МИФИ

В. А. Гани Л. Е. Михайлов

Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье

Москва 2001

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ВЕЧЕРНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

В. А. Гани Л. Е. Михайлов

Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье

Учебно-методическое пособие по курсу высшей математики для вечернего факультета

Москва 2001

УДК 517.518.4/.5(075)
ББК 22.16я7
Г 19

Гани В.А., Михайлов Л.Е. **Числовые и функциональные ряды. Ряды Фурье:** Учебно-методическое пособие по курсу высшей математики для вечернего факультета. М.: МИФИ, 2001. 60с.

Пособие написано на основе опыта чтения лекций и проведения семинаров в группах вечернего факультета МИФИ. Сформулированы основные определения и теоремы, разобрано большое количество примеров. Подобраны задачи в количестве, достаточном для проведения семинаров.

Предназначено студентам вечернего факультета МИФИ, а также может быть использовано преподавателями при проведении семинарских занятий.

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Редактор и технический редактор М. В. Макарова

ЛР № 020676 от 09.12.97.
Подписано в печать 03.07.2001. Формат 60 × 84 1/16.
Печ.л. 3,75. Уч.-изд.л. 3,75. Тираж 200 экз.
Изд. № 015-1. Заказ № 757

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

1. Числовые ряды с неотрицательными членами

Определение. *Выражение*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1)$$

в котором $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ являются членами числовой последовательности $\{u_n\}$, называется числовым рядом; u_n, номер которого не фиксирован, называется общим членом ряда.

Поскольку ряд содержит бесконечное множество слагаемых, их последовательным сложением найти сумму ряда невозможно. Поэтому требуется определить, что считать суммой ряда. Выражения

$$\begin{aligned} &s_1 = u_1,\\ &s_2 = u_1 + u_2,\\ &s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\\ &\ldots\\ &s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,\\ &\ldots \end{aligned}$$

называют частичными суммами ряда (1). Эти суммы образуют числовую последовательность

$$s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots, \quad \text{причем} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \qquad (2)$$

Если существует предел последовательности частичных сумм (2), $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то ряд (1) называется сходящимся, а величина s называется суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Ряд называется расходящимся, если последовательность частичных сумм ряда расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_k = r_k$, членами которого являются члены ряда (1), начиная с $(k+1)$-го, взятые в том же порядке, называется остатком ряда k-го порядка.

Если ряд расходится, то и его остаток любого порядка расходится. Если ряд сходится, то и его остаток r_k сходится при любом k. В этом случае остаток записывается в виде $r_k = s - s_k$ и $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = 0$.

Пример 1.1. Для числового ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} \tag{3}$$

установить сходимость и найти его сумму.

Преобразуем выражение общего члена ряда:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1+n-n}{n(n+1)}=\frac{1+n}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\,.$$

Частичные суммы ряда s_n также будут преобразованы:

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

т.е. ряд (3) сходится и сумма его равна единице.

Пример 1.2. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$1+q+q^2+\ldots+q^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n-1}\quad (0<q<1). \tag{4}$$

Этот ряд называется геометрическим, так как его члены являются членами геометрической прогрессии со знаменателем q.

Запишем частичную сумму ряда

$$s_n=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}.$$

Вычтем из записанной строки ту же строку, умноженную на q:

$$s_nq=q+q^2+q^3+\ldots+q^n.$$

Получим:

$$s_n(1-q)=1-q^n,\quad s_n=\frac{1-q^n}{1-q},$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{1-q}-\frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty}q^n=\frac{1}{1-q}\,.$$

Последнее имеет место при условии $0<q<1$; если же $q\geq 1$, то ряд расходится.

Пример 1.3. Рассмотрим ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

Поскольку для этого ряда $s_{2m-1} = 1$, $s_{2m} = 0$ при любом натуральном m, то последовательность $\{s_k\}$ не имеет предела при $k \to \infty$. Следовательно, исходный ряд расходится.

В приведенных примерах последовательность s_n частичных сумм ряда выражалась достаточно просто, так что существование и величина предела $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ устанавливались непосредственно. Чаще непосредственный анализ последовательности s_n не представляется возможным, поэтому основной задачей в теории числовых рядов является установление сходимости или расходимости ряда без вычисления его суммы.

Перефразируя критерий Коши сходимости числовых последовательностей, получаем критерий Коши для рядов.

Теорема 1.1 *(критерий Коши). Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится тогда и только тогда, когда для него выполняется условие Коши, состоящее в том, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для любого натурального $n > N$ и всех $p = 1, 2, \ldots$ имеет место неравенство:*

$$|s_{n+p} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$

Приведем формальную запись критерия Коши сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ сходится} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}:\ \forall p \in \mathbf{N},\ \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon.$$

Замечание. *Если условие Коши не выполняется, т.е.*

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbf{N}\ \exists n > N\ \exists p \in \mathbf{N} \Rightarrow |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| \geq \varepsilon,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Следующая теорема является следствием критерия Коши.

Теорема 1.2 *(необходимый признак сходимости ряда).*
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{5}$$

Последнее утверждение получается, если в критерии Коши положить $p = 1$. Заметим, что условие

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \tag{6}$$

является достаточным условием расходимости ряда. Условие же (5), будучи необходимым условием сходимости, достаточным условием сходимости не является. Нужно понимать, что необходимый признак сходимости применяется только для доказательства расходимости числового ряда.

Отметим некоторые свойства сходящихся рядов.

Свойство 1. *Отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (но не на сумму!)*

Свойство 2. *Сходимость ряда не нарушается при умножении всех членов ряда на одно и то же число, отличное от нуля.*

Свойство 3. *Если ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$, *причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{7}$$

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения высказать нельзя. Так, например, сумма двух расходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)$ будет сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Заметим, что из сходимости ряда, стоящего в левой части равенства (7), не следует сходимость рядов, стоящих в правой части равенства.

2. Признаки сравнения рядов

Рассмотрим признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Заметим, что, поскольку все члены ряда неотрицательны, частичные суммы ряда образуют возрастающую (неубывающую) числовую последовательность

$$s_1 \le s_2 \le s_3 \le \ldots \le s_n \le \ldots .$$

Возможны два случая.

1. Последовательность частичных сумм не ограничена. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ и, следовательно, ряд расходится.

2. Последовательность частичных сумм ограничена, т.е. $\exists C$, такое, что $s_n < C$ при любом значении n. В этом случае, согласно теореме о пределе монотонной ограниченной последовательности, последовательность частичных сумм s_n и, следовательно, ряд сходятся.

Таким образом, при доказательстве сходимости ряда с неотрицательными членами достаточно установить ограниченность последовательности его частичных сумм.

Приведем важнейшие признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Первый признак сравнения. *Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (U)$$

и

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \qquad (V)$$

причем

$$u_n \le v_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) . \qquad (8)$$

Тогда, если сходится ряд (V), то сходится и ряд (U); если же расходится ряд (U), то расходится и ряд (V).

Этот признак остается в силе, если неравенство (8) выполняется не для всех n, а лишь начиная с некоторого номера N.

Второй признак сравнения. *Если существует конечный и отличный от нуля предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$, *то оба ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ *вместе сходятся или вместе расходятся.*

При исследовании сходимости ряда с помощью теорем сравнения следует выражение общего члена ряда сравнить с общим членом ряда сравнения. Чаще всего в качестве рядов сравнения используют геометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n$, гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ и обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ (ряд Дирихле).

Пример 2.1. Исследуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \qquad (U)$$

Общий член ряда

$$u_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1)-\ln n. \qquad (9)$$

Подставив (9) в выражение для s_n, получим:

$$s_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+(\ln 4-\ln 3)+\ldots+(\ln(n+1)-\ln n)=$$
$$=\ln(n+1),$$
$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty.$$

Следовательно, исследуемый ряд расходится.

Пример 2.2. Полученный в примере 2.1 результат используем для доказательства расходимости гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}. \qquad (V)$$

Воспользуемся второй теоремой сравнения:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля, а ряд (U) расходится (пример 2.1), то и ряд (V) (гармонический ряд) тоже расходится.

Заметим, что расходимость гармонического ряда можно доказать и без использования признаков сравнения. В ряде (V) рассмотрим группы слагаемых следующим образом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{1-я группа}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\text{2-я группа}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}}_{\text{3-я группа}} + \underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{\text{4-я группа}} + \ldots .$$

Группа с номером l начинается со слагаемого номер $l_1 = 2^{l-1}+1$ и заканчивается слагаемым номер $l_2 = 2^l$. Количество слагаемых в группе равно $l_2 - l_1 + 1 = 2^{l-1}$. Все слагаемые в группе больше, чем последнее, поэтому справедлива оценка для суммы слагаемых l-й группы:

$$\sum_{n=l_1}^{l_2}\frac{1}{n} \geq \frac{2^{l-1}}{2^l} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, сумма слагаемых в каждой группе не меньше $\frac{1}{2}$ и, следовательно, сумма ряда не равна конечному числу, т.е. гармонический ряд расходится.

