МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Е.А. Елтаренко, Е.К. Крупинова

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия

Москва 1982

УДК 65.012.16:519.24

Елтаренко Е. А., Крупинова Е. К. **Обработка экспертных оценок.** Учебное пособие. – М.: Изд. МИФИ, 1982, 96 с.

Описываются экспертные методы измерения сложных свойств на конечном множестве объектов, процедуры обработки экспертных данных, которые унифицированы для разных экспертных методов и ориентированы на использование ЭВМ. Значительное место отводится вопросам оценки достоверности результатов экспертизы через согласованность экспертов и устойчивость групповых оценок.

Пособие рассчитано на студентов, аспирантов, инженерно-технических работников, специализирующихся в области системного анализа, а также использующих экспертные методы в других областях.

Рецензенты: канд. техн. наук В.Д. Добров,
канд. техн. наук Н.В. Максимов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Широкое применение количественных методов в инженерной и управленческой деятельности требует количественного измерения весьма специфических свойств некоторых объектов. Например, измерение качества различных видов продукции, важности единичных критериев, используемых при оценке качества, измерение эффективности различных вариантов решения конструкторских задач, полезности отдельных НИР в целевых научно-технических программах и т.д. В приведенных примерах измеряемыми свойствами являются "качество", "важность", "эффективность", "полезность", а объектами-носителями этих свойств выступают соответственно виды продукции, единичные критерии, варианты решения конструкторских задач, НИР.

Для измерения этих и им подобных свойств должны использоваться специалисты-эксперты. При этом эксперт выступает в роли своего рода "прибора" для измерения рассматриваемого свойства.

Следует отметить, что экспертные методы занимают особое место в методологии подготовки и анализа решений, так как в практических задачах эксперты часто являются единственным источником информации или средством измерения сложных свойств. Экспертные методы заключаются в получении и обобщении мнений группы экспертов. При этом главными задачами являются сбор информации от экспертов и статистическая ее обработка.

В пособии рассматриваются наряду с вопросами обработки экспертных данных и процедуры проведения экспертного опроса.

Для изучения пособия необходимы знания элементов теории измерений [1], а также основных понятий математической статистики [2, 3].

1. ЭКСПЕРТНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ СЛОЖНЫХ СВОЙСТВ

Математическая постановка задачи измерения сформулирована в [1]. Остановимся лишь на содержательной постановке задачи экспертного измерения свойств на множестве объектов.

Эксперту формулируется измеряемое свойство (или это важность единичных критериев, или полезность НИР) и указывается конечное множество объектов ($O_1, \ldots, O_j, \ldots, O_n$), которые следует оценить с точки зрения измеряемого свойства. Он должен на основе своего опыта и знаний проставить оценки уровня проявления свойства у предложенных объектов $(m(O_1), \ldots, m(O_j), \ldots, m(O_n))$.

Как правило, рассматриваемое свойство не тривиально (именно в этих случаях используются экспертные методы), и эксперт затрудняется проставить оценки объектов. Поэтому для того, чтобы облегчить работу эксперта по оценке объектов, ему предлагается производить оценивание объектов по некоторой процедуре. Каждая такая процедура и составляет основу одного экспертного метода оценки сложных объектов.

Следует подчеркнуть, что при постановке задачи измерения сложного свойства, исходя из последующего использования результатов измерения, необходимо установить по какой шкале измерить это свойство. Это следующие четыре типа шкал [1]: а) шкала классификации (номинальная шкала); б) шкала порядков; в) шкала интервалов; г) шкала отношений.

После этого следует выбрать экспертный метод, который обеспечивает измерение свойства в требуемой шкале.

Метод классификации

Как видно из названия этого метода, он позволяет произвести оценку объектов по шкале классификации. Эксперт должен отнести каждый объект к одному из сформулированных классов ($k = 1, 2, \ldots, S$). Шкальными значениями в этом методе являются номера классов, но для дальнейшего изложения результаты оценки одним экспертом объектов по методу классификации будем представлять в виде бинарной матрицы $\|x^i_{jk}\|$ ($x^i_{jk} = 1$, если эксперт i отнес объект j к классу k, и $x^i_{jk} = 0$ – в противном случае).

Следует отметить, что личные шкалы измерений экспертов при использовании этого метода совпадают. В этой связи следует подчеркнуть, что в экспертных методах, в которых личные шкалы экспертов совпадают, эксперты могут оценивать только часть объектов, которые они лучше знают. Поэтому при использовании метода классификации эксперту разрешается оценивать только часть объектов.

Примером использования метода классификации является проведение анкетного опроса по вопросам, на каждый из которых дается веер ответов. При этом эксперт должен указать ответ, который он считает правильным.

Иногда в качестве классов проявления свойства указываются его уровни. Например, при измерении влияния единичных показателей на качество указываются уровни "сильно влияет", "влияет умеренно", "слабо влияет". Эксперту предлагается отнести каждый единичный показатель к одному из таких классов. В этом случае необходимо, чтобы перечисленные классы уровня влияния были подробно описаны. Иначе эксперты по-разному будут интерпретировать содержание уровней "сильно влияет", "влияет умеренно", "слабо влияет".

Методы оценки объектов по шкале порядков

Метод ранжирования. Эксперту предлагается упорядочить объекты по уровню проявления измеряемого свойства. При этом, кроме отношения порядка между объектами, могут устанавливаться и отношения эквивалентности. Например, семь объектов упорядочены следующим образом: $O_3 > O_1 \approx O_4 \approx O_5 > O_2 \approx O_7 > O_6$.

В качестве шкальных значений, именуемых рангами, используются числа натурального ряда, причем объекту с наибольшим проявлением свойства присваивается ранг, равный единице. Таким образом, ранг объекта обозначает его порядковый номер в упорядоченном ряду. Так, в приведенном выше примере объекту O_3 соответствует ранг 1, а объекту O_6 – ранг 7.

Если между несколькими объектами при их оценке установлено отношение эквивалентности (в приведенном примере это подмножества $\{O_1, O_4, O_5\}$ и $\{O_2, O_7\}$), то имеют место связанные ранги для объектов, входящих в классы эквивалентности. Значения связанных рангов определяются как среднее из чисел, характеризующих места эквивалентных объектов в упорядоченном ряду. Так, связанный ранг объектов O_1, O_4 и O_5 будет равен $\frac{2+3+4}{3} = 3$, а связанные ранги O_2 и O_7 равны $\frac{5+6}{2} = 5{,}5$.

Ранг, присвоенный экспертом i объекту j, будем обозначать R^i_j.

Отметим также, что при использовании метода ранжирования эксперты должны оценивать обязательно все объекты, иначе личные шкалы экспертов нельзя свести к единой шкале и обработку результатов опроса не представляется возможным провести.

Метод попарного сравнения. Эксперт должен попарно сравнивать объекты и выявлять из двух объектов тот, у которого уровень проявле-

УДК 65.012.16:519.24

Е л т а р е н к о Е. А., К р у п и н о в а Е. К. **Обработка экспертных оценок.** Учебное пособие. М.: Изд. МИФИ, 1982, 96 с.

Описываются экспертные методы измерения сложных свойств на конечном множестве объектов, процедуры обработки экспертных данных, которые унифицированы для разных экспертных методов и ориентированы на использование ЭВМ. Значительное место отводится вопросам оценки достоверности результатов экспертизы через согласованность экспертов и устойчивость групповых оценок.

Пособие рассчитано на студентов, аспирантов, инженерно-технических работников, специализирующихся в области системного анализа, а также использующих экспертные методы в других областях.

Рецензенты: канд. техн. наук В.Д. Добров,
канд. техн. наук Н.В. Максимов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Широкое применение количественных методов в инженерной и управленческой деятельности требует количественного измерения весьма специфических свойств некоторых объектов. Например, измерение качества различных видов продукции, важности единичных критериев, используемых при оценке качества, измерение эффективности различных вариантов решения конструкторских задач, полезности отдельных НИР в целевых научно-технических программах и т.д. В приведенных примерах измеряемыми свойствами являются "качество", "важность", "эффективность", "полезность", а объектами-носителями этих свойств выступают соответственно виды продукции, единичные критерии, варианты решения конструкторских задач, НИР.

Для измерения этих и им подобных свойств должны использоваться специалисты-эксперты. При этом эксперт выступает в роли своего рода "прибора" для измерения рассматриваемого свойства.

Следует отметить, что экспертные методы занимают особое место в методологии подготовки и анализа решений, так как в практических задачах эксперты часто являются единственным источником информации или средством измерения сложных свойств. Экспертные методы заключаются в получении и обобщении мнений группы экспертов. При этом главными задачами являются сбор информации от экспертов и статистическая ее обработка.

В пособии рассматриваются наряду с вопросами обработки экспертных данных и процедуры проведения экспертного опроса.

Для изучения пособия необходимы знания элементов теории измерений [1], а также основных понятий математической статистики [2, 3].

ния измеряемого свойства выше. Результаты попарного сравнения объектов заносятся в таблицу (матрицу) $\| \delta^i_{jk} \|$ размерности $n \times n$. Причем δ^i_{jk} = 1, если эксперт i указал, что уровень проявления свойства у объекта j выше, чем у объекта k, δ^i_{jk} = 0 в противном случае, и δ^i_{jk} = = 1/2, если эксперт i считает, что уровни проявления свойства у объектов j и k одинаковы.

Сумма δ^i_{jk} и δ^i_{kj} должна быть равна 1, т.е. если эксперт считает, что уровень проявления свойства у объекта j выше, чем у объекта k (δ^i_{jk} = = 1), то, естественно, что при сравнении объекта k с объектом j должно быть δ^i_{kj} = 0.

Учитывая вышесказанное, эксперта обычно просят заполнить только одну половину матрицы $\| \delta^i_{jk} \|$ (рис. 1), а вторая часть заполняется исходя из правила: $\delta^i_{jk} + \delta^i_{kj} = 1$.

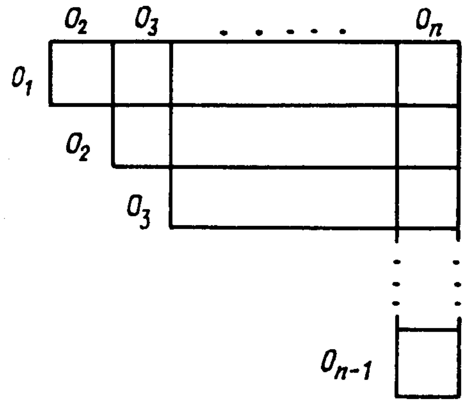


Рис. 1. Полуматрица попарного сравнения объектов для опроса экспертов

При использовании метода попарного сравнения, так же как и в методе ранжирования, эксперты должны оценивать все объекты.

Методы оценки объектов по шкале отношений

Метод нормирования. Эксперту предлагается оценить объекты по заданной шкале, например, по шкале от нуля до единицы или от нуля до десяти. Нижняя граница шкалы обязательно должна быть равна нулю. Для облегчения работы эксперта по оценке объектов процедуру присвоения оценок целесообразно упорядочить. Сначала эксперту предлагается упорядочить объекты по мере возрастания уровня проявления измеряемого свойства, например, $O_1 > O_3 \approx O_5 > O_2 > O_6 > O_4$. Затем эксперт

должен установить отношение между некоторыми тройками объектов (установить трехместные отношения), например,

$$O_2 \oplus O_6 \approx O_1$$

(запись означает, что суммарное проявление свойства у объектов O_2 и O_6 равнозначно проявлению свойства у объекта O_1)

$$O_2 \oplus O_4 \approx O_3$$
$$O_5 \oplus O_6 > O_1;$$
$$O_3 \oplus O_6 > O_1.$$

После этого присвоить объекту с максимальным уровнем проявления свойства, в нашем примере это объект O_1, максимальную оценку: $m(O_1)$ = 1. Следующим по порядку объектам проставить оценки, сравнивая их с объектом O_1, и с учетом установленных трехместных отношений. Для рассмотренного примера оценками объектов могут быть следующие:

$$m(O_1) = \rho_1 = 1{,}0; \quad m(O_3) = \rho_3 = 0{,}8; \quad m(O_5) = \rho_5 = 0{,}8;$$

$$m(O_2) = \rho_2 = 0{,}55; \quad m(O_6) = \rho_6 = 0{,}45; \quad m(O_4) = \rho_4 = 0{,}25.$$

Приведенное трехместное отношение, называемое операцией аддитивности, в некоторых случаях плохо интерпретируется при сравнении объектов. В этих случаях можно рекомендовать для установления отношений между объектами использовать расстояния:

$$O_1 \ominus O_3 \approx O_6 \ominus O_4;$$
$$O_3 \ominus O_2 > O_6 \ominus O_4.$$

Следует подчеркнуть, что каждый эксперт i будет давать оценки объектов $\rho^i_1, \ldots, \rho^i_n$ в личной шкале измерения. Одним из возможных путей перехода от личных шкал к единой является нормирование оценок каждого эксперта (отсюда и название метода) по формуле:

$$W^i_j = \frac{\rho^i_j}{\sum_{k=1}^{n} \rho^i_k}.$$

В этом случае при использовании метода нормирования эксперт должен оценить все объекты.

Для того чтобы все эксперты давали оценки в единой шкале, необходимо задать объект-эталон ($O_э$), по отношению к которому эксперты должны оценивать все другие объекты. При этом задается шкальное значение объекта-эталона, например, $m(O_э) = 1{,}0$.

Если требуется измерить свойство по шкале интервалов, то необходимо задать два объекта-эталона и соответствующие им шкальные значения. В этом случае оценки объектов могут принимать и отрицательные значения.

Отметим, что если при опросе экспертов задан один (или два) объект-эталон, то нормировать оценки объектов не надо и эксперты могут оценивать не все объекты.

Метод парных сравнений. Так же как и в методе попарного сравнения, основанного на шкале порядков, в этом методе эксперт должен заполнить квадратную матрицу $\| b^i_{jk} \|$ размерности $n \times n$, проставляя в ней относительную оценку уровней проявление свойства у объектов O_j и O_k.

