(x(-1/t);y(-1/t)) = (y(t);x(t))$ позволяет сделать заключение о симметрии графика относительно прямой $x-y=0$.

С этими осями симметрии график не пересекается, так как оба уравнения $x+y=0$ или $x-y=0$, переходящие соответственно в уравнения $\frac{1}{\ln|t|}\left(\frac{1}{t}+t\right)=0$ или $\frac{1}{\ln|t|}\left(\frac{1}{t}-t\right)=0$, не имеют решений в области определения.

Нет также пересечений графика со своими асимптотами. Отсутствие пересечений с асимптотами $x=0$ или $y=0$ следует из п. 4, а отсутствие пересечений с наклонными асимптотами вытекает из исследования выпуклости в п. 7. Но можно и непосредственно установить отсутствие точек пересечения графика с наклонными асимптотами. Возьмём, например, асимптоту $y=x+2$ при $t\to 1\pm 0$. Подставляя сюда $x=\frac{1}{t\ln|t|}$, $y=\frac{t}{\ln|t|}$ после несложных преобразований получаем уравнение

$$t-\frac{1}{t}=2\ln|t|,$$

имеющее два очевидных решения $t=\pm 1$, которые нас не устраивают, так как не лежат в области определения. Но при $t<0$ левая часть этого уравнения возрастает, а правая – убывает, так что других отрицательных корней это уравнение не имеет. А при $t\in(0,1)\bigcup(1,+\infty)$ производная от левой части $1+\frac{1}{t^2}$ больше производной от правой части $\frac{2}{t}$ и, значит, при $t>1$ левая часть больше правой, а при $0<t<1$ левая часть меньше правой. Таким образом, при $t\in(0,1)\bigcup(1,+\infty)$ также нет корней этого уравнения. Аналогично рассматривается и другая наклонная асимптота $y=x-2$ при $t\to -1\pm 0$.

График не имеет и точек самопересечения. Для получения точек самопересечения надо найти такие не равные друг другу t_1 и t_2 из области определения, что $x(t_1)=x(t_2)$,

$y(t_1) = y(t_2)$. В рассматриваемом случае мы имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_1 \ln|t_1|} &= \frac{1}{t_2 \ln|t_2|}, \\ \frac{t_1}{\ln|t_1|} &= \frac{t_2}{\ln|t_2|}, \end{aligned} \qquad (1)$$

откуда сразу получается, что $t_1^2 = t_2^2$, т.е. $t_2 = -t_1$, ибо $t_2 \neq t_1$. Подстановка найденного соотношения $t_2 = -t_1$ в любое из уравнений системы (1) даёт, что она не имеет решений, т.е. отсутствие точек самопересечения.

Резюмируя вышеизложенное, в результате исследования параметрически заданной функции

$$x = \frac{1}{t \ln|t|}, \quad y = \frac{t}{\ln|t|},$$

мы получаем следующий ответ.

1) *Область определения и множество значений.*
$t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $y \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2) *Промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения.*

Функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны при
$t \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$;
при этом $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = 0 \pm 0$, $\lim\limits_{t \to -1 \pm 0} x(t) = \pm\infty$,
$\lim\limits_{t \to 0 \pm 0} x(t) = \mp\infty$, $\lim\limits_{t \to 1 \pm 0} x(t) = \pm\infty$; $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$,
$\lim\limits_{t \to -1 \pm 0} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to 0 \pm 0} y(t) = 0 \mp 0$, $\lim\limits_{t \to 1 \pm 0} y(t) = \pm\infty$.

3) *Периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат).*

Непериодическая функциональная зависимость, у которой $x(t)$ и $y(t)$ – нечётные функции. Симметрия относительно начала координат.

4) *Расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат.*

$x(t) > 0$ при $t \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, $x(t) < 0$ при $t \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$; $y(t) > 0$ при $t \in (-1,0) \cup (1,+\infty)$, $y(t) < 0$ при $t \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$. Пересечений с осями нет.