<u>**Пример 2.3**</u>. Используем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad (V)$$

в качестве ряда сравнения при исследовании сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}. \qquad (U)$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(подстановка $\frac{1}{n} = x$, $x \to 0$ при $n \to \infty$). На основании второй теоремы сравнения ряд (U) расходится вместе с рядом (V).

Пример 2.4. Исследовать сходимость ряда

$$1 + q\cos^2\phi + q^2\cos^2 2\phi + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos^2 n\phi \quad \text{при условии} \quad 0 < q < 1.$$

Сравним этот ряд с геометрическим рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n. \tag{U}$$

Поскольку $0 \leq q^n \cos^2 n\phi \leq q^n$, на основании первого признака сравнения можно утверждать, что исследуемый ряд сходится. Можно сказать иначе: исследуемый ряд сходится, так как он имеет сходящуюся мажоранту, которой является геометрический ряд (U).

Пример 2.5. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$$

Общий член ряда $u_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$. Очевидно, что $\dfrac{n}{2n+1} < \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому $\left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ – сходящийся геометрический – является мажорантой исследуемого ряда. Следовательно, исследуемый ряд сходится.

Пример 2.6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

В силу того, что $\forall x > 0 \Rightarrow \ln x < x$, получаем:

$$\ln(n+1) < (n+1), \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ – расходящийся гармонический, следовательно, по первому признаку сравнения, исследуемый ряд – расходящийся.

Пример 2.7. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

В качестве ряда сравнения выберем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Найдем предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1.$$

Следовательно, по второму признаку сравнения, исследуемый ряд расходится.

Решить самостоятельно

Б.[1] # 2728 - 2733, 2739 - 2744, 2746 - 2753.

3. Признаки сходимости рядов

Ниже приведены формулировки признаков сходимости рядов с неотрицательными членами.

Признак Даламбера. *Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то этот ряд сходится при $0 \le q < 1$ и расходится при $q > 1$.* Случай $q = 1$ требует дополнительного исследования.

При $q = 1$ возможны различные случаи. Так, гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, хотя для обоих этих рядов $q = 1$.

Признак Коши. *Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с неотрицательными членами существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, то этот ряд сходится при $0 \le q < 1$ и расходится при $q > 1$.* Случай $q = 1$ требует дополнительного исследования.

[1] Берман. Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1981, 1971.

При $q = 1$ ситуация аналогична описанной в признаке Даламбера и может быть проиллюстрирована теми же примерами.

Интегральный признак Коши. *Если $f(x)$ при $x \geq 1$ – непрерывная, неотрицательная и монотонно убывающая функция, то ряд с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$, сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

<u>**Пример 3.1**</u>. Исследовать на сходимость ряд Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}. \qquad (*)$$

При $p \leq 0$ не выполняется необходимый признак сходимости (теорема 1.2, п. 1), следовательно, ряд расходится. Рассмотрим $p > 0$. Члены ряда (*) являются значениями функции $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ в точках $x = n$. Функция $f(x)$ неотрицательна и монотонно убывает при $x \geq 1$. Поэтому ряд (*) сходится или расходится вместе с несобственным интегралом $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^p}$.

При $0 < p < 1$ имеем:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^N = \infty,$$

а при $p = 1$ получаем:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} \ln N - \ln 1 = \infty.$$

Следовательно, при $p \leq 1$ ряд Дирихле расходится.
Если же $p > 1$, то

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \left.\left(-\frac{1}{(p-1)x^{p-1}}\right)\right|_1^N = \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, при $p > 1$ ряд Дирихле сходится.

Рассмотрим еще примеры исследования сходимости числовых рядов с помощью сформулированных признаков сходимости. В примерах 3.2, 3.3 и 3.4 используем признак Даламбера.

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд

$$1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots+n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

Общий член ряда: $u_n = n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $u_{n+1}=(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$. Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n}{n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}<1.$$

Следовательно, исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ сходится.

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Для такого ряда имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

Следовательно, исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ сходится.

Пример 3.4. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\ldots+\frac{n^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}.$$

Предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)\cdot n!}{n!\cdot(n+1)\cdot n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1.$$

Исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ расходится.

Исследование сходимости ряда в примере 3.5 проведем с помощью признака Коши.

Пример 3.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\left(\frac{5}{2}\cdot 4\right)+\left(\frac{7}{3}\cdot 4\right)^2+\left(\frac{9}{4}\cdot 4\right)^3+\ldots+\left(\frac{2n+3}{n+1}\cdot 4\right)^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\cdot 4\right)^n.$$

Предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n+1}\cdot 4=8>1,$$

следовательно, исследуемый ряд расходится.

Пример 3.6. С помощью интегрального признака Коши исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

Функция $f(x)=\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ неотрицательна и убывает при $x\geq 2$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, т.е. $f(x)$ удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши. Несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\int_2^b\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b=\frac{1}{\ln 2},$$

т.е. несобственный интеграл сходится, а вместе с ним сходится и исследуемый ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

Решить самостоятельно

Б. # 2754 - 2783, 2785 - 2789.

4. Ряды со знакопеременными членами. Абсолютная и условная сходимость. Ряд Лейбница

Определение. *Говорят, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{10}$$

со знакопеременными членами сходится абсолютно, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{11}$$

Теорема 4.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он и просто сходится.*

Заметим, что абсолютная сходимость ряда – требование гораздо более сильное, чем просто сходимость, так как сходимость ряда (10) не влечет за собой сходимость ряда (11).

Для того, чтобы ответить на вопрос, сходится ряд абсолютно или нет, достаточно исследовать сходимость ряда с неотрицательными членами.

Определение. *Знакочередующийся ряд вида* $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, *где числа* $u_k > 0$, *монотонно убывая, стремятся к нулю* ($u_{k+1} \le u_k$, $u_k \to 0$ *при* $k \to \infty$), *называется рядом Лейбница.*

Теорема 4.2. *Ряд Лейбница сходится и его сумма* $0 \le s \le u_1$.

Если ряд сходится абсолютно, то при любой перестановке его членов сходимость ряда не нарушается и его сумма остается прежней.

Определение. *Ряд, сходящийся неабсолютно, называют условно сходящимся. Абсолютно сходящийся ряд называют также безусловно сходящимся.* Такая терминология связана с утверждением теоремы Римана.

Теорема 4.3 *(Римана). Сумма ряда, сходящегося неабсолютно, может быть сделана равной любому произвольно заданному числу, а также* $+\infty$ *и* $-\infty$, *с помощью перестановки бесконечного числа его членов.*

Пример 4.1 (иллюстрирует теорему Римана).
Разложение функции $\ln(1+x)$ по формуле Маклорена имеет вид:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

Для всех x из отрезка $0 \le x \le 1$ получена оценка остаточного члена $|R_{n+1}(x)| < \dfrac{1}{n+1}$. Пусть $x = 1$, тогда

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + R_{n+1}(1).$$

Это условно сходящийся ряд, так как соответствующий ряд из модулей его членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ (гармонический ряд) расходится, в то время как исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ – сходящийся (как ряд Лейбница), причем сумма его равна $\ln 2$. Сложим два следующих выражения:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots ,$$

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + \ldots .$$

Полученная сумма имеет вид:

$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots .$$

Легко видеть, что последний ряд содержит те же члены, что и ряд для $\ln 2$, но стоящие в другом порядке, что и привело к изменению суммы ряда.

<u>Пример 4.2</u>. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

В нашем случае $|u_n| = \dfrac{1}{n^p}$. Если $p \le 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ne 0$, и, значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ расходится. При $p > 0$ возможны два варианта:

а) если $p > 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ сходится (см. пример 3.1), откуда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ сходится абсолютно;

б) если $0 < p \le 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ расходится, значит исходный ряд не будет сходиться абсолютно. Исследуем его на условную сходимость. Докажем, что ряд является рядом Лейбница. Действительно,

$u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$, т.е. ряд знакочередующийся, последовательность $\left\{\dfrac{1}{n^p}\right\}$ - убывающая, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$. Согласно признаку Лейбница ряд сходится.

Тем самым доказали, что исследуемый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ расходится, если $p \le 0$; сходится условно, если $0 < p \le 1$ и сходится абсолютно, если $p > 1$.

Решить самостоятельно

Б. # 2790 - 2799.

5. Функциональные ряды

Определение. *Ряд вида*

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{12}$$

где $u_n(x)$ - некоторые функции переменной x, определенные на множестве X, называется функциональным рядом.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (12) становится числовым рядом

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0).$$

Если этот ряд сходится, то значение аргумента $x = x_0$ называется *точкой сходимости* функционального ряда (12), а совокупность всех точек сходимости называется *областью сходимости* функционального ряда.

Функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

называется *суммой ряда* (12), а функция

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

называется *остатком ряда*, причем

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x) -$$

n-я частичная сумма функционального ряда.