Для облегчения работы эксперта ему сначала предлагается оценить объекты по методу попарного сравнения, т.е. заполнить матрицу $\| \delta^i_{jk} \|$, а затем вместо единичек (и нулей) в ней поставить величину, характеризующую, во сколько раз уровень проявления измеряемого свойства у объекта j выше (ниже), чем у объекта k. При этом должны выполняться следующие соотношения между элементами матриц $\| b^i_{jk} \|$ и $\| \delta^i_{jk} \|$:

$$\text{если } b^i_{jk} > 1, \text{ то } \delta^i_{jk} = 1;$$
$$\text{если } b^i_{jk} < 1, \text{ то } \delta^i_{jk} = 0;$$
$$\text{если } b^i_{jk} = 1, \text{ то } \delta^i_{jk} = 1/2.$$

В этом методе каждый эксперт должен дать оценки всех объектов.

Выбор экспертного метода для измерения изучаемого сложного свойства зависит от поставленной задачи. Если требуется измерить свойство по шкале порядков, то следует использовать методы ранжирования или попарного сравнения, обеспечивающие оценку объектов по шкале порядков. Если же требуется измерить свойство по шкале отношений, то следует использовать метод нормирования или парных сравнений.

Методы попарного сравнения и парных сравнений выгодно отличаются от методов ранжирования и нормирования соответственно, так как они позволяют проконтролировать работу экспертов, выявить ошибки в их оценках. Вопросы анализа оценок экспертов по этим методам рассмотрены в п. 6. Однако при большом числе объектов ($n > 8 \div 10$) использование методов попарного сравнения затруднительно, так как эксперту приходится заполнять очень большую матрицу.

Поэтому при большом числе объектов следует использовать методы ранжирования и нормирования. И даже при использовании этих методов число оцениваемых объектов не должно превышать $15 \div 20$.

Если требуется оценить очень большое число объектов, то необходимо их разбить на несколько пересекающихся подмножеств, в каждом из которых должно быть не более $15 \div 20$ объектов. А затем произвести оценку объектов каждого подмножества по единой шкале, т.е. с использованием метода нормирования, задавая объекты-эталоны, или метода классификации.

2.ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРТИЗЫ ПО ИЗМЕРЕНИЮ СЛОЖНЫХ СВОЙСТВ

Проведение экспертизы включает три этапа:

1) отбор и формирование экспертной группы; 2) проведение опроса; 3) обработка результатов опроса, их анализ.

Остановимся на каждом из этих этапов.

Отбор и формирование экспертной группы

Этот этап является одним из наиболее важных и ответственных в проведении экспертизы. От качества подбора экспертов во многом зависит успех экспертизы. На этом этапе решаются два вопроса: 1) сколько экспертов привлечь к экспертизе? 2) каково качество экспертов? Необходимое число экспертов определяется несколькими факторами, основными из которых являются следующие.

Требуемая достоверность результатов экспертизы. Чем больше экспертная группа, тем более достоверные могут быть получены результаты. Однако надо иметь в виду, что привлечение слишком большого числа экспертов, особенно если отсутствует процедура тщательного их отбора, тоже нежелательно. В этом случае оценки каждого отдельного эксперта очень слабо влияют на групповые оценки, поэтому оценки нескольких действительно компетентных экспертов растворятся во множество оценок малокомпетентных экспертов. В результате групповые оценкн будут искажены.

Вторым фактором, определяющим количество экспертов, является наличие ресурсов (времени, затрат) на проведение экспертизы. Чем больше экспертная группа, тем больше времени затрачивается на подбор и на опрос экспертов.

Наконец, количество экспертов зависит и от их качества. Если имеется несколько высококвалифицированных экспертов (а может быть и только один), то не имеет смысла значительно увеличивать экспертную группу.

С учетом вышесказанного экспертная группа должна включать от 5 до 15 человек. При уменьшении численности экспертной группы до 2 – 4 человек не всегда возможно проведение статистического анализа результатов опроса экспертов, и тогда приходится ограничиваться только качественным анализом.

Качество экспертов также определяется несколькими факторами. В первую очередь, конечно, их компетентностью по рассматриваемой проблеме. Ниже будут изложены методы оценки компетентности экспертов.

Важным фактором качества эксперта является его отношение к задаче, решаемой экспертизой. Необходимо привлекать к опросу тех экспертов, которые заинтересованы в результатах экспертизы. Вместе с тем необходимо, чтобы цели, которые преследуют эксперты, участвуя в данной экспертизе, совпадали с общей целью экспертизы.

Кроме того, при оценке качества экспертов необходимо учитывать их деловые качества, занятость.

Рассмотрим вопрос оценки компетентности экспертов. Эти оценки желательно иметь с тем, чтобы в разной степени учитывать личные оценки экспертов при определении групповых оценок объектов.

Существует несколько подходов к оценке компетентности [4]. Во-первых, организаторы экспертизы могут на основе прошлого опыта участия эксперта в различных экспертизах давать оценку его компетентности.

Другим методом оценки компетентности экспертов является их тестирование. Для этого разрабатывается специальная тест-анкета. Отвечая на вопросы теста, эксперт должен показать свои знания объекта исследования, аналитические способности. Следует отметить, что разработка анкеты-теста является сложной и трудоемкой процедурой, поэтому этот метод оценки компетентности оправдывает себя только в тех случаях, когда для экспертизы привлекается большое число экспертов (больше 30). В некоторых случаях можно предложить экспертам произвести самооценку компетентности по некоторой шкале, например, от 2 до 5.

В тех случаях, когда эксперты знакомы с деятельностью друг друга, знают уровень компетентности друг друга, можно использовать метод взаимной оценки компетентности. Для этого каждого эксперта i ($i = 1, 2, \ldots, m$) просят оценить компетентность других экспертов $\ell = 1, 2, \ldots, m$ $(\ell \neq i)$ по некоторой шкале, например, от 1 до 5. Взаимные оценки компетентности представляются в виде квадратной матрицы $\| b_{\ell i} \|$, столбцом i которой являются оценки, данные i экспертом всем другим экспертам. Диагональные элементы в b_{ii} принимаются одинаковыми для всех $i = 1, 2, \ldots m$ и равными любому неотрицательному числу (обычно $b_{ii} = 0$). Вектор коэффициентов компетентности экспертов $\bar{K} = \{K^1, K^2, \ldots, K^i, \ldots, K^m\}$ определяется решением следующего векторного уравнения [5]:

$$\lambda(\bar{K}) = \| b_{\ell i} \| \bar{K},$$

т.е. является собственным вектором матрицы $\| b_{\ell i} \|$ (λ – максимальное действительное собственное число матрицы $\| b_{\ell i} \|$).

По данным взаимной оценки компетентности экспертов можно выявить конфронтацию между экспертами, коалиции экспертов. Если такая конфронтация имеет место, то это исказит действительную компетентность экспертов. Поэтому в этих случаях метод взаимной оценки компетентности использовать не целесообразно.

Перечисленные выше методы оценки компетентности являются "внешними" по отношению к проводимой экспертизе, т.е. результаты оценки компетентности ($K^1, \ldots\ldots, K^m$) по ним являются входной информацией для обработки результатов экспертного опроса в данной экспертизе.

Но можно осуществлять оценку компетентности экспертов и по его оценкам объектов в данной экспертизе. Суть такого подхода заключается в том, что эксперты, которые дали противоречивые оценки объектов, получают низкие оценки своей компетентности и, соответственно, их оценки в меньшей степени учитываются при определении групповых оценок. Если же оценки эксперта близки к групповым, то компетентность такого эксперта принимается выше, чем эксперта, оценки которого сильно отличаются от групповых оценок.

Такую "внутреннюю" оценку компетентности экспертов можно произвести при использовании не всех экспертных методов оценки сложных объектов. В разделах, посвященных статистической обработке экспертных оценок, будут рассматриваться вопросы оценки компетентности экспертов по их оценкам объектов.

Проведение опроса

Прежде всего необходимо выбрать форму опроса экспертов. Для задач измерения сложных свойств рекомендуется использовать: а) анкетирование; б) интервьюирование.

Отличительной особенностью анкетирования является самостоятельная работа эксперта по оценке предложенных в анкете объектов.

При интервьюировании организатор экспертизы (аналитик) непосредственно контактирует с экспертом при оценке им объектов, перечисленных в анкете.

Преимуществом анкетирования является его простота, возможность привлечь большое число экспертов, так как анкеты пересылаются, как правило, по почте. Однако анкетирование можно использовать только в тех случаях, когда анкета апробирована и значит нет опасности, что вопросы анкеты могут быть экспертами неправильно истолкованы.

Интервьюирование позволяет проконтролировать работу эксперта, заметить неточности в анкете и устранить их. Однако при интервьюировании могут возникнуть нежелательные искажения мнения эксперта вследствие психологического воздействия аналитика на опрашиваемого. Кроме этого, интервьюирование требует больших затрат труда и времени со стороны организаторов экспертизы.

Для составления и апробации анкеты целесообразно использовать форму опроса в виде дискуссии, когда эксперты находятся в одном помещении и открыто высказывают свои мнения. Дискуссия также организуется и для обсуждения результатов экспертизы.

Одним из наиболее эффективных методов опроса экспертов является метод "Дельфы", при котором анкетирование производится в несколько туров с обработкой результатов после каждого тура и информированием экспертов об этих результатах.

Практика показывает, что достаточно провести четыре тура для получения согласованных оценок экспертов. Перед каждым последующим туром всем экспертам сообщаются групповые оценки объектов и крайние оценки, и их просят пересмотреть и при желании исправить свои предыдущие оценки. Если оценка какого-либо эксперта сильно отличается от оценок большинства, то его просят аргументировать свои оценки. Эта аргументация доводится до сведения всех экспертов.

Наиболее целесообразно проводить опрос экспертов по методу "Дельфы" с применением ЭВМ, с которой каждый из экспертов связан дисплеем. За одним дисплеем находится организатор экспертизы. ЭВМ обеспечивает выдачу анкеты экспертам на дисплеи, сбор их оценок, обработку результатов опроса. Одновременно ЭВМ обеспечивает оперативную связь организатора экспертизы с любым экспертом.

При проведении опроса по метому "Дельфы" требуется провести некоторую подготовительную работу по определению цели экспертизы и формы анкеты. Однако анкету можно уточнить, дополнить в результате первого тура опроса экспертов. Поэтому в первом туре, используя оперативную связь с экспертами, организатор экспертизы уточняет множество объектов для последующего их оценивания.

Во втором туре эксперты оценивают объекты по указанному методу (ранжирования, нормирования и т.д.). После сбора и обработки экспертных данных организатор экспертизы просматривает на экране дисплея результаты, выявляет экспертов, мнение которых значительно отличается от группового. После этого он просит их аргументировать свои оценки, используя экраны дисплея. Полученные аргументации организатор сам

просматривает и доводит до сведения всех экспертов, вместе с групповыми оценками.

В следующем туре эксперты на основе выданной им информации пересматривают свои оценки.

Процесс опроса производится до тех пор, пока оценки экспертов не будут достаточно согласованы.

Обработка результатов опроса, их анализ

Обработка результатов опроса может быть количественной и качественной. После проведения опроса необходимо произвести их статистическую обработку, которая включает несколько этапов, подробно рассмотренных в п. 3.

Результаты статистической обработки должны анализироваться. Если групповые оценки объектов оказались недостоверны с точки зрения вычисленных статистик, то необходимо выяснить причины неудачной экспертизы. Наиболее типичными причинами неудачной экспертизы являются:

1) недостатки в подборе экспертов. Эксперты недобросовестно отнеслись к экспертизе. Их цели не совпадают с целями экспертизы;

2) существует несколько несовпадающих точек зрения на изучаемую проблему. Для выявления различных точек зрения необходимо попытаться сгруппировать экспертов по близости их оценок. Если такие группы получаются, то следует производить статистическую обработку по каждой группе отдельно;

3) неточная формулировка измеряемого свойства (вопроса) в анкете, которая допускает различную его интерпретацию. Например, вопрос в анкете сформулирован следующим образом: "Оцените влияние на качество изделия следующих его параметров по методу ранжирования". Из этой формулировки не ясно: оценивать ли влияние с точки зрения повышения качества изделия или уменьшения качества. Поэтому одни эксперты могут поставить на первое место наиболее важный параметр, другие – наименее важный. Из-за этого не получится согласованной групповой оценки объектов;

4) среди оцениваемых объектов есть малоизвестные экспертам объекты. Малая согласованность оценок экспертов по этим объектам не позволяет считать достоверными групповые оценки всех объектов. В этом случае необходимо исключить оценки этих объектов и произвести статистическую обработку вновь.

Помимо статистической обработки необходимо осуществлять качественный анализ как исходных экспертных оценок, так и результатов обработки. К качественному анализу необходимо привлекать заказчика на проведение экспертизы, а также других специалистов.

3. ЭТАПЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Безотносительно к использованному при опросе методу оценки объектов процедура статистической обработки экспертных данных включает три этапа: 1) анализ оценок каждого эксперта; 2) определение групповых оценок объектов; 3) оценка достоверности групповых оценок.
В некоторых случаях для содержательного анализа результатов экспертизы требуется дополнительно провести этап группирования экспертов по близости их оценок. Рассмотрим подробнее содержание перечисленных этапов.

Анализ оценок каждого эксперта

Целью проведения этого этапа является проверка правильности проставления оценок экспертами. Например, в методе классификации этот этап заключается в проверке условия:

$$\sum_{k=1}^{s} x_{jk}^{i} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

т.е. эксперт должен отнести каждый объект только к одному классу.

В методе ранжирования проверяется правильность вычисления связанных рангов. В методе попарного сравнения на этом этапе проверяется выполнение свойства транзитивности эмпирического бинарного отношения предпочтения и т.д.

В некоторых методах на основе анализа оценок эксперта можно их откорректировать без его участия. В других методах произвести такое исправление без эксперта не представляется возможным. Тогда ошибочные оценки исключаются из рассмотрения или вводятся коэффициенты, учитывающие количество обнаруженных ошибок в оценках эксперта, которые служат характеристикой компетентности этого эксперта.

Определение групповых оценок

Этот этап является основным во всей процедуре обработки экспертных оценок. В результате его проведения на основе личных оценок всей совокупности экспертов вычисляются групповые оценки, характеризующие уровень проявления измеряемого свойства у объектов.