5) *Асимптоты графика.*

Ими являются следующие прямые: $x = 0$ при $t \to \pm\infty$, $y = 0$ при $t \to 0 \pm 0$, $x - y - 2 = 0$ при $t \to -1 \pm 0$, $x - y + 2 = 0$ при $t \to 1 \pm 0$.

6) *Промежутки монотонности и точки экстремума.*

$\frac{dx}{dt} = -\frac{\ln|t|+1}{(t\ln|t|)^2}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{\ln|t|-1}{\ln^2|t|}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2(1-\ln|t|)}{1+\ln|t|}$; y возрастает по x при $t \in (-e,-1)$, $t \in \left(-\frac{1}{e},0\right)$, $t \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$ и $t \in (1,e)$; y убывает по x при $t \in (-\infty,-e)$, $t \in \left(-1,-\frac{1}{e}\right)$, $t \in \left(\frac{1}{e},1\right)$ и $t \in (e,+\infty)$. Максимум по x: $\left(-e;-\frac{1}{e}\right) \approx (-2.718;-0.368)$ при значении $t = \frac{1}{e} \approx 0.368$. Минимум по x: $\left(e;\frac{1}{e}\right) \approx (2.718;0.368)$ при значении $t = -\frac{1}{e} \approx -0.368$. Максимум по y: $\left(-\frac{1}{e};-e\right) \approx (-0.368;-2.718)$ при значении $t = -e \approx -2.718$. Минимум по y: $\left(\frac{1}{e};e\right) \approx (0.368;2.718)$ при значении $t = e \approx 2.718$.

7) *Направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной).*

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2t^3\ln^4|t|}{(1+\ln|t|)^3}$; выпуклость вверх при $t \in (-\infty,-1)$, $t \in \left(-1,-\frac{1}{e}\right)$ и $t \in \left(0,\frac{1}{e}\right)$; выпуклость вниз при

$t \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, $t \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ и $t \in (1, +\infty)$. Точек перегиба нет.

8) *Специфические особенности графика.*

Симметрия относительно прямых $x + y = 0$ и $x - y = 0$.

На основании этого исследования можно построить график функциональной зависимости $x = \frac{1}{t \ln|t|}$, $y = \frac{t}{\ln|t|}$ (рис. 3).

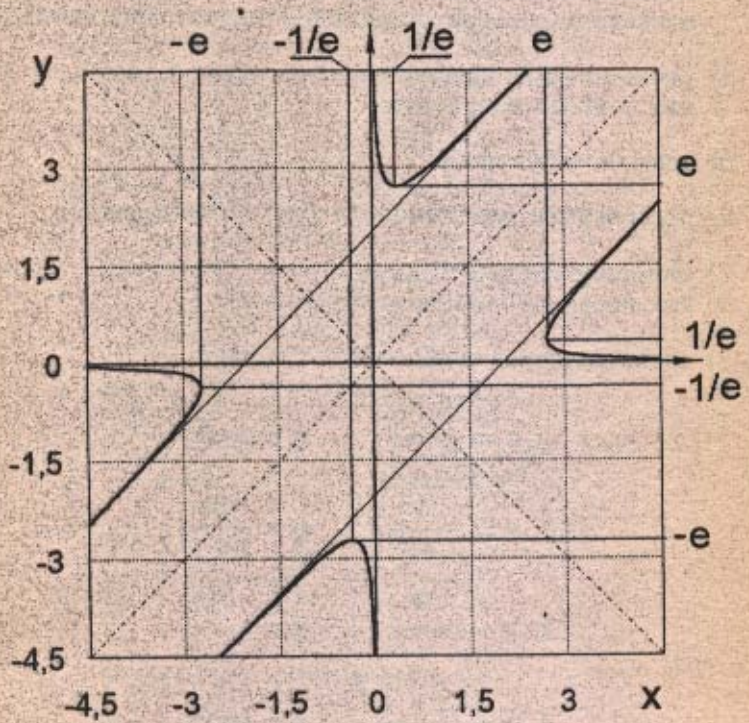

Рис. 3. График параметрически заданной функции $x = \frac{1}{t \ln|t|}$, $y = \frac{t}{\ln|t|}$