Теорема 5.1 *(критерий Коши). Для того, чтобы функциональный ряд (12) сходился в области X, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon > 0$ и $\forall x \in X$ можно было указать зависящее от ε и x натуральное число $N = N(\varepsilon, x)$, такое, что для всех $n > N(\varepsilon, x)$ и всех $p = 1, 2, 3, \ldots$ справедливо неравенство:*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Для сходящегося в области X ряда (12) при $p \to \infty$ из последнего неравенства следует оценка остатка ряда:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leq \varepsilon$$

для всех $n > N(\varepsilon, x)$, $x \in X$.

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ в том и только в том случае, когда $R_n(x) \to 0$.

Область сходимости ряда (12) может быть найдена с использованием признаков Даламбера и Коши. Определяя пределы, если они существуют,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \phi(x) \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \psi(x),$$

из неравенств $\phi(x) < 1$ или $\psi(x) < 1$ можно определить область сходимости ряда (12).

Пример 5.1. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+n}{2nx}\right)^n.$$

Используя признак Коши, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x+n}{2nx}\right|^n} = \frac{1}{2|x|} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n} + 1\right| = \frac{1}{2|x|} < 1,$$

откуда следует, что ряд сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > \frac{1}{2}$.

Исследуем поведение ряда в точке $x = \frac{1}{2}$.

$$\left.\frac{x+n}{2nx}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+n}{2n\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1+2n}{2n} = 1 + \frac{1}{2n},$$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right) = 1$, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости (теорема 1.2, п. 1). Следовательно, исследуемый ряд в точке $x = \frac{1}{2}$ расходится.

Аналогично доказывается расходимость ряда и в точке $x = -\frac{1}{2}$.

Известно, что последовательность непрерывных функций может сходиться к разрывной функции. Так как сходимость ряда есть сходимость последовательности его частичных сумм, то аналогичное утверждение справедливо и для рядов. Условием того, что функциональный ряд с непрерывными членами сходится к непрерывной функции, является *равномерная сходимость* ряда.

Понятие равномерной сходимости поясним на примере функциональной последовательности.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, т.е. функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в промежутке X к предельной функции $f(x)$. Согласно определению предела это значит, что при фиксированном значении $x = x' \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x')\}$ сходится к числу $f(x')$, т.е. для $\forall\varepsilon > 0$ можно указать число $N' > 0$, такое, что для $\forall n > N'$ верно неравенство $|f_n(x') - f(x')| < \varepsilon$. Для другого фиксированного $x = x'' \in X$ получим другую числовую последовательность $\{f_n(x'')\}$, и при том же значении $\varepsilon > 0$ число N' может оказаться непригодным – его придется заменить на $N'' > N'$. Поскольку x принимает бесконечно много значений в области X, то имеем бесконечно много соответствующих числовых последовательностей, и для каждой из них по фиксированному $\varepsilon > 0$ найдется, быть может, свое значение N.

Возникает вопрос, существует ли число N^*, пригодное при фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех последовательностей $\{f_n(x)\}$ независимо от выбора $x \in X$? Если такое число $N^*(\varepsilon)$, не зависящее от выбора $x \in X$, существует, то сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ называют равномерной относительно переменной x.

Равномерную сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ можно интерпретировать геометрически (рис. 1).

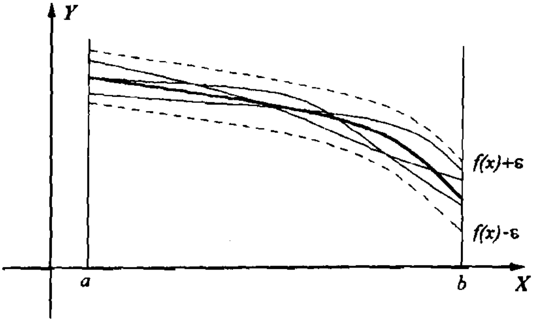

Рис. 1

Здесь для $\forall n > N^*$ графики $f_n(x)$ целиком помещаются внутри полосы шириной 2ε, проведенной около графика предельной функции $f(x)$.

Определение. *Пусть функции $f_n(x)$ и $f(x)$ определены на множестве X. Говорят, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N(\varepsilon)$, такое, что для всякого натурального $n > N(\varepsilon)$ и любого $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

Можно также определить равномерную сходимость не в терминах сходимости последовательности частичных сумм, а в терминах остатков ряда.

Определение. *Сходящийся в области X функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся в этой области, если для $\forall\varepsilon > 0$ существует не зависящее от $x \in X$ число $N = N(\varepsilon)$, такое, что для остатка ряда $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ справедливо неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ при всех $n > N$ для всех $x \in X$.*

Теорема 5.2 *(критерий Коши). Для того, чтобы функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходился равномерно в области* X, *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало натуральное* $N = N(\varepsilon)$ *(не зависящее от* x*), такое, что для всех* $n > N$ *и всех* $p = 1, 2, 3, \ldots$ *при всех* $x \in X$ *выполняется неравенство*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

На практике для установления равномерной сходимости рядов часто используется простой и эффективный признак Вейерштрасса.

Теорема 5.3 *(признак Вейерштрасса). Если числовой ряд с неотрицательными членами* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и для членов функционального ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *при всех* $n \geq n_0 \geq 1$ *и всех* $x \in X$ *справедливы оценки*

$$|u_n(x)| \leq a_n,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится абсолютно и равномерно в области* X.

В этом случае говорят, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ "мажорирует" исходный функциональный ряд, а сам числовой ряд называют мажорантным.

Пример 5.2. Исследовать, равномерно ли сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{3^n} \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Так как $|\cos nx| \leq 1$ на всей числовой оси, то $\left|\frac{\cos nx}{3^n}\right| \leq \frac{1}{3^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, т.е. числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ мажорирует исследуемый функциональный ряд. Члены числового ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1/3$ (геометрический ряд). Геометрический ряд сходится при $q < 1$, следовательно, в соответствии с признаком Вейерштрасса, исследуемый ряд сходится абсолютно и равномерно на всей числовой оси.

Функциональные ряды, равномерно сходящиеся в некоторой области X, обладают рядом замечательных свойств, используемых как в теории рядов, так и в приложениях. Сформулируем теоремы, касающиеся этих свойств.

Теорема 5.4. *Если члены $u_n(x)$ функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд сходится равномерно на $[a,b]$, то его сумма $S(x)$ непрерывна на $[a,b]$.*

Теорема 5.5. *Если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ и $u_n(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно почленно интегрировать, т.е. имеет место равенство:*

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\, dx.$$

Теорема 5.6. *Пусть функции $u_n(x)$, $n = 1,2,3,\ldots$ непрерывны и имеют непрерывные на отрезке $[a,b]$ производные и пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a,b]$, а ряд производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ сходится равномерно на том же отрезке. Тогда сумма ряда, т.е. функция $S(x)$, дифференцируема, причем*

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

Теорема 5.7. *Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно в области X, причем существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to x_0} u_n(x) = c_n, \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad x \in X, \quad x_0 \in X.$$

Тогда:

1) числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad (*)$$

сходится;

2) для функции $S(x)$, являющейся суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, существует предел при $x \to x_0$, равный сумме числового ряда (*), т.е. имеет место равенство

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x).$$

Пример 5.3. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2+x^{2n}}.$$

Поскольку при $|x| < 1$ выполняется $\left|\dfrac{x^n}{2+x^{2n}}\right| = \dfrac{|x^n|}{2+x^{2n}} \le |x|^n$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^n$ сходится при $|x| < 1$, исходный ряд сходится при $|x| < 1$. Для $|x| > 1$ выполняется $\left|\dfrac{x^n}{2+x^{2n}}\right| \le \dfrac{|x^n|}{x^{2n}} = \dfrac{1}{|x|^n}$ и ряд сравнения $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^{-n}$ сходится при $|x| > 1$, следовательно, исследуемый ряд сходится при тех же условиях. Если $x = 1$ или $x = -1$, то $|u_n(\pm 1)| = \dfrac{1}{3}$ и ряд расходится.

В итоге, исследуемый ряд сходится на всей числовой оси, кроме точек $x = -1$ и $x = 1$.

Пример 5.4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}.$$

Применим к данному ряду признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot 2^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot 2^x = 2^x < 1,$$

что возможно при $x < 0$.

Случай $2^x = 1$, т.е. $x = 0$, исследуем особо. При $x = 0$ исследуемый ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Этот ряд расходится, так как его общий член не стремится к 0 при $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Пример 5.5. Доказать, что сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$

является непрерывной функцией при $-\infty < x < +\infty$.

Поскольку при $-\infty < x < \infty$ $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, исследуемый ряд мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, следовательно, по признаку Вейерштрасса сходится равномерно на всей числовой оси. Члены ряда $\frac{\sin nx}{n^2}$ непрерывны на всей числовой оси, следовательно, в соответствии с утверждением теоремы 5.4, исследуемый функциональный ряд сходится к непрерывной функции.