Следует подчеркнуть, что для вычисления групповых оценок должны использоваться только адекватные статистики. Для шкалы классификации (и, соответственно, метода классификации) – это мода распределения личных оченок экспертов. Для шкалы порядков – это мода или медиана распределения. Для шкал интервалов и отношений обычно используется среднее личных оченок экспертов.

Групповые оценки получаются в той же шкале, в которой эксперты оценивали объекты. Только в случае, когда число экспертов большое (больше 15 – 20), по личным оценкам экспертов по шкале порядков можно определить групповые оценки объектов по шкале отношений или интервалов. В этом случае количество экспертов переходит в качество групповых оценок, от менее информативной шкалы порядков переходят к более информативной шкале отношений или интервалов.

Если имеются оценки компетентности экспертов, их необходимо использовать при определении групповых оценок. Порядок их использования зависит от конкретного экспертного метода.

Оценка достоверности групповых оценок

Чтобы использовать в практике вычисленные на втором этапе групповые оценки, необходимо оценить их достоверность (надежность). Понятие достоверность групповых оценок можно определить различными способами. Чаще всего понятие достоверности групповых оценок отождествляется с понятием согласованности экспертных оценок или с понятием устойчивости групповых оценок. Остановимся на этих двух определениях достоверности.

Согласованность экспертов (их оценок). Считается, что групповые оценки объектов достоверны, если между личными оценками экспертов наблюдается большая согласованность. Количественно степень согласованности экспертов определяется коэффициентом согласия (E), являющимся разновидностью коэффициента множественной корреляции. Коэффициент согласия вычисляется по формуле:

$$E = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} R_{il}, \tag{1}$$

где m – число экспертов; R_{il} – коэффициент корреляции оценок i и l экспертов. При использовании коэффициента E для определения степени согласованности в методах, основанных на шкалах наименования и порядка, можно возразить, что этот коэффициент не является ни адекватной, ни инвариантной статистикой для этих шкал. Но дело в том, что из всех эквивалентных шкал классификаций и порядка в методах классификации, ранжирования, попарного сравнения выбраны определенные, в которых вычисляются групповые оценки, и в этих же шкалах интерпротируется коэффициент согласия. Так как коэффициент согласия не характеризует уровни проявления свойств у изучаемых объектов, а является лишь только характеристикой согласованности экспертов, то несмотря на то, что он не является адекватной статистикой для шкал наименований порядка, его можно использовать для оценки достоверности групповых оценок.

Верхний предел коэффициента E равен 1 и соответствует случаю, когда у всех экспертов оценки объектов совпадают $R_{il} = 1$ (полное согласование экспертов). Нижний предел равен нулю. Покажем это:

$$E=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}R_{il}=\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\frac{\sum_{j=1}^{N}(y_j^i-\bar{y}^i)(y_j^l-\bar{y}^l)}{S_i S_l (N-1)},$$

где N – количество оценок, данных одним экспертом; $\bar{y}^i$, $\bar{y}^l$ – средние рядов y_j^i и $y_j^l (j=1,2,\dots,Я)$ я); S_i, S_l – среднеквадратические отклонения рядов y_j^i, y_j^l;

$$E=\frac{1}{m^2(N-1)}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{y_j^i-\bar{y}^i}{S_i}\right)\left(\frac{y_j^l-\bar{y}^l}{S_l}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{m^2(N-1)}\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{y_j^i-\bar{y}^i}{S_i}\right)^2\geq 0. \qquad (2)$$

По величине E судят о степени согласованности экспертов в проведенной экспертизе.

После вычисления коэффициента согласия он проверяется на значимость, т.е. проверяется гипотеза о случайности получения данного значения E. Эту гипотизу можно интерпретировать также как независимость оценок экспертов или случайность проставления экспертами своих оценок.

Проверка этой гипотезы осуществляется по процедуре статистической проверки гипотез [2].

Значение коэффициента согласия и результат его проверки на значимость используются для анализа достоверности групповых оценок при небольшом числе экспертов ($m \leqslant 15$). При большом количестве экспертов коэффициент согласия обычно уменьшается и в то же время он оказывается значим. Это происходит потому, что при большом числе экспертов с большой вероятностью найдутся несколько экспертов, мнение которых согласуется, и это приведет к тому, что гипотеза о независимости мнений экспертов будет отвергнута. Поэтому при большом числе экспертов для оценки достоверности наряду с согласованностью следует использовать понятие устойчивости групповых оценок.

Устойчивость групповых оценок объектов определяется как независимость групповых оценок от состава экспертной группы, т.е групповая оценка объекта j устойчива, если она не изменяется при исключении некоторого числа экспертов из экспертной группы. Например, если в методе ранжирования все эксперты присвоили объекту один и тот же ранг, то при исключении любого числа экспертов групповой ранг не изменится. Если же не все эксперты присвоили ему одинаковый ранг, то при исключении некоторых экспертов групповой ранг может измениться.

Таким образом, устойчивость есть вероятностная величина. Задавая величину пороговой вероятности $P_j^n(m_y)$, с которой групповая оценка объекта j не изменится при исключении заданного m_y или меньшего числа экспертов из экспертной группы, и сравнивая ее с фактической вероятностью, судят о достоверности групповой оценки объекта j. Очевидно, чем больше величина пороговой вероятности P_j и больше m_y, тем более достоверной следует считать групповую оценку объекта j.

Чтобы осуществить оценку устойчивости групповой оценки объекта j, необходимо построить функцию распределения ее неизменности от числа исключаемых экспертов $F_j(m_y)$. И тогда решающим правилом достоверности групповой оценки будет следующее неравенство:

$$F_j(m_y)\geqslant P_j^n(m_y). \qquad (3)$$

Можно также оценивать устойчивость групповых оценок по всей совокупности объектов, указав вероятность $P(m_y)$ сохранения групповых оценок при исключении m_y экспертов.

В методах, основанных на шкале отношений или интервалов, групповые оценки изменяются при исключении какого-либо одного эксперта (за исключением эксперта, оценки которого совпадают с групповыми). Поэтому для этих методов понятие устойчивости рассматривается как неизменность порядка групповых оценок.

Между понятиями устойчивости групповых оценок и согласием экспертов существует качественная связь. Чем больше коэффициент согласия, тем более устойчивы групповые оценки, но эта связь не функциональная (нельзя по значению коэффициента согласия E построить функцию распределения $F(m_y)$. Могут быть ситуации, когда в одной экспертизе коэффициент согласия выше, а устойчивость ниже по сравнению с другой экспертизой.

Группирование оценок экспертов

В случаях, когда групповые оценки объектов оказались недостоверны (т.е. коэффициент согласия оказался незначим или групповые оценки неустойчивы), целесообразно выделить из всей совокупности экспертов некоторую группу, оценки объектов которых близки друг к другу, и групповые оценки в рамках группы будут достоверны.

В некоторых случаях удается выделить не одну такую группу, а несколько, в каждой из которых оценки экспертов близки. Обычно это случается при проведении экспертиз по сложному вопросу, на решение которого существует несколько разных точек зрения. Тогда каждая сформированная группа экспертов отражает одну точку зрения, отличную от других.

Следует отметить, что задача группирования экспертов относится к комбинаторным задачам, поэтому разработать оптимальный алгоритм группирования не удается (оптимальный в списке разбиения всей совокупности экспертов на группы, в каждой из которых оценки экспертов наиболее близки по коэффициенту согласия E и наиболее далеки от оценок экспертов других групп). Поэтому для группирования используются последовательные алгоритмы, суть которых в следующем. Находится пара экспертов, мнение которых ближе всего друг к другу (для этого используется матрица корреляции эксперт-эксперт). Затем из оставшихся $m-2$ экспертов выделяется эксперт, мнение которого ближе всего к группе из двух экспертов. На следующем шаге среди оставшихся $m-3$ экспертов находится эксперт, мнение которого ближе всего к группе из трех экспертов и т.д.

На каждом шаге вычисляется коэффициент согласия сформированной группы экспертов и проверяется его значимость.

Увеличение группы производится до тех пор, пока после присоединения к ней нового эксперта групповые оценки объектов остаются достоверны, по коэффициенту согласия.

После формирования одной группы следует повторить процедуру с оставшимися экспертами, с тем чтобы попытаться сформировать еще одну группу экспертов.

Рассмотрим подробнее алгоритм группирования экспертов по этапам. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 2.

Алгоритм группирования использует данные об оценках объектов экспертами в виде матрицы корреляции личных оценок экспертов, поэтому первым этапом алгоритма является вычисление элементов матрицы корреляции оценок экспертов $\| R_{il} \|$.

Определение пары экспертов (r , p), мнение которых наиболее близко, осуществляется нахождением максимального элемента матрицы корреляции. Индексы максимального по величине элемента определяют номера экспертов r и p.

Так как компактность группы экспертов оценивается значением коэффициента согласия E (см. п. 4), то на этапе 4 необходимо выявить эксперта, при присоединении которого к группе коэффициент E был бы максимален. Учитывая, что коэффициент E является средним коэффициентом корреляции по экспертной группе (1), необходимо выявить эксперта, при присоединении которого к группе значение E максимально. Последнее означает поиск индекса эксперта, для которого сумма коэффициентов корреляции с экспертами сформированной группы (m_q) максимальна.

Для этого необходимо сформировать матрицу размерности $(m-m_q)\times m_q$ исключением из исходной матрицы корреляции строк, соответствующих номерам экспертов, входящих в уже сформированную группу, и столбцов с номерами экспертов, которые не входят в сформированную группу. Затем построчно просуммировать элементы сформированной матрицы:

$$R_i^q = \sum_{l \in m_q} R_{il} .$$

Среднее значение коэффициента корреляции группы из (m_q+1) эксперта после присоединения i -го эксперта будет равно:

$$E_{m_q+1} = \frac{E_{m_q} \cdot m_q^2 + 2R_i^q + 1}{(m_q+1)^2} . \tag{4}$$

Из (4) следует, что E_{m_q+1} максимален при присоединении к группе эксперта, для которого R_i^q максимально.

Определение групповых оценок объектов на каждом шаге не производится, их следует вычислять только после формирования компактной группы.

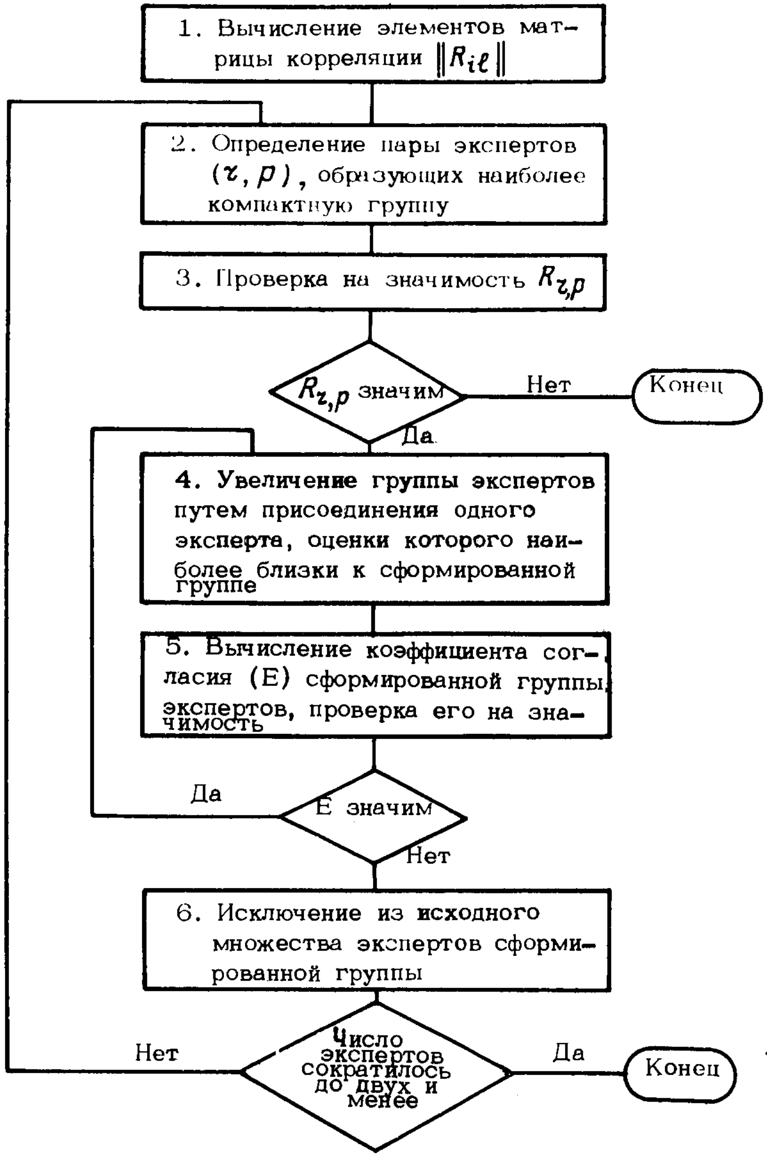


Рис. 2. Блок-схема алгоритма группирования экспертов

Как только на одном из шагов окажется, что при увеличении численности группы групповые оценки не будут достоверны, формирование этой группы заканчивается. После чего из исходного множества экспертов исключаются эксперты сформированной группы, и процедура группирования повторяется, начиная со второго этапа, т.е. делается попытка сформировать еще одну группу экспертов.

Приведенный алгоритм позволяет сгруппировать экспертов по близости их мнений (оценок) в случае, когда в качестве меры близости используется коэффициент согласия, и значит для оценки достоверности используется понятие согласованности экспертов.

Алгоритм одинаков для всех экспертных методов лишь только на этапе 5, при проверке значимости коэффициента согласия используются различные статистики. Поэтому при изложении статистической обработки экспертных оценок в различных методах вопросы группирования экспертов рассматриваться не будут.

4. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК, ПОЛУЧЕННЫХ ПО МЕТОДУ КЛАССИФИКАЦИИ

На шкале наименований основан только один метод экспертных оценок – метод классификации. Для обработки от экспертов поступают данные, представляемые в виде бинарных матриц $\|x^i_{jk}\| \ (i=1,2,\dots,m)$, размерностью $n \times S$, где n – число оцениваемых объектов, S – количество классов (см. описание метода классификации в п.1).

Процедуру обработки экспертных данных рассмотрим по всем перечисленным в п. 3 этапам.