3. Варианты домашних заданий

Для выполнения домашнего задания необходимо во всех задачах построить графики в координатах (t, x), (t, y), (x, y) и указать:

1) область определения и множество значений;

2) промежутки непрерывности, характер точек разрыва, поведение графика в граничных точках области определения;

3) периодичность, чётность, нечётность (симметрия графика относительно осей координат и начала координат);

4) расположение графика в квадрантах и точки его пересечения с осями координат;

5) асимптоты графика;

6) промежутки монотонности и точки экстремума;

7) направление выпуклости и точки перегиба (отметить в точках перегиба наклон касательной);

8) специфические особенности графика.

1. $x = \dfrac{t^2}{t^4 - 1}$, $\quad y = \arcsin \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

2. $x = \dfrac{3}{1 + t^3}$, $\quad y = \dfrac{3t}{1 + t^3}$.

3. $x = \dfrac{t^3}{1 - t^2}$, $\quad y = t - \dfrac{1}{t}$.

4. $x = t^2 - \dfrac{1}{t^2}$, $\quad y = \arcsin \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

5. $x = \dfrac{t}{t^2 - 1}$, $\quad y = \dfrac{t^2}{t^4 - 1}$.

6. $x = \dfrac{t^2}{1-t}$, $y = \dfrac{t^3}{1-t^2}$.

7. $x = t - \dfrac{1}{t}$, $y = \arcsin \dfrac{2t}{1+t^2}$.

8. $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = t^2 - \dfrac{1}{t^2}$.

9. $x = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y = t - \dfrac{1}{t}$.

10. $x = \dfrac{t^2}{1-t}$, $y = \arcsin \dfrac{2t}{1+t^2}$.

11. $x = \dfrac{t^3}{1-t^2}$, $y = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

12. $x = \dfrac{t^2}{t^4-1}$, $y = t - \dfrac{1}{t}$.

13. $x = \dfrac{3}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

14. $x = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y = \arcsin \dfrac{2t}{1+t^2}$.

15. $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^3}{1-t^2}$.

16. $x = \dfrac{t^2}{1-t}$, $y = t - \dfrac{1}{t}$.

17. $x = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y = te^{-\frac{t^2}{6}}$.

18. $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \arcsin \dfrac{2t}{1+t^2}$.

19. $x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

20. $x = \dfrac{t^2}{1-t}$, $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2t}{1-t^2}$.

21. $x = \left(1 - \dfrac{t^2}{3}\right) e^{-\frac{t^2}{6}}$, $y = te^{-\frac{t^2}{6}}$.

22. $x = \dfrac{t^3}{1-t^2}$, $y = \arcsin \dfrac{2t}{1+t^2}$.

23. $x = t - \dfrac{1}{t}$, $y = t^2 - \dfrac{1}{t^2}$.

24. $x = \arcsin \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y = \operatorname{arctg} \dfrac{2t}{1-t^2}$.

25. $x = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $y = \left(1 - \dfrac{t^2}{3}\right) e^{-\frac{t^2}{6}}$.

26. $x = t - \dfrac{\sin 2t + \sin(2t - \sin 2t)}{2}$, $y = 1 - \cos\left(t - \dfrac{\sin 2t}{2}\right)$.

Оглавление

1. **Введение** 3

2. **Пример выполнения варианта задания** 3

2.1. Исследование явно заданной функции $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$ и построение её графика 4

2.2. Исследование явно заданной функции $y = \dfrac{t}{\ln|t|}$ и построение её графика 8

2.3. Исследование параметрически заданной функциональной зависимости $x = \dfrac{1}{t\ln|t|}$, $y = \dfrac{t}{\ln|t|}$ и построение её графика 12

3. **Варианты домашних заданий** 20

Редактор и техн. редактор М. В. Макарова

ЛР N 020676 от 09.12.92 г.
Подписано в печать 27.02.97. Формат 60 x 84 1/16.
Печ. л. 1,5. Уч. - изд. л. 1,5. Тираж 100 экз.
Изд. N 019 - 2. Заказ N177

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31.