Пример 5.6. Можно ли почленно дифференцировать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$$

в области его сходимости?

Согласно утверждению теоремы 5.6, для почленного дифференцирования функционального ряда нужно, чтобы, помимо сходимости исходного ряда, ряд производных сходился равномерно.

Ряд производных $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ сходится равномерно на всей числовой оси, поскольку $\frac{|\cos nx|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$ для $-\infty < x < +\infty$, т.е. ряд мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Следовательно, исходный ряд можно дифференцировать почленно:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}.$$

Пример 5.7. Можно ли почленно дифференцировать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n \pi x)}{2^n} \ ?$$

Ряд производных $\pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2^n \pi x)$ расходится в каждой точке, так как общий член не стремится к 0 при $n \to \infty$, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости. Следовательно, исследуемый ряд почленно дифференцировать нельзя.

Пример 5.8. Можно ли почленно интегрировать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \ ?$$

Данный ряд сходится равномерно на всей числовой оси, поскольку $\dfrac{1}{x^2+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ и ряд мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Следовательно, согласно утверждению теоремы 5.5, ряд можно интегрировать почленно по любому промежутку из его области сходимости. Интегрируя, получим

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{dx}{x^2+n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}.$$

Решить самостоятельно

Найти области сходимости функциональных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{nx}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}, \qquad (x \neq n)$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^n}{n^2+x^{2n}}$.

Исследовать, равномерно ли сходятся ряды:

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n \cos(n^2 x), \qquad (|a| < 1)$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+2^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ при $-1 < x < +1$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ при $-\infty < x < +\infty$.

Можно ли почленно дифференцировать следующие ряды:

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^5}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(3^n \pi x)}{3^n}$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[e^{-(n-1)^2x^2} - e^{-n^2x^2}\right]$ при $-\infty < x < +\infty$.

Можно ли почленно интегрировать следующие ряды:

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{2^n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2x\left[n^2e^{-n^2x^2} - (n-1)^2e^{-(n-1)^2x^2}\right]$ на любом конечном отрезке числовой оси?

Ответы

1) $x < 0$.

2) $|x| < 1$.

3) Сходится для всех x, кроме $x = n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

4) Сходится для всех x.

5), 6), 7) Сходится равномерно для всех x.

8) Сходится в интервале $(-1, 1)$, но неравномерно.

Указание. Остаток выражается формулой $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. При фиксированном n: $\lim\limits_{x\to -1+0} |R_n(x)| = \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 1-0} |R_n(x)| = \infty$. Оба соотношения показывают, что осуществить неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ $(\varepsilon < \frac{1}{2})$ одновременно для всех x невозможно.

9) Сходится для всех x, но неравномерно.

Указание. Остаток ряда

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+3}} + \ldots =$$

$$= \frac{\dfrac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^n}.$$

При любом фиксированном n: $R_n(x) \to 1$ при $x \to 0$, поэтому не может выполняться неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ при любом ε для всех x.

10) Можно.

11) Нельзя.

Указание. Ряд производных расходится во всех точках, кроме точек $x = \dfrac{1}{3^n \cdot 2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

12) Нельзя.

Указание. $S_n(x) = 1 - e^{-n^2x^2}$, $S(x) = 1$ при $x \neq 0$, $S(0) = 0$. Ряд производных сходится к 0 во всех точках, в том числе и при $x = 0$, но неравномерно. Сумма исходного ряда в точке $x = 0$ имеет разрыв и потому производной иметь не может.

13) Можно.

14) Нельзя. Ряд сходится неравномерно.

6. Степенные ряды

Важным случаем функциональных рядов являются степенные ряды:

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \qquad (13)$$

или

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n.$$

Для выяснения свойств степенных рядов достаточно ограничиться рассмотрением рядов вида (13), так как ряд по степеням $(x - x_0)$ легко свести к виду (13) заменой переменной $x - x_0 = \tilde{x}$, т.е. переносом начала координат в точку x_0.

Для выяснения характера области сходимости степенного ряда сформулируем следующую теорему.

Теорема 6.1 *(Абеля). Пусть степенной ряд (13) сходится в точке $x_0 \neq 0$. Тогда он сходится абсолютно в любой точке x, для которой $|x| < |x_0|$, и равномерно в любой области $|x| \leq r < |x_0|$.*

Если степенной ряд (13) расходится в точке x_1, то он расходится и во всех точках x, таких, что $|x| > |x_1|$.

Для определения радиуса сходимости используется либо признак Даламбера, либо признак Коши.

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_nx^n|\,; \qquad (14)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}x^{n+1}|}{|c_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=|x|L. \tag{15}$$

Если существует предел (15), то ряд (14) сходится, если $|x|L<1$, и расходится, если $|x|L>1$. Следовательно, ряд (13) сходится абсолютно, если

$$|x|<\frac{1}{L}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$$

и расходится, если

$$|x|>\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.$$

Определение. *Число $R=\dfrac{1}{L}$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|<R$, ряд (14) сходится, а для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>R$, ряд расходится, называется радиусом сходимости ряда (13).*

Формула для радиуса сходимости, получаемая с помощью признака Даламбера, имеет вид:

$$R=\frac{1}{L}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|. \tag{16}$$

Если же к ряду (14) применить признак Коши, получим соотношение:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=|x|L,$$

из которого следует, что ряд (14) сходится, если $|x|<\dfrac{1}{L}$, и расходится, если $|x|>\dfrac{1}{L}$, а радиус сходимости ряда (13) определяется по формуле:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}, \tag{17}$$

которая носит название формулы Коши – Адамара.

Пример 6.1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n \quad \text{при } a>1.$$

По признаку Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n! a^{(n+1)^2}}{(n+1)! a^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = \infty,$$

что означает, что ряд сходится на всей оси X.

<u>**Пример 6.2**</u>. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

По формуле Коши – Адамара (17) находим:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e},$$

т.е. ряд сходится в области $|x| < \dfrac{1}{e}$.

При $x = \dfrac{1}{e}$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \dfrac{1}{e^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n} \dfrac{1}{e}\right)^{n} = 1$, т.е. необходимый признак сходимости не выполнен, следовательно, в точке $x = \dfrac{1}{e}$ исследуемый ряд расходится.

Расходимость ряда в точке $x = -\dfrac{1}{e}$ доказывается аналогично.

<u>**Пример 6.3**</u>. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}. \tag{18}$$

Следует отметить, что формула (16) для радиуса сходимости выведена в предположении, что степенной ряд (13) содержит все степени переменной x. В нашем случае равны нулю коэффициенты при четных степенях, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{c_{2n+2}}{c_{2n+1}} = 0,$$

т.е. формулу (16) формально применить нельзя. Однако применение признака Даламбера возможно, если вычислять предел отношения модулей соседних ненулевых членов ряда, и приводит к соотношению:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2x)^{2n+3}(2n+1)}{(2n+3)(2x)^{2n+1}} \right| = 2^2 |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+3} = 4|x|^2 < 1.$$

Это означает, что ряд (18) сходится, если $|x|^2 < \frac{1}{4}$, т.е. в области $|x| < \frac{1}{2}$.

В точке $x = \frac{1}{2}$ общий член ряда

$$u_n\big|_{x=\frac{1}{2}} = \left.\frac{(2x)^{2n+1}}{2n+1}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2n+1}.$$

Согласно второму признаку сравнения (см. п. 2) этот ряд расходится вместе с гармоническим рядом, с которым можно произвести сравнение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Расходимость ряда (18) при $x = -\frac{1}{2}$ доказывается аналогично. Следовательно, промежуток сходимости ряда: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

<u>**Пример 6.4**</u>. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}. \tag{19}$$

Степени x входят в ряд с пропусками, поэтому опять применяем признак Даламбера непосредственно, т.е. вычисляя предел отношения модулей соседних ненулевых членов ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{(n+1)^2} n!}{(n+1)!|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n^2+2n+1} n!}{(n+1)!|x|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{n+1} = 0 \quad \text{при} \quad |x| \le 1.$$

Степенной ряд сходится равномерно при $|x| \le r < R$, причем r как угодно близко к радиусу сходимости R, но не равно ему. Поэтому для степенных рядов справедливы следующие утверждения.

Теорема 6.2. *В области равномерной сходимости $|x| \le r$ степенной ряд (13) можно почленно дифференцировать любое число раз, причем радиусы сходимости получаемых рядов также равны r.*

Теорема 6.3. *В области равномерной сходимости $|x| \le r$ степенной ряд (13) можно почленно интегрировать, причем полученный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$ *сходится в той же области* $|x| \le r$.

Пример 6.5. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Обозначим сумму ряда $\varphi(x)$ и продифференцируем ряд почленно:

$$\varphi'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

После интегрирования получим:

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad \text{при} \quad |x| < 1.$$

Решить самостоятельно

Б. # 2878, 2880, 2884, 2888.