Анализ оценок каждого эксперта

В методе классификации единственным требованием к оценкам объектов является условие отнесения каждого объекта только к одному классу. Это следует из того, что метод основан на теории четких множеств. Формально это условие записывается в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{S} x^i_{jk} = 1 \ (j=1,2,\dots,n,\ i=1,2,\dots,m).$$

Если это условие не выполняется, то необходимо предъявить обнаруженную ошибку эксперту для исправления. Оценку объекта, по которому обнаружена ошибка можно исключить из рассмотрения. Обычно, чтобы таких ошибок не наблюдалось, эксперту предлагается вместо заполнения матрицы $\| x^i_{jk} \|$ при оценке объекта указать номер класса, к которому он относит объект.

Определение групповых оценок объектов

В качестве групповой оценки объекта j в методе классификации используется адекватная статистика. Для шкалы классификации – это мода распределения личных оценок экспертов j объекта. Для определения моды распределения вычисляются величины $x_{jk} = \sum_{i=1}^{m_j} x^i_{jk}$ (m_j – число экспертов, оценивших j объект), которые определяют количество экспертов, отнесших объект j к классу k.

Групповой оценкой объекта j является индекс класса, соответствующий $\max_k x_{jk}$. Другими словами, в методе классификации для определения групповых оценок используется правило большинства: объект j относят к тому классу, к которому отнесло его большинство экспертов.

Если заданы коэффициенты компетентности экспертов $k_1, \dots, k_m$, то x_{jk} вычисляются по формуле:

$$x_{jk} = \sum_{i=1}^{m_j} K_i x^i_{jk} .$$

Групповая оценка в этом случае также определяется по $\max_k x_{jk}$. Бинарную матрицу групповых оценок обозначим через $\| x^r_{jk} \|$.

Анализ достоверности групповых оценок

В методе классификации оценку достоверности можно проводить, используя коэффициент согласия или устойчивость групповых оценок.

Оценка согласованности экспертов. Исходя из общей формулы коэффициента согласия, приведенной в п. 3, выведем выражение для коэффициента, используемого при обработке экспертных оценок в методе классификации. Сначала, выведем формулу для E_j, характеризующего согласованность экспертов по одному объекту j.

Коэффициент корреляции оценок пары экспертов i и ℓ по объекту j равен:

$$R_{i\ell} = \frac{cov(x^i_{jk}, x^\ell_{jk})}{S^i S^\ell} .$$

Среднее

$$\bar{x}^i_{jk} = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{S} x^i_{jk} = \frac{1}{S} . \qquad (5)$$

А среднее квадратическое $S^i = S^\ell$ равно:

$$S^i = \sqrt{\frac{1}{S-1} \sum_{k=1}^{S} \left(x^i_{jk} - \frac{1}{S}\right)^2} .$$

Но так как все значения $x^i_{jk} = 0$, кроме одного $x^i_{jk} = 1$, то

$$S^i_j = \sqrt{\frac{1}{S-1}\left[\left(\frac{1}{S}\right)^2 (S-1) + \left(1-\frac{1}{S}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{S-1}\ \frac{(S-1)+(S-1)^2}{S^2}} = \sqrt{\frac{1}{S}} . \qquad (6)$$

Таким образом,

$$R_{i\ell} = S cov(x^i_{jk}, x^\ell_{jk}) = \frac{S}{S-1} \sum_{k=1}^{S} \left(x^i_{jk} - \frac{1}{S}\right)\left(x^\ell_{jk} - \frac{1}{S}\right) .$$

Коэффициент согласия экспертов по объекту j равен:

$$E_j = \frac{1}{m_j^2} \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{\ell=1}^{m_j} R_{i\ell} = \frac{S}{(S-1)m_j^2} \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{\ell=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{S} \left(x^i_{jk} - \frac{1}{S}\right)\left(x^\ell_{jk} - \frac{1}{S}\right) =$$

$$= \frac{S}{(S-1)m_j^2} \sum_{k=1}^{S} \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{\ell=1}^{m_j} \left(x^i_{jk} - \frac{1}{S}\right)\left(x^\ell_{ijk} - \frac{1}{S}\right);$$

$$E_j = \frac{S}{(S-1)m_j} \sum_{k=1}^{S} \left(\sum_{i=1}^{m_j} \left(x^i_{jk} - \frac{1}{S}\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{S}{(S-1)m_j^2} \sum_{k=1}^{S} \left(\sum_{i=1}^{m_j} x^i_{jk} - \frac{m_j}{S}\right)^2 .$$

Введем обозначение

$$x_{jk} = \sum_{i=1}^{m_j} x^i_{jk} ;$$

$$d_j=\sum_{k=1}^{S}\left(x_{jk}-\frac{m_j}{S}\right)^2, \quad (7)$$

тогда выражение для E_j перепишется в виде:

$$E_j=\frac{S\cdot d_j}{(S-1)\,m_j^2}\,. \quad (8)$$

Оценку согласованности экспертов по всей совокупности объектов можно провести, если все эксперты дали оценки всех объектов, т.е. $m_j=m(j=1,2\dots$ $\dots n)$. В этом случае

$$R_{il}=\frac{S}{(S-1)\cdot n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{S}\left(x_{jk}^{i}-\frac{1}{S}\right)\left(x_{jk}^{l}-\frac{1}{S}\right); \quad (9)$$

$$E=\frac{S}{(S-1)m^2 n}\sum_{j=1}^{n}d_j=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E_j\,. \quad (10)$$

Как указывалось в п. 3, проверка значимости коэффициента согласия заключается в проверке гипотезы H_0 о случайности совпадении мнений экспертов, которую можно также интерпретировать и как случайность проставления экспертами своих оценок.

Сначала рассмотрим вопрос оценки значимости коэффициентов согласия E_j (по каждому объекту). Для проверки гипотезы в качестве статистики используем E_j, вычисляемую по формуле (8). Найдем функцию распределения E_j, когда гипотеза H_0 верна и число экспертов m_j достаточно большое (метод классификации требует привлечения значительного числа экспертов $m>10$).

Выражение (8) для E_j с учетом (7) перепишем в виде:

$$E_j=\frac{S}{(S-1)m_j^2}\sum_{k=1}^{S}\left(x_{jk}-\frac{m_j}{S}\right)^2=\frac{1}{(S-1)m_j^2}\sum_{k=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{m_j}\frac{x_{jk}^{i}-\frac{1}{S}}{\sqrt{\frac{1}{S}}}\right)^2. \quad (11)$$

Так как $M(x_{jk}^{i})=\frac{1}{S}$, $D(x_{jk}^{i})=\frac{1}{S}$ (см. (5), (6)), то, введя переменную $y_{jk}^{i}=\frac{x_{jk}^{i}-\frac{1}{S}}{\sqrt{\frac{1}{S}}}$, для которой уже $M(y_{jk}^{i})=0$, а $D(y_{jk}^{i})=1$, формула (11) примет вид:

$$E_j=\frac{1}{(S-1)m_j^2}\sum_{k=1}^{S}\left(\sum_{i=1}^{m_j}y_{jk}^{i}\right)^2. \quad (12)$$

В соответствии с центральной предельной теоремой сумма независимых одинаково распределенных случайных величин $\sum_{i=1}^{m_j}y_{jk}^{i}$ при достаточно большом числе слагаемых распредела по нормальному закону 2 . Значит $z_{jk}=\sum_{i=1}^{m_j}y_{jk}^{i}$ распределена по нормальному закону с $M(z_{jk})=0$ и $\sigma^2(z_{jk})=m_j$.

После нормировки z_{jk} перейдем к

$$U_{jk}=\frac{z_{jk}}{\sqrt{m_j}}, \quad (13)$$

распределенной по нормальному закону с $M(U_{jk})=0$ и $\sigma(U_{jk})=1{,}0$. Выражение (12) с учетом (13) примет вид

$$E_j=\frac{1}{(S-1)m_j}\sum_{k=1}^{S}U_{jk}^2\,. \quad (14)$$

Сумма квадратов независимых нормально распределенных случайных величин, в свою очередь, распределена по закону χ^2 (Пирсона) с числом степеней свободы (ν), равным числу слагаемых в сумме за вычетом количества наложенных связей на элементы суммы [3]. Таким образом, $\sum_{k=1}^{S}U_{jk}^2$ распределена по закону χ^2 с числом степеней свободы $\nu=S-1$, так как на каждую строку матрицы $\|x_{jk}\|$ накладывалось условие $\sum_{k=1}^{S}x_{jk}=m_j$.

Из (14) получаем, что когда гипотеза H_0 верна, то статистика

$$\chi^2=m_j\,(S-1)E_j \quad (15)$$

распределена по закону Пирсона с числом степеней свободы $\nu=S-1$.

Для проверки гипотезы H_0 необходимо задать уровень значимости α, который характеризует требования к надежности групповых оценок, по таблицам распределения χ^2 (см. приложение 8) определить χ^2 табл. Решающим правилом для того, чтобы считать коэффициент согласия значимым и, соответственно, групповую оценку объекта O_j достоверной, является следующее неравенство:

$$\chi^2_{j\,расч} \geq \chi^2_{табл}.$$

Проверка значимости коэффициента согласия E по всей совокупности объектов осуществляется аналогично E_j. При этом статистика χ^2 вычисляется по формуле:

$$\chi^2_{расч} = m \cdot n(S-1) \cdot E, \qquad (16)$$

а число степеней свободы χ^2 равно $\nu = n(S-1)$.

Говоря о сравнении оценок объектов, данных различными экспертами, необходимо остановиться на коэффициенте корреляции.

Максимальное значение коэффициента корреляции, вычисляемого по формуле (9), равно 1, а минимальное значение соответствует несовпадению оценок экспертов и равно:

$$R_{il}^{min} = \frac{S}{(S-1)n}\sum_{j=1}^{n}\left[(S-2)\left(\frac{1}{S}\right)^2 - 2\left(1-\frac{1}{S}\right)\frac{1}{S}\right] =$$

$$= \frac{S}{(S-1)n}\cdot\frac{n}{S^2}\left[(S-2)-2(S-1)\right] = -\frac{1}{S-1}. \qquad (17)$$

Как видно из (17), R_{il}^{min} зависит от числа классов и отрицательно. Однако в шкале наименований между шкальными значениями устанавливается только отношение равенства и нет отношения порядка, как в других шкалах (порядка, интервалов, отношений). Поэтому, сравнивая оценки, измеренные по шкале наименований, не имеет смысла говорить об отрицательном их совпадении и, соответственно, отрицательном коэффициенте корреляции.

Поэтому для оценки согласованности оценок двух экспертов или согласованности оценок одного эксперта с групповыми введем специальный коэффициент корреляции для шкалы наименований R_{il}^{H} (индекс "Н" указывает на шкалу наименований), который будет меняться в интервале (0; 1). Значение "нуль" соответствует несовпадению оценок экспертов, а единица полному совпадению. Выражение для R_{il}^{H} получим из формулы (9) для R_{il} путем линейного преобразования

$$R_{il}^{H} = \alpha R_{il} + \beta.$$

Коэффициенты α и β найдем из следующих условий:

$$R_{il}^{H}(min) = \alpha R_{il}^{min} + \beta;$$

$$R_{il}^{H}(max) = \alpha R_{il}^{max} + \beta.$$

С учетом (17) эти условия запишутся в следующем виде:

$$0 = \alpha\left(-\frac{1}{S-1}\right) + \beta;$$

$$1 = \alpha + \beta.$$

Решением этой системы уравнений является: $\alpha = \frac{S-1}{S}$; $\beta = \frac{1}{S}$. Подставим эти выражения в (9):

$$R_{il}^{H} = \alpha R_{il} + \beta = \left(\frac{S-1}{S}\right)\frac{S}{(S-1)\cdot n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{S}\left(x_{jk}^{i} - \frac{1}{S}\right)\left(x_{jk}^{l} - \frac{1}{S}\right) + \frac{1}{S}.$$

В результате преобразования получим:

$$R_{il}^{H} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{S} x_{jk}^{i}\, x_{jk}^{l}. \qquad (18)$$

Подсчет R_{il}^{H} осуществлять довольно просто: достаточно вычислить количество объектов, по которым оценки экспертов совпали, и отнести результат к общему числу объектов n.

Проверка на значимость коэффициента корреляции заключается в проверке гипотезы H_0 о независимости оценок i и l экспертов, которую можно интерпретировать и как гипотезу равенства R_{il}^{H} нулю.

Если рассматриваемая гипотеза верна, то вероятность того, что $\sum_{k=1}^{S} x_{jk}^{i} x_{jk}^{l} = 1$, т.е. совпадут оценки j объекта у i и l экспертов равна $\frac{1}{S}$, а вероятность того, что оценки экспертов не совпадут $\left(\sum_{k=1}^{S} x_{jk}^{i} x_{jk}^{l} = 0\right)$, равна $\frac{S-1}{S}$.

Так как оценки объектов независимы, то вероятность совпадения оценок всех n объектов у i и ℓ экспертов, т.е. $R_{i\ell}=1$ равна $\left(\frac{1}{S}\right)^n$.

Вероятность того, что совпадут оценки ($n-1$) объектов, т.е. $R_{i\ell}^H=\frac{n-1}{n}$, равна $\left(\frac{1}{S}\right)^{n-1}\left(\frac{S-1}{S}\right)\cdot C_n^1$.

Вероятность того, что $R_{i\ell}^H=\frac{n-P}{n}$, равна $\left(\frac{1}{S}\right)^{n-P}\left(\frac{S-1}{S}\right)^P C_n^P$.

Функция распределения $R_{i\ell}^H$ при выполнении выдвинутой гипотезы может быть получена из следующего выражения:

$$P\left(R_{i\ell}^H \geqslant \frac{n-P}{n}\right)=\sum_{q=0}^{P}\left(\frac{1}{S}\right)^{n-q}\left(\frac{S-1}{S}\right)^q C_n^q=\sum_{q=0}^{P}\frac{(S-1)^q}{S^n}C_n^q .$$

В приложении 2 приведены функции распределения $R_{i\ell}^H$. По заданному уровню значимости α находится $R_{табл}^H$.