7. Ряды Тейлора и Маклорена

Рассмотрим соотношение коэффициентов степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x - -x_0)^n$ и формулы Тейлора $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. В соответствии с утверждением теоремы 6.2 степенной ряд в области его сходимости $|x - x_0| \le r$ можно почленно дифференцировать любое число раз, т.е.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n(x-x_0)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (20)$$

Полагая в (20) $x = x_0$, получим

$$f(x_0) = c_0, \quad f'(x_0) = c_1, \quad f''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot c_2, \quad \dots \quad ,$$
$$f^{(n)}(x_0) = n!\, c_n, \quad \dots \quad ,$$

откуда следует

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Эти выражения для c_n называются коэффициентами Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0. Формально составленный ряд с этими коэффициентами

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{22}$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$ или рядом Маклорена в случае $x_0 = 0$.

Рассмотрение вопроса о том, когда в формуле (22) вместо знака соответствия можно поставить знак равенства, мы вынуждены отложить. Будем считать, что функция $f(x)$ может быть представлена своим рядом Тейлора или Маклорена в области сходимости ряда.

Получим разложения некоторых функций по степеням x, находя коэффициенты по формуле (21).

1. $f(x) = e^x$.

$$f^{(n)}(0) = e^x\big|_{x=0} = 1,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{23}$$

Покажем, что радиус сходимости ряда (23) действительно равен ∞.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

следовательно, ряд (23) сходится на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$.

2. $f(x) = \sin x$.

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\sin x)'\big|_{x=0} = 1,$$

$$(\sin x)'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin x)''\big|_{x=0} = 0,$$

$$(\sin x)''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad (\sin x)'''\big|_{x=0} = -1$$

и т. д.

Очевидно, что $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, следовательно,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{24}$$

Покажем, что радиус сходимости ряда (24) действительно равен ∞. Степени x входят в ряд с пропусками, поэтому применим признак Даламбера непосредственно, вычисляя предел отношения модулей соседних ненулевых членов ряда.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{2n+3} x^{2n+3}}{c_{2n+1} x^{2n+1}} \right| = |x|^2 \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = 0,$$

следовательно, ряд (24) сходится на всей числовой оси.

3. $f(x) = \cos x$.

Почленным дифференцированием ряда (24) получим:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{25}$$

4. $f(x) = (1+x)^\alpha$.

В случае α целого положительного – это бином Ньютона, и в разложении содержится конечное число членов. Если же α отлично от целого положительного числа, то производные имеют вид:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

откуда следует, что

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{для} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Получаемый ряд называется биномиальным:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n. \tag{26}$$

Определим радиус сходимости полученного ряда.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(n+1)!}{n!\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{(\alpha-n)}\right| = 1,$$

следовательно, ряд (26) сходится на интервале $-1 < x < 1$.

Ряд для функции $\frac{1}{1+x}$ есть частный случай биномиального ряда при $\alpha = -1$ и может быть получен из (26) подстановкой $\alpha = -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad -1 < x < 1. \qquad (27)$$

Ряд для функции $\frac{1}{1-x}$ легко получить из предыдущего выражения:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1. \qquad (28)$$

Используя возможность почленного интегрирования степенных рядов (теорема 6.3), найдем разложения для функций $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \quad x > -1.$$

Подставим в интеграл ряд (27):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Таким образом,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad |x| < 1. \qquad (29)$$

Разложение для $\operatorname{arctg} x$ будем искать, исходя из соотношения $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$, в которое подставим ряд $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. В результате почленного интегрирования получаем:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1. \qquad (30)$$

Непосредственное вычисление коэффициентов Тейлора по формулам (21) часто приводит к громоздким выкладкам, поэтому представляют интерес искусственные приемы разложения функций в ряды с использованием формул (23) – (30), которые позволяют существенно упростить дело.

Пример 7.1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{x^2}$.

По формуле (23) $e^u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$. Пусть $u = x^2$, тогда при $x \to 0$ имеем $u \to 0$ и формулой (23) воспользоваться можно:

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Пример 7.2. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \ln(8 + x^3)$.

Воспользуемся разложением (29) $\ln(1+u) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{n+1}}{n+1}$, полагая $u = \frac{x^3}{8}$:

$$\ln(8+x^3) = \ln 8 + \ln\left(1 + \frac{x^3}{8}\right) = 3\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3(n+1)}}{8^{n+1}(n+1)},$$

$$\left|\frac{x^3}{8}\right| < 1 \quad \text{или} \quad |x| < 2.$$

Пример 7.3. Разложить в ряд Маклорена функцию $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

Поскольку $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, запишем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^{n+1}}{n+1} - \ldots.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

Пример 7.4. Получить ряд Маклорена для интегрального синуса

$$\mathrm{si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Воспользуемся разложением (24) и проинтегрируем ряд почленно:

$$\mathrm{si}(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{t}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int\limits_0^x t^{2n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

Решить самостоятельно

Б. # 2856, 2858, 2860, 2863, 2866, 2868.

8. Тригонометрические ряды Фурье

Определение. *Ряд вида*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{31}$$

называется тригонометрическим рядом. (Здесь знак суммы относится к обоим слагаемым, стоящим справа от него.)

Частичные суммы тригонометрического ряда являются линейными комбинациями функций из системы

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots\ . \tag{32}$$

Определение. *Система функций (32) называется тригонометрической системой.*

Лемма. *Тригонометрическая система (32) имеет следующие свойства:*

1) интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ от произведения двух различных функций этой системы равен нулю (это свойство называется свойством ортогональности системы (32)), т.е.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad n \neq m,$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \quad n \neq m, \tag{33}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots;$$

2)
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{34}$$

Теорема 8.1. *Пусть*
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{35}$$
и ряд (35) сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, *тогда*
$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \end{gathered} \tag{36}$$

Заметим, что формулы (36) имеют смысл не только для непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций, но также и для функций, интегралы от которых сходятся абсолютно на этом отрезке. (Говорят, что $\int_a^b f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится $\int_a^b |f(x)|dx$.) Этому условию удовлетворяют, в частности, функции, имеющие на отрезке $[-\pi, \pi]$ конечное число разрывов первого рода и кусочно-дифференцируемые на нем.

Если в точке $x \in (-\pi, \pi)$ существуют конечные пределы $f(x+0)$, $f(x-0)$ и односторонние производные $f'_+(x)$ и $f'_-(x)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в этой точке и его сумма равна
$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{37}$$
Если существуют конечные пределы $f(-\pi+0)$, $f(\pi-0)$ и односторонние производные $f'_+(-\pi)$ и $f'_-(\pi)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $-\pi$ и π и его сумма в этих точках равна
$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}. \tag{37'}$$
В точках непрерывности функции значения суммы ряда совпадают со значениями функции.

Доказательства соответствующих теорем приведены, например, в учебнике Я. Ф. Бугрова и С. М. Никольского [1]. Решая примеры, мы будем считать, что рассматриваемые функции удовлстворяют сформулированным условиям.

Пример 8.1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\pi \le x < 0, \\ -1 & \text{при } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Вычислим коэффициенты разложения:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos kx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} = 0,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(x|_{-\pi}^{0} - x|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\,\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{k\pi}(\cos 0 - \cos k\pi) +$$

$$+\frac{1}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0) = \frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0) = \frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k - 1\right].$$

Таким образом, $b_k = 0$ при четном k и $b_k = -\dfrac{4}{k\pi}$ при нечетном k, т.е.

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2n, \\ -\dfrac{4}{\pi(2n-1)} & \text{при } k = 2n-1, \end{cases}$$

следовательно,

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к $f(x)$ во всех точках ее непрерывности, а в точке $x = 0$, в соответствии с (37),

$$S(0) = \frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0.$$

На концах промежутка соответственно:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0.$$

График суммы строится следующим образом: на интервале $(-\pi, \pi)$ $S(x) = f(x)$ в точках непрерывности $f(x)$; в точках разрыва функции $f(x)$ и в точках $x = \pi$ и $x = -\pi$ по формулам (37) и (37′); далее график продлевается с периодом 2π на всю числовую ось. График суммы полученного ряда Фурье представлен на рис. 2.

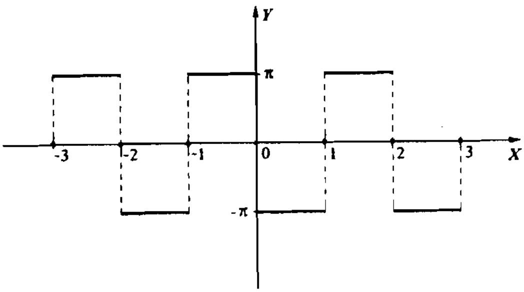

Рис. 2

Ряд Фурье нечетной функции (т.е. функции, для которой $f(-x) = -f(x)$) содержит только члены с синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \ . \tag{38}$$

Здесь интеграл в формуле для вычисления b_n взят по половине симметричного интервала и результат удвоен, так как под интегралом стоит четная функция, являющаяся произведением двух нечетных функций. Интегралы для вычисления a_0 и a_n обращаются в нуль, поскольку берутся по симметричному интервалу от нечетных функций. Рассмотренный выше пример иллюстрирует этот случай.

Ряд Фурье четной функции (т.е. функции, для которой $f(-x) = f(x)$) содержит только члены с косинусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \, . \tag{39}$$

Здесь, как и в предыдущем случае, интеграл взят по половине симметричного интервала и результат удвоен, а интеграл для вычисления b_n равен нулю.

Кусочно-дифференцируемая функция, заданная на промежутке $[0, \pi]$, может быть продолжена на промежуток $[-\pi, 0)$ либо как четная, либо как нечетная, в соответствии с чем ее можно разложить в ряд Фурье или только по косинусам, или только по синусам.

Интегралы от периодической функции $f(x)$ периода T по любому отрезку длиной T совпадают, т.е. справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Если функция $f(x)$ имеет период T, т.е. $\forall x \ f(x+T) = f(x)$, то для любого числа a:*

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \, dx = \int_{a}^{a+T} f(x) \, dx. \tag{40}$$

Пример 8.2. Функцию $f(x) = x$, заданную в промежутке $[0, \pi]$, разложить в ряд Фурье по косинусам.

Продолжив функцию в промежуток $[-\pi, 0)$ четным образом, получим:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } \ 0 \le x \le \pi, \\ -x & \text{при } \ -\pi \le x < 0. \end{cases}$$

В этом случае $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{1}{\pi} \, x^2 \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{2}{\pi} x \, \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^\pi \sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}(\pi\sin n\pi - 0\sin 0) + \frac{2}{n\pi}\,\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n - 1\right],$$

т.е.

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n = 2k, \\ -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi} & \text{при} \quad n = 2k-1, \end{cases}$$

следовательно,

$$f(x) = x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right), \quad 0 \le x \le \pi.$$

График суммы полученного ряда Фурье приведен на рис. 3. С графиком функции $f(x) = x$ он совпадает только для $x \in [0, \pi]$.

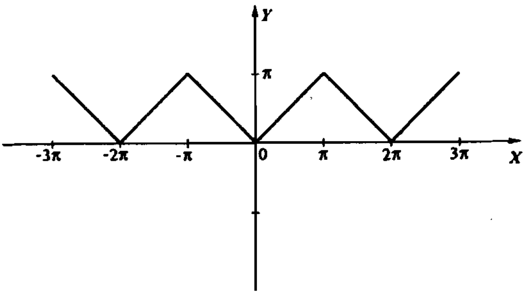

Рис. 3

<u>Пример 8.3</u>. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi}\left[\pi^3 - (-\pi)^3\right] = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2 d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = \frac{1}{\pi}x^2\,\frac{\sin nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xd\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{2}{n\pi}x\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} -$$

$$-\frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\left[\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-\pi)\right] - \frac{2}{\pi n^2}\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{4\pi\cos n\pi}{\pi n^2} = (-1)^n\frac{4}{n^2}, \quad n = 1,2,3,\dots .$$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin nx\,dx = 0$, поскольку интеграл по симметричному интервалу берется от нечетной функции.

Ряд Фурье имеет вид:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}.$$

При $x = 0$ получим полезные соотношения:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \text{откуда следует} \quad \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Пример 8.4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \ -\pi \le x \le 0, \\ 0 & \text{при} \ 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\,dx = -\frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{2\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = -\frac{1}{\pi n}x\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{1}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right],$$

т.е.

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{при} \ n = 2k, \\ -\dfrac{2}{(2k-1)^2\pi} & \text{при} \ n = 2k-1, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 0\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} xd\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = \frac{\pi\cos n\pi}{\pi n} = \frac{(-1)^n}{n}.$$

В итоге:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n}, \qquad -\pi < x < \pi.$$

При $x = 0$ получаем еще одно полезное соотношение:

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}.$$

График суммы ряда изображен на рис. 4.

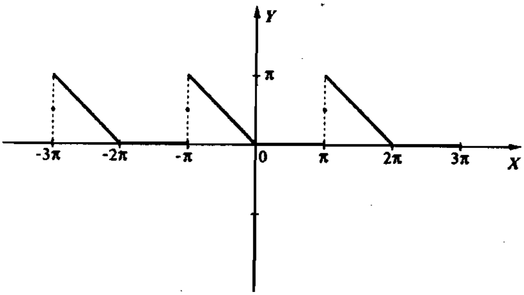

Рис. 4

В случае, если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ задана на отрезке $[-l, l]$, ее разложение в ряд Фурье тоже возможно, однако формулы для вычисления коэффициентов несколько видоизменяются.

Если прибегнуть к замене переменной $x = \dfrac{lt}{\pi}$, то получим функцию $f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)$, определенную на отрезке $t \in [-\pi, \pi]$, к которой приложимы все предыдущие соотношения:

$$f\left(\frac{lt}{\pi}\right) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nt + b_n\sin nt,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\cos nt\,dt, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{lt}{\pi}\right)\sin nt\,dt, \quad n = 1,2,3,\ldots\ .$$

Возвращаясь к прежней переменной x, полагая $t = \frac{\pi x}{l}$, получим:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{41}$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{42}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 1,2,3,\ldots\ . \tag{43}$$

Пример 8.5. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^x$ в промежутке $(-1,1)$.

$$a_0 = \int\limits_{-1}^{1} e^x dx = e^x|_{-1}^{1} = e - e^{-1},$$

$$a_n = \int\limits_{-1}^{1} e^x\cos n\pi x\,dx = e^x\,\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-1}^{1} e^x\sin n\pi x\,dx =$$

(здесь внеинтегральное выражение равно нулю, а интеграл второй раз интегрируем по частям)

$$= \frac{1}{n\pi}e^x\,\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\bigg|_{-1}^{1} - \frac{1}{n^2\pi^2}\int\limits_{-1}^{1} e^x\cos n\pi x\,dx.$$

Перенесем влево последний интеграл, получим:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\right)\int\limits_{-1}^{1} e^x\cos n\pi x\,dx = \left(\frac{1+n^2\pi^2}{n^2\pi^2}\right)\int\limits_{-1}^{1} e^x\cos n\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}e^x\cos n\pi x\bigg|_{-1}^{1}$$

или, после деления на выражение, стоящее перед интегралом:

$$a_n = \int\limits_{-1}^{1} e^x\cos n\pi x\,dx = \frac{e^x\cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{\cos n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e - e^{-1}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\left(e - e^{-1}\right).$$

Вычисление коэффициента b_n производится аналогично, т.е. дважды по частям с последующим переносом последнего полученного интеграла влево:

$$b_n = \int_{-1}^{1} e^x \sin n\pi x\, dx = -\left.\frac{n\pi e^x \cos n\pi x}{1+n^2\pi^2}\right|_{-1}^{1} = \frac{n\pi \cos n\pi}{1+n^2\pi^2}\left(e^{-1} - e\right) =$$

$$= \frac{n\pi(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}\left(e - e^{-1}\right).$$

В итоге, искомое разложение имеет вид:

$$e^x = \left(e - e^{-1}\right)\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}\cos n\pi x + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{1+n^2\pi^2}\sin n\pi x\right].$$

<u>**Пример 8.6**</u>. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = |\sin x|$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Здесь $l = \frac{\pi}{2}$, функция – четная, следовательно, $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos\frac{n\pi x}{\pi/2}\, dx = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2n-1)x\, dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)x\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left.\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right|_0^{\pi/2} - \frac{2}{\pi}\left.\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}\right|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}.$$

Следовательно, разложение $|\sin x|$ на отрезке $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ имеет вид:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \frac{1}{63}\cos 8x + \dots\right).$$

Решить самостоятельно

В промежутке $(-\pi, \pi)$ разложить в ряды Фурье функции:

1) $f(x) = |x|$;

2)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } -\pi \le x \le 0, \\ \sin x & \text{если } 0 < x \le \pi; \end{cases}$$

3)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{\pi x}{4} & \text{если } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

В промежутке $(0, \pi)$ разложить в ряды по косинусам функции:

4)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } 0 \le x \le c, \\ 0 & \text{если } c < x \le \pi; \end{cases}$$

5)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}x & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{4}(\pi - x) & \text{если } \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi. \end{cases}$$

В промежутке $(0, \pi)$ разложить в ряды по синусам функции:

6) $f(x) = x^2$; 7) $f(x) = x$.

В промежутке $(-1, 1)$ разложить в ряды Фурье функции:

8) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{если } -1 \le x < 0, \\ 1 & \text{если } 0 \le x \le 1; \end{cases}$ 9) $f(x) = |x|$.