Решающее правило для отвержения выдвинутой гипотезы о независимости оценок экспертов имеет вид $R_{i\ell}^H \geqslant R_{табл}^H$.

По коэффициенту корреляции рекомендуется оценивать согласованность мнений каждого эксперта с групповыми оценками.

Оценка устойчивости групповых оценок. Для оценки устойчивости необходимо построить функцию распределения вероятности $F(\ell)$ сохранения групповых оценок при исключении из экспертной группы ℓ экспертов.

Рассмотрим алгоритм построения функции распределения сохранения групповой оценки объекта j при исключении ℓ или менее экспертов на примере.

Пусть оценками объекта шестью экспертами по методу классификации является следующий ряд: 1,1,1, 3,3,2 (количество классов $S=3$). Определим вероятность сохранения групповой оценки при исключении $\ell=3$ экспертов.

Величины x_{jk} для нашего примера равны $x_{j1}=3$; $x_{j2}=1$; $x_{j3}=2$. Групповая оценка соответствует максимуму из x_{jk}, т.е. $x_{j1}^{\Gamma}=1$, $x_{j2}^{\Gamma}=x_{j3}^{\Gamma}=0$.

При исключении трех экспертов из экспертной группы изменяются значения x_{jk}. Из каждого класса можно исключить различное число экспертов:

$$z_{jk}\ (k=1,2,3)\left(\sum_{k=1}^{S} z_{jk}=\ell\right).$$

При этом значения x_{jk} уменьшаются на z_{jk}.

Все возможные варианты исключения трех экспертов из исходной группы представлены в табл. 1.

Таблица 1

№ варианта	Количество исключаемых экспертов			Значение x_{jk} после исключения экспертов		
	z_{j1}	z_{j2}	z_{j3}	$x_{j1}-z_{j1}$	$x_{j2}-z_{j2}$	$x_{j3}-z_{j3}$
1	3	0	0	0	1	2
2	2	1	0	1	0	2
3	2	0	1	1	1	1
4	1	1	1	2	0	1
5	1	0	2	2	1	0
6	0	1	2	3	0	0

Из приведенной таблицы видно, что первые три варианта приводят к изменению групповой оценки, остальные – не приводят.

Условие сохранения групповой оценки объектов j в общем виде записывается в виде следующего неравенства:

$$\min_q\left[(x_{jk}-z_{jk})-(x_{jq}-z_{jq})\right]>0\quad (q\neq k), \tag{19}$$

где k – индекс класса групповой оценки объекта j.

Если заданы коэффициенты компетентности экспертов $K_1 \ldots K_m$, то сначала вычисляется средняя компетентность экспертов (K_{jk}) отнесших объект к каждому из классов:

$$K_{jk}=\sum_{i=1}^{m_j} x_{jk}^i K_i \Big/ \sum_{i=1}^{m_j} x_{jk}^i .$$

После этого эксперты, отнесшие j объект к k классу, обезличиваются и всем им присваивается компетентность равная K_{jk}. Поэтому условие (19) сохранения групповой оценки объекта j примет вид:

$$\min_q\left[K_{jk}(x_{jk}-z_{jk})-K_{jq}(x_{jq}-z_{jq})\right]>0. \tag{20}$$

Количество случаев сохранения групповой оценки объекта j вычисляется по формуле: $N_j^+=\sum_{z}\prod_{k=1}^{S}C_{x_{jk}}^{z_{jk}}$ (сумма берется по всем вариантам η, не приводящим к изменению групповой оценки), где $C_{x_{jk}}^{z_{jk}}$ — число сочетаний из x_{jk} по z_{jk}.

Для нашего примера N_j^+ равно:

$$N_j^+ = \sum_{\eta=4}^{6} \prod_{k=1}^{3} C_{x_{jk}}^{z_{jk}} = C_3^1 \cdot C_1^1 \cdot C_2^1 + C_3^1 \cdot C_1^0 \cdot C_2^2 + C_3^0 \cdot C_1^1 \cdot C_2^2 =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 10.$$

Искомая вероятность $P(\ell=3)$ будет равна:

$$P(\ell=3) = \frac{N_j^+}{C_6^3} = \frac{10}{20} = 0,5.$$

Аналогично можно вычислить вероятность сохранения групповой оценки при исключении любого числа экспертов. Для рассматриваемого примера: $P(\ell=1)=0,5$; $P(\ell=2)=0,8$.

Вычисление функции распределения $F(\ell)$ (вероятности сохранения групповой оценки при исключении ℓ или менее экспертов) осуществляется по формуле:

$$F(\ell) = \sum_{r=1}^{\ell} P(r) \cdot C_m^r \Big/ \sum_{r=1}^{\ell} C_m^r. \tag{21}$$

Для рассматриваемого примера $F(3)$ равно:

$$F(3) = (0,5 \cdot 6 + 0,8 \cdot 15 + 0,5 \cdot 20) / (6 + 15 + 20) = \frac{25}{41}.$$

Построив распределение $F(\ell)$, аналитик должен задать требования к устойчивости групповой оценки, указав уровень пороговой вероятности P и число экспертов L, при исключении которого (или меньшего) групповая оценка сохраняется с вероятностью не менее P. Величину P рекомендуется задавать в пределах 0,6 ÷ 0,95.

Решающим правилом для того, чтобы считать групповую оценку объекта j достоверной по ее устойчивости, является выполнение следующего неравенства:

$$F(L) \geqslant P(L) \tag{22}$$

В заключение остановимся на вопросе определения максимального числа экспертов L_m, при котором с вероятностью $P=1$ групповые оценки не изменяются. Для этого обратимся к условию сохранения групповой оценки (19). Самый неблагоприятный случай, который может привести к изменению групповой оценке, соответствует $z_{jk}=L$, а $z_{jq}=0\,(q \neq k)$. Тогда L_m находится из условия

$$\min_q \left[(x_{jk} - L_m) - x_{jq} \right] > 0 \quad (q \neq k).$$

Из этого выражения получаем, что

$$L_m = \min_q (x_{jk} - x_{jq}) - 1 \quad (q \neq k),$$

где k — индекс класса групповой оценки j объекта.

Группирование экспертов

Алгоритм группирования экспертов по близости их оценок приведен в п.4. Для проверки значимости коэффициента согласия на каждом шаге алгоритма используется статистика (16).

При группировании представляет интерес выделения наиболее компактной подгруппы экспертов. Для характеристики компактности экспертной группы должна быть выбрана статистика, не зависящая от численности группы. Такой статистикой является опять же (16). Это следует из того, что $\nu = n(S-1)$ не зависит от m, а значит при проверке E на значимость $\chi^2_{табл}$ также не зависит от численности группы.

Наиболее компактная подгруппа экспертов находится из условия:

$$\max_q \chi^2_{расч} = \max_q \left[m_q\, n (S-1) E \right],$$

где q — номер шага алгоритма группирования.

5. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК, ПОЛУЧЕННЫХ ПО МЕТОДУ РАНЖИРОВАНИЯ

Оценками объектов ($j=1,2\ldots n$) эксперта i являются ранги объектов R_j^i.

Анализ оценок каждого эксперта

В методе ранжирования проверка экспертных оценок производится на выполнение следующих условий: а) все ранги R_j^i должны быть либо целыми числами, либо кратными 1/2;

б) $$\sum_{j=1}^{n} R_j^i = \frac{n(n+1)}{2}; \; (i=1,2,\dots m). \tag{23}$$

В случае, если для оценок какого-либо эксперта эти условия не выполняются, производится коррекция рангов аналитиком или программой обработки на ЭВМ.

Определение групповых оценок объектов

Групповой ранг (R_j^r) объекта j определяется как медиана распределения рангов R_j^i $(i=1,2,\dots,m)$, присвоенных этому объекту всеми экспертами. Для этого ранги R_j^i $(i=1,2\dots m)$ упорядочиваются по возрастанию и групповой оценкой является среднее по порядку полученного ряда. Например, оценками объекта j являются следующие ранги:

	$Э_1$	$Э_2$	$Э_3$	$Э_4$	$Э_5$
O_j	1	3	2	3	3

После упорядочения получим ряд: 1; 2; 3; 3; 3. Групповой оценкой объекта j – r_j будет 3.

Вычисленные групповые оценки r_j еще не будут групповыми рангами, так как не всегда выполняется условие (23), определяющее правильность вычисления связанных рангов. Поэтому по ряду r_j $(j=1,2,\dots n)$ необходимо определить групповые ранги объектов R_j^r $(j=1,r,\dots n)$.

Если, например, r_j = (1; 2; 2; 4; 4; 6), то R_j^r = (1; 2,5; 2,5; 4,5; 4,5; 6).

В случае, когда заданы коэффициенты компетентности экспертов $k^i(i=1,2,\dots m)$, медиана распределения R_j^i определяется из условия равенства суммы k^i слева и справа от r_j. Для этого вычисляется

$k_M = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} K^i$, упорядоченному ряду рангов R_j^i сопоставляется ряд коэффициентов компетентности экспертов, и находится r_j, соответствующий K_M.

Так, если в рассматриваемом выше примере заданы коэффициенты компетентности экспертов $K^1=4$; $K^2=2$; $K^3=6$; $K^4=3$; $K^5=1$, то упорядоченному ряду рангов R_j^i = 1; 2; 3; 3; 3 соответствует ряд коэффициентов компетентности K^i = 4; 6; 3; 2; 1, а $K_M = \frac{1}{2}$ (4+2+6+3+1) = 8.

Вычисленному K_M по ряду k^i соответствует оценка эксперта с коэффициентом компетентности равным 6, т.е. оценка второго эксперта в упорядоченном ряду. Значит $r_j=2$ является оценкой объекта.

Анализ достоверности групповых оценок

В методе ранжирования оценку достоверности можно проводить, используя коэффициент согласия или устойчивость групповых оценок.

Оценка согласованности экспертов. Рассмотрим сначала вопрос оценки согласованности двух экспертов i и ℓ. Для сравнения оценок, полученных по методу ранжирования, можно использовать коэффициенты ранговой корреляции по Спирмену и по Кендэлу [6]. Более надежным из них является коэффициент ранговой корреляции по Спирмену, который в дальнейшем и будет использоваться:

$$R_{i\ell} = \frac{cov(R_j^i, R_j^\ell)}{S^i S^\ell}. \tag{24}$$

Получим выражение для S^i и $cov(R_j^i, R_j^\ell)$.

$$S^i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(R_j^i - \overline{R^i})^2} \tag{25}$$

Среднее значение рангов

$$\overline{R^i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2}, \tag{26}$$

тогда для случая, когда в оценках эксперта нет связанных рангов, выражение (25) будет иметь вид:

$$S^i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(R_j^i - \frac{n+1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left[j^2 - j(n+1) + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]}.$$

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, выражение для S^i перепишется в виде:

$$S^i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}(n+1) + \frac{n(n+1)^2}{4}\right]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n-1}\,\frac{(n+1)\cdot n}{12}\left[(2n+1)\cdot 2 - 3(n+1)\right]} = \sqrt{\frac{n^3-n}{12}\cdot\frac{1}{n-1}}. \quad (27)$$

При наличии t связанных рангов у эксперта значение суммы $\sum_{j=1}^{n}(R_j^i - \frac{n+1}{2})^2$ в выражении (27) уменьшится на

$$T_i = \sum_{j=1}^{t}\left(j - \frac{n+1}{2}\right)^2 - \sum_{j=1}^{t}\left(\frac{t+1}{2} - \frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{t}\left[j^2 - 2j\,\frac{n+1}{2} - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 2\,\frac{t+1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\right];$$

$$T_i = \frac{t(t+1)(2t+1)}{6} - \frac{(t+1)^2}{4}\cdot t = \frac{t(t+1)}{12}(t-1) = \frac{t^3-t}{12}.$$

Если в оценках эксперта i имеется несколько групп связанных рангов, то уменьшению $\sum_{j=1}^{n}\left(R_j^i - \frac{n+1}{2}\right)^2$ будет соответствовать

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i'} \frac{(t_j^i)^3 - t_j^i}{12}.$$

где n_i' – число различных рангов, присвоенных экспертом i объектам (очевидно, что $n_i' < n$, а при отсутствии связанных рангов $n_i' = n$); t_j^i – число повторений j ранга в оценках i эксперта $\left(\sum_{j=1}^{n_i'} t_j^i = n\right)$.

Таким образом, при наличии связанных рангов S^i будет определяться выражением:

$$S^i = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\frac{n^3-n}{12} - T_i\right]}. \quad (28)$$

Следует отметить, что при отсутствии связанных рангов (все $t_j^i = 1$ и $T_i = 0$) и выражение (28) совпадает с (27), значит (28) является общим для вычисления S^i.