В промежутке $(-l, l)$ разложить в ряды Фурье функции:

10)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{если} \quad -l \le x \le 0, \\ -1 & \text{если} \quad 0 < x < l; \end{cases}$$

11)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad -l \le x \le 0, \\ x & \text{если} \quad 0 < x < l. \end{cases}$$

Ответы

1) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$;

2) $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2-1}$;

3) $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \dfrac{(-1)^n \pi \sin nx}{2n}\right]$;

4) $\dfrac{2c}{\pi} \left[\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin cn}{cn} \cos nx\right]$;

5) $\dfrac{\pi^2}{16} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n}$;

6) $x^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, где $b_{2n} = -\dfrac{\pi}{n}$, $b_{2n-1} = \dfrac{2\pi}{2n-1} - \dfrac{8}{\pi(2n-1)^3}$;

7) $2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$;

8) $1 + \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$;

9) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$;

10) $-\dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$;

11) $\dfrac{l}{4} - \dfrac{2l}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{1}{\pi(2n-1)^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{l} + \dfrac{(-1)^n}{2n} \sin \dfrac{n\pi x}{l}\right]$.

9. Применение рядов в приближенных вычислениях

В приближенных вычислениях сумма ряда заменяется частичной суммой этого ряда. Если известно разложение функции в степенной ряд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n, \tag{44}$$

то для любого числа x^*, взятого из области сходимости ряда (44), справедливо приближенное соотношение:

$$f(x^*) \approx \sum_{k=0}^{n} c_k(x^* - x_0)^k. \tag{45}$$

При каждом фиксированном n можно получить точность этого приближения, т.е. оценить величину

$$|R_n(x^*)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(x^* - x_0)^k\right|. \tag{46}$$

Оценка величины (46) особенно проста, если ряд является знакочередующимся. В этом случае погрешность вычислений не превышает величины первого отброшенного члена, т.е.

$$|R_n(x^*)| \leq \left|c_{n+1}(x^* - x_0)^{n+1}\right|.$$

Если же ряд не является знакочередующимся, то при оценке погрешности могут быть использованы геометрическая прогрессия, оценка остаточного члена ряда Тейлора или какие-либо другие соображения.

Пример 9.1. Вычислить $\cos 10^o$ с точностью до 10^{-4}.

Используя ряд для $\cos x$ при $x = \pi/18$, найдем:

$$\cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 - \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n} + \ldots .$$

Так как ряд – знакочередующийся, погрешность не превосходит первого отбрасываемого числа. По заданной точности находим n из условия:

$$\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n} < 10^{-4}.$$

Это неравенство выполнено уже при $n = 2$. Произведя вычисления, получим:

$$\cos\frac{\pi}{18} \approx 1 - \frac{\pi^2}{648} = 0,9848.$$

Пример 9.2. Вычислить с точностью до 10^{-4} выражение $1/\sqrt[4]{20}$. Представим $1/\sqrt[4]{20}$ в виде

$$\frac{1}{\sqrt[4]{20}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16+4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{1+1/4}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\right)^{-1/4}$$

и воспользуемся биномиальным разложением:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{20}} = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{5}{4}\right)\ldots\left(-\frac{1}{4}-k+1\right)}{k!}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}{4^{2k}k!}\right].$$

Учитывая, что $\dfrac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4k-3)}{2\cdot 4^{2k}k!} < 10^{-4}$ при $k \geq 5$, получаем:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{20}} \approx \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{16} + \frac{5}{512} - \frac{45}{6\cdot 4^6} + \frac{5\cdot 9\cdot 13}{24\cdot 4^8}\right] = 0,4729.$$

Следует отметить, что в практике вычислений большую роль играет быстрота приближения частичной суммы ряда к искомому результату. Например, из ряда $\ln(1+x)$ при $x = 1$ получаем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

откуда видно, что для вычисления $\ln 2$ с точностью до 10^{-3} следует взять тысячу членов ряда! Это, конечно, неосуществимо без компьютера. Обычно для вычисления логарифмов используется разложение функции $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

Пример 9.3. Используя названное разложение, вычислить $\ln 2$ с точностью до 10^{-4}.

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Поскольку $\dfrac{1+x}{1-x} = 2$ при $x = 1/3$, разложение $\ln 2$ имеет вид:

$$\ln 2 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

Этот ряд сходится быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/3$. Остаток ряда оценим следующим образом:

$$2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\cdot 3^{2k+1}} < \frac{2}{3(2n+3)}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{9^k} =$$

$$= \frac{2}{3(2n+3)\cdot 9^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{9}} = \frac{1}{12(2n+3)\cdot 9^n}.$$

Из оценки видно, что уже при $n = 3$ погрешность вычислений не более 10^{-4}. Произведем вычисления:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5}\right) = 0,6930.$$

Иногда приходится выяснять вопрос, является ли некоторая величина бесконечно малой или нет. В этом случае можно исследовать на сходимость ряд с надлежащим образом подобранными членами и использовать необходимый признак сходимости.

Пример 9.4. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$.

Исследуем на абсолютную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a|^{n+1}n!}{|a|^n(n+1)!} = 0,$$

т.е. ряд сходится, следовательно, по необходимому признаку сходимости рядов, предел общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Пример 9.5. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}a^n$.

Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}a^n$ по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(\alpha-n)\,n!\,a^{n+1}}{n!\,(n+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\,a^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n-\alpha}{n+1}|a|,$$

откуда заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}a^n = 0$ при $|a| < 1$, а при $|a| > 1$ предел бесконечен.

Во многих случаях целесообразно приближенное вычисление определенных интегралов. Если подынтегральная функция разлагается в степенной ряд, а пределы интегрирования принадлежат области сходимости этого ряда, то интеграл может быть вычислен с заданной точностью.

Пример 9.6. Вычислить $\int\limits_0^{1/4} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 10^{-5}.

Интеграл $\int \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ не может быть выражен в элементарных функциях, поэтому приближенное вычисление его является единственно возможным. Подынтегральное выражение разлагается в ряд

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right] =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots .$$

Интегрируя ряд почленно, получаем:

$$\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int\limits_0^{1/4}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{4^3} + \frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{1}{4^5} - \frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{1}{4^7} + \ldots .$$

Ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, находим:

$$\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{4^3} = 0,25 - 0,00087 = 0,24913.$$

Поскольку ряд знакочередующийся, погрешность не превзойдёт величины первого отброшенного члена

$$\frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{1}{4^5} = \frac{1}{5\cdot 120\cdot 1024} = \frac{1}{614400} < 10^{-5}.$$

Пример 9.7. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до 10^{-3}.

Подынтегральная функция разлагается в степенной ряд

$$(1+x^3)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^6 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^9 +$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}x^{12} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{16}x^9 - \frac{5}{128}x^{12} + \ldots, \qquad |x| < 1.$$

Интегрируя этот ряд почленно, находим:

$$\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx = \left(x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{5x^{13}}{1664} + \ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8\cdot 2^4} - \frac{1}{56\cdot 2^7} + \frac{1}{160\cdot 2^{10}} - \ldots .$$

Ограничимся двумя первыми членами, поскольку уже

$$\frac{1}{56\cdot 2^7} = \frac{1}{56\cdot 128} < 10^{-3}.$$

В итоге:

$$\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3}\,dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{128} \approx 0{,}508.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов целесообразно в тех случаях, когда их решения не выражаются в элементарных функциях или не приводятся к квадратурам (т.е. не могут быть представлены в виде интегралов). В таких случаях ряд, являющийся решением дифференциального уравнения, можно найти методом неопределенных коэффициентов или способом, основанным на прямом использовании формулы Тейлора.

Метод неопределенных коэффициентов особенно удобен в применении к линейным уравнениям, т.е. уравнениям вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x), \quad (47)$$

и состоит в следующем. Если все коэффициенты $p_k(x)$ и свободный член $f(x)$ разлагаются в ряды по степеням $(x-x_0)$, сходящиеся в некотором интервале (x_0-h, x_0+h), то искомое решение $y=y(x)$ может быть представлено в виде степенного ряда

$$y(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (48)$$

сходящегося в том же интервале. Подставляя в уравнение (47) функцию (48) и ее производные, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $(x-x_0)$. Из получаемых при этом уравнений и начальных условий (если они заданы) удается найти коэффициенты c_0, c_1, c_2, ...

В приведенных далее примерах рассмотрено приложение рядов к решению простейших дифференциальных уравнений, которые легко решаются обычными методами. Такой выбор позволяет без громоздких выкладок уяснить идею метода.