Получим выражение для $cov(R_j^i, R_j^e)$:

$$cov(R_j^e, R_j^i) = \frac{1}{(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left(R_j^i - \frac{n+1}{2}\right)\left(R_j^e - \frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\sum_{j=1}^{n}\left[R_j^i R_j^e - \frac{n+1}{2}\left(R_j^i + R_j^e\right) + \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n} R_j^i R_j^e - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \cdot n\right]. \quad (29)$$

К правой части выражения (29) прибавим и вычтем $\frac{1}{2(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n}(R_j^e)^2 + \sum_{j=1}^{n}(R_j^i)^2\right]$, после чего получим:

$$cov(R_j^i, R_j^e) = \frac{1}{2(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(R_j^i - \frac{n+1}{2}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(R_j^e - \frac{n+1}{2}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n}(R_j^i - R_j^e)^2\right].$$

Обозначим через $S(d^2) = \sum_{j=1}^{n}(R_j^i - R_j^e)^2$, тогда с учетом (26) и (27) последнее выражение запишется в виде

$$cov(R_j^i, R_j^e) = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{n^3-n}{6} - S(d^2)\right]. \quad (30)$$

Если в оценках i или e экспертов присутствуют связанные ранги, то $\frac{n^3-n}{6}$ уменьшается на

$$T_i = \sum_{j=1}^{n_i'} \frac{(t_j^i)^3 - t_j^i}{12} \quad \text{или} \quad T_e = \sum_{j=1}^{n_e'} \frac{(t_j^e)^3 - t_j^e}{12},$$

тогда выражение для ковариации будет иметь вид

$$cov(R_j^i, R_j^e) = \frac{1}{2(n-1)}\left[\frac{n^3-n}{6} - S(d^2) - T_i - T_e\right]. \quad (31)$$

С учетом (31) и (28) общее выражение для коэффициента корреляции (24) запишется в виде:

$$R_{il}=\frac{\frac{n^3-n}{6}-T_i-T_l-S(d^2)}{2\sqrt{\frac{n^3-n}{12}-T_i}\,\sqrt{\frac{n^3-n}{12}-T_l}}=\frac{\frac{n^3-n}{6}-(T_i+T_l)-S(d^2)}{\sqrt{\left(\frac{n^3-n}{6}-2T_i\right)\left(\frac{n^3-n}{6}-2T_l\right)}}. \qquad (32)$$

Преобразуем знаменатель R_{il}:

$$\sqrt{\left(\frac{n^3-n}{6}\right)^2-\frac{2(n^3-n)}{6}(T_i+T_l)+4T_iT_l}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{n^3-n}{6}\right)^2-2\,\frac{n^3-n}{6}(T_i+T_l)+(T_i+T_l)^2-(T_i+T_l)^2+4T_i\,T_l}=$$

$$=\left[\frac{n^3-n}{6}-(T_i+T_l)\right]\sqrt{1-\frac{(T_i-T_l)^2}{\left[\frac{n^3-n}{6}-(T_i+T_l)\right]^2}}$$

Если T_i и T_l много меньше $\frac{n^3-n}{6}$, тогда

$$R_{il}=\frac{\frac{n^3-n}{6}-(T_i+T_l)-S(d^2)}{\frac{n^3-n}{6}-(T_i+T_l)}=1-\frac{S(d^2)}{\frac{n^3-n}{6}-(T_i+T_l)}. \qquad (33)$$

Если же $T_i=T_l=0$, то $R_{il}=1-\frac{6S(d^2)}{n^3-n}$. (34)

Для проверки значимости R_{il}, т.е. проверки гипотезы о независимости оценок i и l экспертов, используем в качестве статистики $S(d^2)$. При небольшом числе объектов ($n<10$) для проверки значимости используются таблицы распределения $S(d^2)$, приведенные в приложении 3.

Распределение $S(d^2)$ симметрично (рис. 3). $S(d^2)_{max}$ соответствует $R_{il}=-1$, тогда из (34) и (33) следует, что $S(d^2)_{max}=\frac{n^3-n}{3}$. Среднее значение $S(d^2)$ равно $\frac{n^3-n}{6}$.

Задав уровень значимости для проверки гипотезы H_0, по таблице находится α-квантиль $S(d^2)_{табл\,\alpha}$ (если альтернативная гипотеза заклю-

чается в положительной связи) или $S'(d^2)_{табл}=S(d^2)_{max}-S(d^2)_{табл\,\alpha}$ (если альтернативная гипотеза H_1 заключается в отрицательной связи).

Решающим правилом для отвержения гипотезы является или

$$S(d^2)_{расч}\le S(d^2)_{табл.\alpha}, \qquad (35)$$

или

$$S(d^2)_{расч}\ge S'(d^2)_{табл}.$$

Перепишем выражение (24) для R_{il} в виде

$$R_{il}=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_j^i-\frac{n+1}{2}}{S^i}\right)\left(\frac{R_j^l-\frac{n+1}{2}}{S^l}\right). \qquad (36)$$

В соответствии с выдвинутой гипотезой R_j^i и R_j^l независимы, поэтому:

$$M(R_{il})=0,$$

а

$$D(R_{il})=\frac{1}{n-1}. \qquad (37)$$

При достаточно большом числе слагаемых в (36) ($n\ge 10$), в соответствии с центральной предельной теоремой, R_{il} распределено по нормальному закону. Учитывая первые два момента R_{il} (37), получаем, что

$$\sqrt{n-1}\,R_{il}=X_{расч}- \qquad (38)$$

нормально распределенная величина с параметрами $N(0;1)$.

Поэтому при $n\ge 10$ для проверки значимости коэффициента ранговой корреляции по заданному уровню значимости α определяется

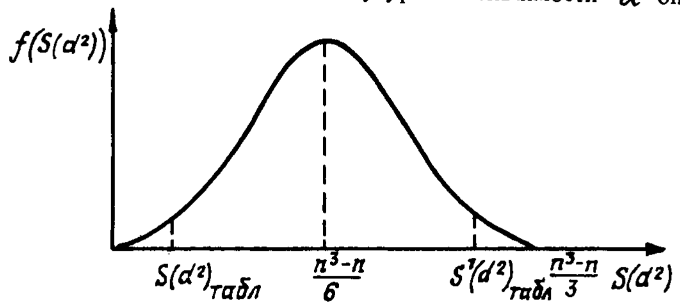


Рис. 3. Плотность функции распределения $S(d^2)$

$X_{табл}$. Решающее правило для того, чтобы считать коэффициент $R_{i\ell}$ значимым, имеет вид:

$$|X_{расч}| \geq X_{табл}.$$

Коэффициент ранговой корреляции используется для оценки связи рангов каждого эксперта с групповыми рангами объектов.

Получим выражение для коэффициента согласия всех экспертов E:

$$E = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} R_{i\ell} = \frac{1}{m^2(n-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{R_j^i - \bar{R}^i}{S^i}\right)\left(\frac{R_j^\ell - \bar{R}^\ell}{S^\ell}\right).$$

Для случая отсутствия связанных рангов в оценках экспертов с учетом (26) и (27) выражение для E перепишется в виде

$$E = \frac{12}{m^2(n^3-n)}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\left(R_j^i - \frac{n+1}{2}\right)\right)^2.$$

Обозначив через $R_j = \sum_{i=1}^{m} R_j^i$, запишем формулу для вычисления коэффициента согласия в виде:

$$E = \frac{12S}{m^2(n^3-n)}, \tag{39}$$

где

$$S = \sum_{j=1}^{n}\left(R_j - \frac{m(n+1)}{2}\right)^2. \tag{40}$$

Если в оценках всех экспертов присутствуют связанные ранги и T_i одинаковы, то с учетом (28)

$$E = \frac{S}{m^2\left(\frac{n^3-n}{12} - m^2 T_i\right)}.$$

Если же T_i отличаются друг от друга незначительно, то приближенная формула для E записывается в виде:

$$E = \frac{S}{m^2\left(\frac{n^3-n}{12} - m\sum_{i=1}^{m} T_i\right)}. \tag{41}$$

Выражение (41) обычно и используется при ручном расчете коэффициента согласия.

При малых значениях m и n для проверки значимости коэффициента согласия используются специальные таблицы (см. приложение 4), в которых в качестве статистики выступает величина S, вычисляемая по формуле (40).

Так как коэффициент согласия изменяется в интервале от нуля до единицы и распределение E при независимости оценок экспертов унимодально, то для аппроксимации распределения E используем β – распределение, плотность функции распределения которого имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1} & (0 \leq x \leq 1; \\ 0 & 0 > x > 1). \end{cases} \tag{42}$$

Первые два момента этого распределения равны [6]:

$$M(x) = \frac{p}{p+q}; \tag{43}$$

$$D(x) = \frac{p \cdot q}{(p+q)^2(p+q+1)}. \tag{44}$$

Выразим параметры p и q β-распределения через m и n, чтобы распределение E имело вид:

$$f(E) = CE^{p-1}(1-E)^{q-1}. \tag{45}$$

В приложении 1 приведены выкладки для первых трех моментов коэффициента согласия, когда оценки экспертов независимы (см. выражение (130), (131), (136)). Запишем выражения трех моментов E:

$$M(E) = \frac{1}{m}; \tag{46}$$

$$D(E) = \frac{2(m-1)}{(n-1)m^3}; \tag{47}$$

$$M_3(E)=\frac{8(m-1)}{m^5(n-1)}\left[\frac{M_3(R_j^i)}{2(n-2)}+\frac{m-2}{n-1}\right].$$

Учитывая, что распределение R_j^i симметрично, т.е. $M_3(R_j^i)=0$, и тогда выражение для $M_3(E)$ запишется в виде

$$M_3(E)=\frac{8(m-1)(m-2)}{m^5(n-1)^2} \tag{48}$$

(напомним, что третий момент случайной величины характеризует симметрию плотности функции распределения).

Приравнивая (46), (43) и (47), (44) получим параметры p и q распределения (45):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m}=\dfrac{p}{p+q}; \\[2ex] \dfrac{2(m-1)}{m^3(n-1)}=\dfrac{p\cdot q}{(p+q)^2(p+q+1)}. \end{cases}$$

Решением этой системы будут

$$p=\frac{n-1}{\alpha}-\frac{1}{m}; \tag{49}$$

$$q=(m-1)p=(m-1)\left[\frac{n-1}{2}-\frac{1}{m}\right]. \tag{50}$$

При этих значениях параметров p и q третий момент β-распределения равен [6]:

$$M_3(x)=\frac{8(m-1)(m-2)}{m^5(n-1)^2}\left[1-\frac{2}{m(n-1)+2}\right].$$

Сравнивая это выражение с (48), видим, что $M_3(E)$ практически равно $M_3(x)$ при достаточно больших значениях m и n. Поэтому можно говорить о хорошей аппроксимации распределения коэффициента согласия β-распределением при больших значениях m и n (достаточно, чтобы

$m(n-1)\geq 20)$. В [6] показывается, что при таких m и n и четвертые моменты E и β-распределения практически совпадают.

Для удобства пользователей сведем β-распределение к табулированному F распределению (распределению Фишера).

Обозначим

$$z=\frac{1}{2}\ln\frac{(m-1)E}{1-E}, \tag{51}$$

тогда $f(E)dE$, определяемая выражением (45), запишется через z в виде

$$\frac{e^{2pz}}{[(m-1)+e^{2z}]^{p+q}}dz. \tag{52}$$

Действительно, числитель этого выражения равен

$$e^{2pz}=\left(\frac{(m-1)E}{1-E}\right)^p,$$

знаменатель равен

$$[(m-1)+e^{2z}]^{p+q}=\left[(m-1)+\frac{(m-1)E}{1-E}\right]^{p+q}=\left[\frac{m-1}{1-E}\right]^{p+q},$$

дифференциал

$$dz=\frac{1}{2}\,\frac{E}{(m-1)E}\left[\frac{m-1}{1-E}+\frac{(m-1)E}{(1-E)^2}\right]dE=\frac{1}{2}\,\frac{m-1}{(1-E)E}dE.$$

Подставляя приведенные выражения в (52), получили

$$(m-1)^{1-q}E^{p-1}(1-E)^{q-1}dE.$$

Выражение (52) является плотностью функций распределения Фишера при числе степеней свободы $\nu_1=2p$ и $\nu_2=2q$ [6], а с учетом (49) и (50)

$$\nu_1=n-1-\frac{2}{m};\quad \nu_2=(m-1)\,\nu_1. \tag{53}$$

При достаточно большом числе экспертов $m>7$ распределение E стремится к распределению χ^2 (Пирсона). Покажем это.

Действительно, в соответствии с (39) и (40):

$$E=\frac{12}{m^2(n^3-n)}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}R_j^i-\frac{m(n+1)}{2}\right)^2=\frac{12}{m^2(n^3-n)}\sum_{j=1}^{n}y_j^2, \tag{54}$$

где $y_j = \sum_{i=1}^{m} \left(R_j^i - \frac{n+1}{2}\right).$

При достаточно большом m y_j распределено по нормальному закону. Параметры нормального закона с учетом (26) и (27) будут равны:

$$M(y_j) = 0;$$

$$\sigma^2(y_j) = \frac{n^3 - n}{12(n-1)} \cdot m.$$

Пронормируем y_j в соответствии с выражением

$$u_j = \frac{y_j}{\sigma_{y_j}} = y_j \sqrt{\frac{12(n-1)}{(n^3-n)\cdot m}}.$$

Тогда (54) перепишется в виде

$$E = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{j=1}^{n} u_j^2,$$

где u_j нормально распределена с $M(u_j)=0$ и $\sigma^2(u_j) = 1$.

Как указывалось в п. 5, сумма квадратов независимых нормально распределенных случайных величин распределена по закону χ^2 (Пирсона). Так как на сумму $\sum_{j=1}^{n} u_j$ накладывается условие равенства ее нулю, то число степеней свободы $\nu = n-1$.

Получили, что если гипотеза о независимости оценок экспертов ($n > 7$) верна, то статистика

$$\chi^2_{расч} = m(n-1)E \qquad (55)$$

распределена по закону Пирсона с числом степеней свободы $\nu = n-1$.

Таким образом, в зависимости от количества экспертов m, числа оцениваемых объектов n для проверки значимости E необходимо воспользоваться или таблицами распределения S (когда $m(n-1) < 20$), или распределением Фишера ($m(n-1) > 20$, а $m \leq 7$), или χ^2 распределением ($m > 7$).

В соответствии с заданным уровнем значимости гипотезы о независимости оценок экспертов α находятся или $S_{табл}$, или $F_{табл}$ или $\chi^2_{табл}$

Решающими правилами для того, чтобы считать коэффициент согласия значимым, т.е. чтобы считать групповые оценки достоверными, являются следующие неравенства:

$$S_{расч} \geq S_{табл};$$

$$\chi^2_{расч} \geq \chi^2_{табл};$$

$$F_{расч} \geq F_{табл}.$$

Следует подчеркнуть, что при расчете по формулам (39) числа степеней свободы для F распределения ν_1 и ν_2 их следует округлять в большую сторону.

Оценка устойчивости групповых оценок. Для оценки устойчивости необходимо построить функцию распределения вероятности $F(\ell)$ сохранения групповых оценок при исключении из экспертной группы ℓ экспертов.

Рассмотрим алгоритм определения функции $F(\ell)$, характеризующей вероятность сохранения групповой оценки объекта j при исключении ℓ или менее экспертов.

Упорядоченный ряд рангов объекта j и, соответственно, всех экспертов разобьем на три класса:

класс 1 – ранги меньшие значения медианы r_j. Число таких рангов и, соответственно, экспертов, давших эти ранги, – x_{j1};

класс 2 – ранги, равные r_j. Число их – x_{j2};

класс 3 – ранги, большие r_j, их число – x_{j3}.