Пример 9.8. С помощью рядов решить задачу Коши для уравнения:

$$y'-y=0 \quad \text{при условии} \quad y|_{x=0}=1.$$

В данном случае $x_0=0$ (так как интегральная кривая проходит через точку $(0,1)$). Решение ищем в виде ряда:

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+\ldots+c_nx^n+\ldots .$$

Его производная:

$$y'=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots .$$

Подставив y и y' в уравнение, получаем:

$$c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\ldots+c_nx^n+\ldots=$$

$$=c_1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+\ldots+nc_nx^{n-1}+(n+1)c_{n+1}x^n+\ldots .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} x^0\colon & c_0=c_1, \\ x^1\colon & c_1=2c_2, \\ x^2\colon & c_2=3c_3, \\ x^3\colon & c_3=4c_4, \\ \ldots & \\ x^n\colon & c_n=(n+1)c_{n+1}, \\ \ldots & \end{array}$$

Из начального условия $y|_{x=0} = 1$ получаем, что $c_0 = 1$. Остальные коэффициенты находим, решая систему уравнений:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{2\cdot 3}, \quad c_4 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}, \ldots, \quad c_n = \frac{1}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}.$$

Искомое решение:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

Точное решение данного уравнения легко получить:

$$\frac{dy}{dx} - y = 0, \quad \int \frac{dy}{y} = \int dx, \quad \ln|y| = x + \ln C, \quad y = Ce^x,$$

где $C = 1$ из условия $y|_{x=0} = 1$. Очевидно, что полученные решения совпадают.

Пример 9.9. Найти общее решение уравнения $y'' = -y$ в виде степенного ряда.

Решение ищем в виде ряда:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots .$$

Производные ряда имеют вид:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + 3\cdot 4c_4 x^2 + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \ldots .$$

В результате подстановки y и y'' в уравнение получаем:

$$2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + 3\cdot 4c_4 x^2 + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-2} + n(n+1)c_{n+1}x^{n-1} + \ldots =$$
$$= -c_0 - c_1 x - c_2 x^2 - c_3 x^3 - \ldots - c_{n-2}x^{n-2} - c_{n-1}x^{n-1} - \ldots .$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях уравнения, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
2c_2 &= -c_0,\\
2\cdot 3c_3 &= -c_1,\\
3\cdot 4c_4 &= -c_2,\\
4\cdot 5c_5 &= -c_3,\\
&\ldots\\
(n-1)nc_n &= -c_{n-2},\\
n(n+1)c_{n+1} &= -c_{n-1},\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Решая систему, находим:

$$c_2 = -\frac{c_0}{2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{3\cdot 4} = \frac{c_0}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{c_0}{4!}, \quad \ldots, \quad c_{2n} = (-1)^n \frac{c_0}{(2n)!},$$

$$c_3 = -\frac{c_1}{2\cdot 3} = -\frac{c_1}{3!}, \quad c_5 = -\frac{c_3}{4\cdot 5} = \frac{c_1}{5!}, \quad \ldots, \quad c_{2n+1} = (-1)^n \frac{c_1}{(2n+1)!}.$$

Общее решение задачи имеет вид:

$$y = c_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] +$$

$$+c_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right].$$

Непосредственное интегрирование в данной задаче возможно и приводит к общему решению следующего вида:

$$y = c_0 \cos x + c_1 \sin x.$$

Убедиться в совпадении результатов интегрирования можно, сравнив содержимое квадратных скобок со степенными рядами для $\cos x$ и $\sin x$.

Пример 9.10. Найти решение задачи Коши для уравнения $y'' - 2y' + y = e^x$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = 1.$$

Решение ищем в виде ряда по степеням x:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \ldots + c_n x^n + \ldots .$$

Его производные имеют вид:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots,$$

$$y'' = 2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + 3\cdot 4c_4 x^2 + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \ldots .$$

Из начальных условий находим значения c_0 и c_1:

$$y|_{x=0} = c_0 = 0, \quad y'|_{x=0} = c_1 = 1.$$

Подставив в дифференциальное уравнение y, y', y'' и разложение в ряд e^x, получим:

$$2c_2 + 2\cdot 3c_3 x + 3\cdot 4c_4 x^2 + 4\cdot 5c_5 x^3 + \ldots + (n-1)nc_n x^{n-2} + \ldots -$$

$$-2\left(1+2c_2x+3c_3x^2+4c_4x^3+5c_5x^4+\ldots+nc_nx^{n-1}+\ldots\right)+$$
$$+x+c_2x^2+c_3x^3+c_4x^4+c_5x^5+\ldots+c_nx^n+\ldots=$$
$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях этого равенства, получаем систему уравнений для определения c_2, c_3, …:

$$\begin{aligned}2c_2-2&=1,\\ 2\cdot 3c_3-4c_2+1&=1,\\ 3\cdot 4c_4-2\cdot 3c_3+c_2&=1/2!,\\ 4\cdot 5c_5-2\cdot 4c_4+c_3&=1/3!,\\ 5\cdot 6c_6-2\cdot 5c_5+c_4&=1/4!,\\ &\ldots\end{aligned}$$

Решая эту систему, находим:

$$c_2=\frac{3}{2},\quad c_3=1,\quad c_4=\frac{5}{12},\quad c_5=\frac{1}{8},\ \ldots$$

и частное решение уравнения:

$$y=x+\frac{3}{2}x^2+x^3+\frac{5}{12}x^4+\frac{1}{8}x^5+\ldots.$$

Решая это уравнение как линейное неоднородное с постоянными коэффициентами при тех же начальных условиях, найдем

$$y=xe^x+\frac{1}{2}x^2e^x.$$

Подставив в последнее выражение разложение функции e^x в степенной ряд, получим:

$$y=x+\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{2}\right)x^3+\left(\frac{1}{3!}+\frac{1}{2\cdot 2!}\right)x^4+\left(\frac{1}{4!}+\frac{1}{2\cdot 3!}\right)x^5+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{(n-1)!}+\frac{1}{2\cdot(n-2)!}\right)x^n+\ldots,$$

т.е. тот же результат.

<u>**Пример 9.11**</u>. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения:

$$y'=x^2+y^2$$

при начальном условии
$$y|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Решение будем искать в виде ряда Маклорена:
$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots .$$
Выражения для производных y'', y''', ... найдем, дифференцируя исходное уравнение:
$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'', \quad y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy'''.$$
Вычислим значения $y(x)$ и производных, входящих в формулу Маклорена, при $x = 0$:
$$y(0) = \frac{1}{2} \quad \text{(из начального условия)},$$
$$y'(0) = 0 + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad \text{(из уравнения)}.$$
Далее последовательно:
$$y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$
$$y'''(0) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{8},$$
$$y^{(4)}(0) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{8} = \frac{11}{4}.$$
Подставив эти значения в формулу Маклорена, получим:
$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \ldots .$$
Интегрировать дифференциальное уравнение в этом примере непосредственно мы не можем, поэтому полученное решение, записанное в виде степенного ряда, – единственно возможное.

Решить самостоятельно

Вычислить:

1) $\sqrt{15}$ с точностью до 10^{-3};
2) $\sqrt[3]{9}$ с точностью до 10^{-3};

3) $\sin 15^o$ с точностью до 10^{-4};

4) $\operatorname{arctg} 0{,}1$ с точностью до 10^{-4};

5) $\ln 3$ с точностью до 10^{-6};

6) $\ln 10$ с точностью до 10^{-6}.

С точностью до 10^{-4} вычислить интегралы:

7) $\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin 2x}{x}\,dx$;

8) $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{1+x^4}\,dx$;

9) $\int\limits_0^{1} e^{-x^2} dx$.

Найти с помощью рядов решение задачи Коши:

10) $xy'' + 2y' + x^2 y = 0$, $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$;

11) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, $y|_{x=0} = 0$.

Найти общее решение дифференциального уравнения с помощью рядов:

12) $y'' + xy = 0$.

Найти несколько первых членов разложения в ряд решения задачи Коши:

13) $y' = y^2 + x^3$, $y|_{x=0} = 1/2$;

14) $y'' = 2yy'$, $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 1$.

Ответы

1) 3,873;

2) 2,080;

3) 0,2588;

4) 0,0997;

5) 1,098612;

6) 2,302585;

7) 0,4931;

8) 0,3337;

9) 0,7468;

10) $y = 1 - \frac{2}{4!}x^3 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^6 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^9 + \ldots$;

11) $y = x^2 - \dfrac{x^4}{1!} + \dfrac{x^6}{2!} - \dfrac{x^8}{3!} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n}}{(n-1)!} + \ldots;$

12)
$$y = c_0\left(1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 4}{6!}x^6 - \frac{1\cdot 4\cdot 7}{9!}x^9 + \ldots\right) +$$
$$+ c_1 x\left(1 - \frac{2}{4!}x^3 + \frac{2\cdot 5}{7!}x^6 - \frac{2\cdot 5\cdot 8}{10!}x^9 + \ldots\right);$$

13) $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 + \dfrac{9}{32}x^4 + \ldots;$

14) $y = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + \ldots, \quad |x| < \dfrac{\pi}{2},$ решение: $y = \mathrm{tg}\, x$.

Литература

Основная

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1980.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1981, 1971.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1 и 2. М.: Высшая школа, 1980.

Дополнительная

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Т. 1 и 2. М.: Наука, 1973.

2. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. Т. 1 и 2. М.: Высшая школа, 1973.

3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1969.

СОДЕРЖАНИЕ