Таким образом, все эксперты разбиваются на три класса. В каждом выделенном классе вычислим среднюю компетентность экспертов. Среднюю компетентность экспертов класса 1 обозначим через K_1, класса 2 – K_2, класса 3 – K_3.

Далее для построения распределения $F(\ell)$ и оценки устойчивости групповой оценки следует использовать процедуру, описанную в пункте оценки устойчивости групповых оценок в методе классификации (см. п.4), приняв в ней число классов, равное трем, и заменив условие (20) сохранения групповой оценки объекта j на следующее:

$$\left|(x_{j1} - z_{j1})K_1 - (x_{j3} - z_{j3})K_3\right| < (x_{j2} - z_{j2})K_2. \qquad (56)$$

Оценка устойчивости групповых оценок в методе ранжирования осуществляется по каждому объекту отдельно.

Решающее правило для того, чтобы считать групповую оценку достоверной по ее устойчивости то же, что и в методе классификации.

Максимальное число экспертов (L_m), которых можно исключить, и при этом с вероятностью $P = 1$ групповая оценка r_j сохранится, определяется при условии, что все эксперты равнокомпетентны K_i – const.

Самый неблагоприятный случай, который может привести к изменению r_j, соответствует исключению рангов либо только меньших или равных, либо только больших или равных медиане. Исходя из этого:

$$L_m=2\left(\left[\frac{m}{2}\right]-max(x'_{j1},x_{j3})\right); \quad x'_{j1}=\begin{cases} x_{j1}, & m-\text{нечетное} \\ x_{j1}+1, & m-\text{четное} \end{cases}$$

Группирование экспертов

В методе ранжирования для группирования экспертов используется алгоритм, приведенный в п. 4. Так как группирование обычно осуществляется при большой численности экспертной группы, то для проверки значимости коэффициента согласия на каждом шаге алгоритма используется статистика (55). Тем более, что эта статистика не зависит от численности экспертной группы (ν не зависит от m).

Наиболее компактная подгруппа экспертов находится из условия:

$$\max_q \chi^2_{расч}=\max_q\left[m_q(n-1)E\right],$$

где q – номер шага алгоритма, m_q – численность группы экспертов на q шаге.

6. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК, ПОЛУЧЕННЫХ ПО МЕТОДУ ПОПАРНОГО СРАВНЕНИЯ

Экспертные оценки n объектов, данные m экспертами, в этом методе представляются в виде m квадратных матриц $\|\delta^i_{jk}\|$: $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$; $k=1,2,...,n$. Причем $\delta^i_{jk}=1$, если i эксперт считает, что проявление измеряемого свойства у объекта j сильнее, чем у объекта k $(O_j>O_k)$, $\delta^i_{jk}=0$, если $O_j<O_k$ и $\delta^i_{jk}=\frac{1}{2}$ если i эксперт считает, что проявление измеряемого свойства у объектов j и k одинаково $(O_j\sim O_k)$.

Анализ оценок каждого эксперта

Метод попарного сравнения выгодно отличается от рассмотренных ранее методов классификации и ранжирования возможностью статистического анализа оценок каждого эксперта.

Оценки каждого эксперта можно проверить на выполнение свойства транзитивности. Объекты в методе попарного сравнения оцениваются с помощью установления эмпирических бинарных отношений предпочтения и безразличия. Чтобы считать, что эксперт измерил свойство по шкале порядков, требуется проверить, являются ли эти эмпирические отношения строгим порядком и эквивалентностью соответственно. Значит необходимо проверить свойства асимметричности, транзитивности отношения предпочтения и свойства симметричности и транзитивности отношения безразличия.

Выполнение свойства симметричности отношения безразличия означает, что

$$\delta^i_{jk}+\delta^i_{kj}=1. \tag{57}$$

Выполнение свойства транзитивности для отношения безразличия означает:

$$\delta^i_{jk}+\delta^i_{ks}+\delta^i_{js}=\delta^i_{jk}+\delta^i_{ks}+\delta^i_{sj}=3/2$$

для любых j,k,s, по которым хотя бы одно из δ_{jk}, δ_{ks}, δ_{js} равно $\frac{1}{2}$.

Для отношения предпочтения выполнение свойства асимметричности означает выполнение условия (57), а условия выполнения свойства транзитивности записывается в виде:

$$\delta^i_{jk}+\delta^i_{ks}+\delta^i_{sj}\le 2.$$

Невыполнение свойства транзитивности отношения предпочтения интерпретируется как наличие циклов в графе предпочтений, построенном на основе матрицы δ^i_{jk} (матрица $\|\delta^i_{jk}\|$ является матрицей смежности вершин графа). Пример графа предпочтений (предпочтения понимаются в смысле уровня проявления измеряемого свойства), в котором имеются циклы (контуры), приведен на рис. 4.

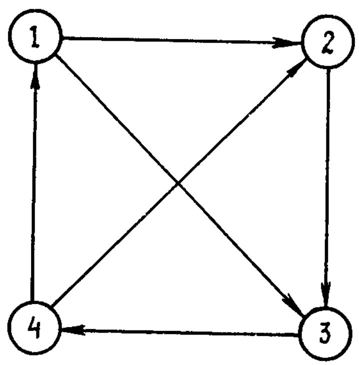


Рис. 4. Граф предпочтений объектов

Замкнутые циклы могут состоять из цепочек по 3, 4, 5 и т.д. объектов. Однако цикл из четырех объектов (см. цикл из 1–2–3–4 объектов на рис. 4) выражается через 2 цикла по 3 объекта (на рис. 4 это циклы 2–3–4 и 1–3–4). Аналогично наличие цикла из 5 объектов означает присутствие в нем трех циклов по 3 объекта в каждом, а цикл из t объектов содержит $t-2$ троичных цикла.

Таким образом, в качестве единиц измерений степени невыполнения свойства транзитивности отношения строгого порядка можно взять число циклов по 3 объекта (троичных циклов). Подобно коэффициенту согласия, для оценки транзитивности оценок эксперта введем коэффициент L_i, изменяющийся в интервале (0,1), который будет указывать на степень выполнения свойства транзитивности в оценках экспертов. Причем $L_i=1$, если свойство транзитивности выполняется между всеми оценками. Будем называть L_i коэффициентом транзитивности оценок i эксперта (в [6] он называется коэффициентом совместности) и определять по формуле:

$$L_i = 1 - \frac{d_i}{d_{max}}, \tag{58}$$

где d_i – число троичных циклов в графе предпочтений i эксперта; d_{max} – максимально возможное число троичных циклов в графе, насчитывающем n вершин.

Выведем формулу для вычисления d_{max}.

Обозначим через a_j число дуг графа, выходящих из j вершины $a_j=\sum_{k=1}^{n}\delta_{jk}$. Тогда $\sum_{j=1}^{n}a_j=\frac{n(n-1)}{2}$, а среднее значение $\bar{a}_j=\frac{n-1}{2}$.

Введем в рассмотрение функцию:

$$T=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j-\frac{n-1}{2}\right)^2=\sum_{j=1}^{n}a_j^2-(n-1)\sum_{j=1}^{n}a_j+\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 n=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_j^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\cdot n. \tag{59}$$

Покажем, что при увеличении числа троичных циклов на ρ функция T уменьшается на 2ρ.

Пусть имеется некоторый граф предпочтений, в котором $O_j>O_k$ т.е. $\delta_{jk}=1$, $a_j=\alpha$, т.е. в графе предпочтений α случаев $O_j>O_s$ ($s=1,2,\ldots,n$), $a_k=\beta$. При рассмотрении любой тройки объектов O_j, O_k, O_s ($s=1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n$) могут быть только 4 ситуации: 1) $O_j>O_s<O_k$; 2) $O_j>O_s>O_k$; 3) $O_j<O_s<O_k$ (объекты O_j, O_k, O_s образуют цикл); 4) $O_j<O_s>O_k$.

Пусть ситуация 1 в графе встречается γ раз из $(n-2)$ возможных, тогда число ситуаций типа 2 будет в графе $\alpha-\gamma-1$, а число ситуаций типа 3 в графе будет $\beta-\gamma$.

Если изменить порядок объектов O_j и O_k на обратный (т.е. считать, что $O_j<O_k$), то ситуации типа 3 не будут уже образовывать троичные циклы, а ситуации типа 2 будут.

Таким образом, при изменении порядка объектов O_j и O_k общее число троичных циклов в графе предпочтений изменится на величину:

$$\rho=(\alpha-\gamma-1)-(\beta-\gamma)=\alpha-\beta-1.$$

Так как при изменении порядка O_j и O_k значение α уменьшится на 1, а β увеличится на 1, то функция T, определяемая по формуле (5), изменится на величину:

$$\Delta T=(\alpha-1)^2+(\beta+1)^2-\alpha^2-\beta^2=-2(\alpha-\beta-1)=-2\rho. \tag{60}$$

Следовательно, функция T увеличивается при уменьшении числа троичных циклов в графе предпочтений и достигает максимума при $d_i=0$, т.е. когда свойство транзитивности в оценках объектов полностью выполняется.

Отметим, что если свойство транзитивности в оценках объектов выполняется, то величины a_j являются преобразованными рангами объектов (преобразованный ранг $R_j^{i(n)}=n-R_j^i$). Если в матрице $\|\delta_{jk}\|$ есть элементы равные 1/2, то a_j будут образовывать преобразованные связанные ранги.

Поэтому $T_{max}=\sum_{j=1}^{n-1}j^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2\cdot n=$

$$=\frac{n(n-1)[2(n-1)+1]}{6}-\frac{(n-1)^2\cdot n}{4}=\frac{n^3-n}{12} \tag{61}$$

при отсутствии в матрице $\|\delta_{jk}^i\|$ элементов, равных 1/2.

В случае, если выполняется свойство транзитивности отношения строгого порядка и эквивалентности, т.е. a_j образуют ряд со связанными рангами, то

$$T_{max}=\frac{n^3-n}{12}-\sum_{j=1}^{n_i}\frac{t_j^3-t_j}{12}, \tag{62}$$

где t_l – число повторений рангов, т.е. количество объектов образующих отдельные классы эквивалентности (мощности классов эквивалентности). Минимальное значение T_{min} достигается, когда все a_j равны $\frac{n-1}{2}$ (в случае n -нечетном), а при n -четном, когда множество a_j разбивается на два подмножества по $n/2$ элементов, элементы одного подмножества равны $\frac{n}{2}$, а второго $\frac{n}{2}-1$:

$$T_{min}=0 \quad \text{(при } n \text{ -нечетном)};$$

$$T_{min}=\left(\frac{n}{2}-\frac{n-1}{2}\right)^2\cdot\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1-\frac{n-1}{2}\right)^2\cdot\frac{n}{2}=$$

$$=\frac{n}{8}+\frac{n}{8}=\frac{n}{4} \quad \text{(при } n \text{ -четном)}.$$

Таким образом, в случае отсутствия в оценках эксперта отношения эквивалентности, функция T меняется в интервале $\left[0,\ \frac{n^3-n}{12}\right]$ для n -нечетных и в интервале $\left[\frac{n}{4},\ \frac{n^3-n}{12}\right]$ для четных n.

Учитывая (60), вычислим максимально возможное число троичных циклов.

Для n – нечетных $d_{max}=\frac{n^3-n}{24}$. (63)

Для n – четных
$$d_{max}=\frac{1}{2}\left(T_{max}-T_{min}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n^3-n}{12}-\frac{n}{4}\right]=\frac{n}{24}\left(n^2-1-3\right)=\frac{n(n^2-4)}{24}. \quad (64)$$

С учетом (63) и (64) формула (58) определения коэффициента транзитивности примет вид:

$$L_i=1-\frac{24d_i}{n^3-n} \quad \text{при } n \text{ – нечетном}; \quad (65)$$

$$L_i=1-\frac{24d_i}{n^3-4n} \quad \text{при } n \text{ – четном}. \quad (66)$$

Величины d_i определяются по следующей формуле:

$$d_i=\frac{T_{max}-T_i}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{n^3-n}{12}-\sum_{j=1}^{n}a_j^2+\frac{n(n-1)^2}{4}\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n-1)(n+1+3n-3)}{12}-\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right]= \quad (67)$$
$$=\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j^2.$$

Если в оценках эксперта присутствует отношение безразличия, есть $\delta_{jk}^i=\frac{1}{2}$, то с учетом формулы (62) выражения (65), (66) примут вид:

$$L_i=1-\frac{24d_i}{n^3-n-\sum_{j=1}^{n}(t_j^3-t_j)}; \quad (68)$$

$$L_i=1-\frac{24d_i}{n^3-4n-\sum_{j=1}^{n}(t_j^3-t_j)}, \quad (69)$$

где
$$d_i=\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}-\frac{\sum_{j=1}^{n}(t_j^3-t_j)}{24}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}a_j^2; \quad (70)$$

t_j^i определяются по значениям a_j для тех объектов j, которые содержат в матрице попарного сравнения $\delta_{jk}=1/2$.

Проверка на значимость коэффициента транзитивности оценок i эксперта заключается в статистической проверке гипотезы H_0 (о случайности проставления им элементов матрицы $\|\delta_{jk}^i\|$). Если окажется, что H_0 верна, то следует признать i эксперта некомпетентным в изучаемом вопросе. Если же гипотеза H_0 отвергается, то оценки эксперта характеризуются некоторой непротиворечивостью.

В качестве статистики для проверки гипотезы H_0 используем величину d_i. Найдем распределение d_i в случае, когда гипотеза H_0 верна.

Обозначим через
$$\delta_{jks}=\begin{cases}1, \text{ если } \delta_{jk}^i\cdot\delta_{ks}^i\cdot\delta_{sj}^i=1 \text{ или } \\ \delta_{kj}\cdot\delta_{js}\cdot\delta_{sk}=1; \\ 0 \text{ – в остальных случаях,}\end{cases}$$

т.е. $\delta_{jks}=1$, если есть троичный цикл в графе предпочтений, связывающий j, k, s вершины.

Тогда d_i есть сумма δ_{jks} по всевозможным наборам j, k, s, количество которых равно числу сочетаний из n по 3 (C_n^3):

$$d_i=\sum\delta_{jks} \quad \text{(индекс суммы не будем в дальнейшем записывать)} \quad (71)$$

Если элементы матрицы $\|\delta_{jk}^i\|$ независимы, то математическое ожидание величины δ_{jks} равно:

$$M(\delta_{jks})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=P[\delta_{jks}=1]. \quad (72)$$

Математическое ожидание d_i, при случайном заполнении матрицы $\|\delta^i_{jk}\|$ будет равно:

$$M(d_i)=\Sigma M(\delta_{jks})=\frac{1}{4}C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{24}. \quad (73)$$

Дисперсию d_i запишем в виде:

$$D(d_i)=M[(\Sigma\delta_{jks})^2]-[M(\Sigma\delta_{jks})]^2. \quad (74)$$

Раскроем отдельно первое и второе слагаемое $D(d_i)$;

$$M[(\Sigma\delta_{jks})^2]=M(\Sigma\Sigma\delta_{jks}\delta_{epq})=\Sigma M(\delta^2_{jks})+$$
$$+(n-3)\Sigma M(\delta_{jks}\delta_{jke})+(n-3)\Sigma M(\delta_{jks}\delta_{jes})+(n-3)\Sigma M(\delta_{jks}\delta_{eks})+$$
$$+C^2_{n-3}[\Sigma M(\delta_{jks}\delta_{jpq})+\Sigma M(\delta_{jks}\delta_{pkq})+\Sigma M(\delta_{jks}\delta_{pqs})]+$$
$$+C^3_{n-3}\Sigma M(\delta_{jks}\delta_{epq}). \quad (75)$$

Ввиду $\delta^2_{jks}=\delta_{jks}$, $M(\delta^2_{jks})=\frac{1}{4}$.

$$M(\delta_{jks}\cdot\delta_{jke})=M(\delta_{jks}\cdot\delta_{jep})=M(\delta_{jks}\delta_{epq})=\frac{1}{16}.$$

Поэтому первое слагаемое (74) с учетом (75) перепишется в виде:

$$M[(\Sigma\delta_{jks})^2]=C_n^3\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\left(3(n-3)+\frac{3(n-3)(n-4)}{2}+\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}\right)\right].$$

После преобразования получим

$$M[(\Sigma\delta_{jks})^2]=\frac{C_n^3}{16}(C_n^3+3). \quad (76)$$

После подстановки (76) и (73) в (74) выражение для $D(d_i)$ будет иметь вид:

$$D(d_i)=\frac{C_n^3}{16}(C_n^3+3)-\left(\frac{C_n^3}{4}\right)^2=\frac{3}{16}C_n^3 \quad (77)$$

Проводя подобные выкладки [6], получим для третьего момента

$$\mu_3(d_i)=-\frac{3}{32}C_n^3(n-4). \quad (78)$$

Для того чтобы выяснить закон распределения d_i, обратимся к формулам (67) и (70), из которых видно, что d_i пропорционально $\sum_{j=1}^{n}a_j^2$. При достаточно большом числе объектов $\sum_j^n\delta_{jk}=a_j$ в соответствии с центральной предельной теоремой распределена по нормальному закону, а значит $\sum_{j=1}^{n}a_j^2$ распределена по закону χ^2 (Пирсона).

Таким образом, можем записать, что линейное преобразование d_i подчинено закону Пирсона.

Известно, что $M[\chi^2]=\nu$ (число степеней свободы), $D(\chi^2)=2\nu$; $\mu_3(\chi^2)=8\nu$.

Запишем линейное преобразование d_i в следующем виде:

$$y=\alpha\left[M(d_i)-d_i+\frac{1}{2}\right]+\nu \quad (79)$$

(коэффициент $\frac{1}{2}$ введен как поправка на дискретность d_i);

$M(y)=\nu$; $D(y)=\alpha^2D(d_i)$; $\mu_3(y)=\alpha^3\mu_3(d_i)$.

Коэффициент α в (79) вычислим из условия $D(\chi^2)=D(y)$:

$$2\nu=\alpha^2\frac{3C_n^3}{16},$$

откуда

$$\alpha=\sqrt{\frac{32\nu}{3C_n^3}}. \quad (80)$$

А величину ν определим из условия равенства соотношений:

$$\frac{\mu_3^2(\chi^2)}{D^3(\chi^2)}=\frac{64\nu^2}{8\nu^3}=\frac{\mu_3^2(y)}{D^3(y)};$$

$$\frac{8}{\nu}=\frac{\left[\frac{3}{32}C_n^3\cdot(n-4)\right]^2}{\left(\frac{3}{16}C_n^3\right)^3}. \quad (81)$$

После упрощения (81) получим

$$\nu = \frac{6\,C_n^3}{(n-4)^2}\,. \tag{82}$$

Подставляя (82) в (80), получим

$$\alpha = \frac{8}{n-4}\,. \tag{83}$$

Следовательно, при вычисленных коэффициентах α и ν y распределена по χ^2 и значит можно записать статистику для проверки значимости коэффициента L_i

$$\chi^2_{расч} = \frac{8}{n-4}\left[\frac{1}{4}C_n^3 - d_i + \frac{1}{2}\right] + \frac{6\,C_n^3}{(n-4)^2}$$

с числом степеней свободы $\nu = \dfrac{6\,C_n^3}{(n-4)^2}$.

Так как величина ν при вычислении по формуле (82) может оказаться дробной, то ее следует округлить до ближайшего большего целого.

Решающим правилом для того, чтобы считать коэффициент L_i значимым, является соотношение

$$\chi^2_{расч} \geqslant \chi^2_{табл}.$$

При небольшом числе объектов ($n \leqslant 10$) для проверки значимости коэффициента транзитивности используется таблица распределения d_i, приведенная в приложении 5.

Определение групповых оценок объектов

Определение групповых оценок объектов в методе попарного сравнения может осуществляться с использованием различных моделей (подходов). Выбор модели производит исследователь (системный аналитик).

Модель 1. Вычисляются сначала для каждого эксперта ($i = 1, 2, \ldots, m$) величины $a_j^i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{jk}^i$.

От значений a_j^i переходят к рангам объектов R_j^i. Объекту с максимальным a_j^i присваивается ранг $R_j^i = 1$, следующему по значению a_j^i ранг равный 2 и т.д. Если $a_j^i = a_k^i$, то ранги объектов j и k определяются в соответствии с процедурой вычисления связанных рангов.

Следует отметить, что для тех экспертов, у которых коэффициент транзитивности равен единице, ранги объектов будут вычисляться по формуле:

$$R_j^i = n - a_j^i\,.$$

После перехода от исходных матриц попарного сравнения $\|\delta_{jk}^i\|$ к рангам R_j^i групповые оценки определяются так же, как и в методе ранжирования.

Приведенная модель является наиболее строгой с точки зрения использования адекватных статистик при обработке шкальных значений шкалы порядков.

Модель 2. Эту модель можно использовать при достаточно большом числе экспертов ($m \geqslant 12$).

Вычисляются элементы матрицы $\| b_{jk} \|$:

$$b_{jk} = \sum_{i=1}^{m} K_i\, \delta_{jk}^i\,, \tag{84}$$

где K_i – коэффициенты, характеризующие компетентность экспертов (если последние не указаны, то $K_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, m$)).

Величину b_{jk} можно интерпретировать как степень предпочтения объекта j объекту k, заданную всеми экспертами.

Тогда $W_j^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}$ следует рассматривать как степень предпочтения объекта j всей совокупности объектов. Иначе говоря, величины $W_j^{(1)}$ будут характеризовать уровень проявления измеряемого свойства у объекта j. Пронормируем величины $W_j^{(1)}$ и получим $q_j^{(1)} = W_j^{(1)} \big/ \sum_{l=1}^{n} W_l^{(1)}$.

Отметим, что при определении степени предпочтения объекта j относительно всей совокупности объектов правильнее было бы не просто суммировать b_{jk} , а учитывать, относительно каких объектов он предпочитается. Если он предпочитается (b_{jk} – большое) относительно объектов с низким уровнем проявления свойства ($W_k^{(1)}$ и $q_k^{(1)}$ небольшие), то величины b_{jk} не должны играть особой роли. Если же для j-го объекта b_{jk} большие при сравнении его с объектами, для которых $W_k^{(1)}$ большие, то это существенно для общей оценки этого объекта. Поэтому для учета вышесказанного производится коррекция $W_j^{(1)}$ и соответственно $q_j^{(1)}$ по формуле:

$$W_j^{(2)}=\sum_{k=1}^{n} q_k^{(1)} b_{jk} = \frac{1}{\sum_{\ell=1}^{n} W_\ell^{(1)}} \sum_{k=1}^{n} W_k^{(1)} b_{jk}\,; \tag{85}$$

$$q_j^{(2)} = W_j^{(2)} \Big/ \sum_{\ell=1}^{n} W_\ell^{(2)}. \tag{86}$$

Обозначим $\sum_{\ell=1}^{n} W_\ell^{(1)} = \lambda^{(1)}$, тогда выражение (85) перепишется в виде:

$$W_j^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \sum_{k=1}^{n} W_k^{(1)} b_{jk} \quad (j=1,2,\ldots,n).$$

Процедуру коррекции можно продолжить и далее вычислив $W_j^{(3)}$ и т.д., используя на каждом шаге коррекции формулу:

$$W_j^{(t)} = \frac{1}{\lambda^{(t-1)}} \sum_{k=1}^{n} W_k^{(t-1)} b_{jk} \quad (j=1,2,\ldots,n). \tag{87}$$

При достаточно большом числе итераций эта процедура сходится, т.е. $W_j^{(t)}$ и $\lambda^{(t)}$ остаются неизменными от итерации к итерации. В векторной форме выражение (87), опустив в нем индекс итерации, запишем в виде:

$$\lambda \overline{W} = \| b_{jk} \| \, \overline{W}. \tag{88}$$

Векторное уравнение (88) есть не что иное, как уравнение для нахождения собственного вектора матрицы $\| b_{jk} \|$, а итерационная процедура, описанная выше, есть одна из процедур вычисления собственного вектора, соответствующая действительному, максимальному по значению, собственному числу этой матрицы.

Таким образом, в соответствии с моделью 2 групповые оценки объектов определяются как собственный вектор матрицы b_{jk}, соответствующий максимальному действительному собственному числу этой матрицы. Такой вектор всегда существует, если элементы $b_{jk} \geq 0$ и матрица $\| b_{jk} \|$ неразложима, что всегда имеет место при определении b_{jk} по формуле (84).

Модель 3 (вероятностная модель). В соответствии с этой моделью вычисляются

$$\gamma_{jk} = \sum_{i=1}^{m} \delta_{jk}^{i}. \tag{89}$$

Элементы матрицы $\| \gamma_{jk} \|$ показывают, сколько экспертов предпочли объект j объекту k.

Отношение $\frac{\gamma_{jk}}{m} = p_{jk}$ при достаточно большом числе экспертов можно интерпретировать как вероятность предпочтения объекта j объекту k (отсюда и название модели), т.е. $\Delta W_{jk} = W_j - W_k \geq 0$.

Многочисленные психологические исследования [5, 7] показывают, что при оценке разности уровней проявления измеряемого свойства пары объектов ΔW_{jk} последняя носит случайный характер и распределена по нормальному закону. Поэтому в данной модели делается предположение, что все разности $\Delta W_{jk} = W_j - W_k$ $(k, j = 1,2,\ldots,n\,;\, j \neq k)$ распределены по нормальному закону с дисперсией σ, одинаковой для всех пар j и k (рис. 5). Следовательно, можно записать, что

$$\frac{\Delta W_{jk} - M(\Delta W_{jk})}{\sigma} = N(0;1).$$

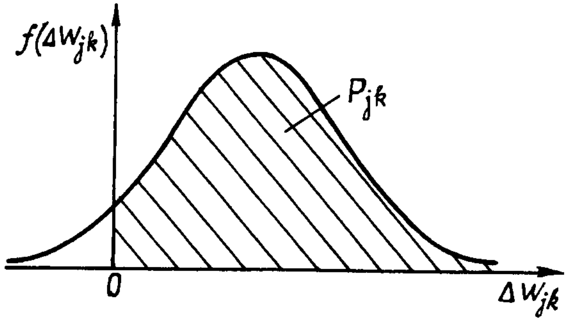


Рис. 5. Плотность функции распределения разности уровней проявления измеряемого свойства пары объектов

Математическое ожидание $M(\Delta W_{jk})$ из-за независимости объектов равно $M(W_j) - M(W_k)$. Точечными оценками групповых оценок и являются $M(W_j)$, которые необходимо определить.

Исходя из вычисленных вероятностей предпочтения P_{jk}, находятся значения аргумента табулированной нормальной функции распределения x_{jk}:

$$x_{jk} = \frac{M(\Delta W_{jk})}{\sigma}.$$

Откуда получаем:

$$M(W_j) - M(W_k) = \sigma \cdot x_{jk}. \qquad (90)$$

После суммирования (90) по k получаем

$$n\,M(W_j) = \sigma \sum_{k=1}^{n} x_{jk} + \sum_{k=1}^{n} M(W_k). \qquad (91)$$

Так как σ и $\sum_{k=1}^{n} M(W_k)$ не зависят от j, т.е. являются константами, то (91) можно переписать в виде:

(92) $$M(W_j) = a \sum_{k=1}^{n} x_{jk} + b, \qquad (92)$$

где a и b – некоторые $const$.

Используя (92), получим групповые оценки объектов с точностью до положительных линейных преобразований.

Таким образом, для получения групповых оценок по модели 3 необходимо вычислить P_{jk}, затем перейти по таблицам нормального распределения x_{jk}, после чего определить:

$$W_j = \sum_{k=1}^{n} x_{jk}. \qquad (93)$$

Следует отметить, что после определения W_j по формуле (93) некоторые W_j будут отрицательные, а сумма W_j будет равна нулю. Поэтому для лучшей интерпретации групповых оценок необходимо путем линей-

ных преобразований перейти к другой шкале измерения. Так, например, если групповые оценки измеряются по шкале отношений, то необходимо задать величину $b = \sum_{j=1}^{n} W_j$ в (41), а коэффициент a в этом случае будет равен $1/n$. Если же групповые оценки измеряются в шкале интервалов, то необходимо задать два шкальных значения, исходя из которых вычисляются коэффициенты преобразования a и b.

Модель 3 так же, как и модель 2, можно использовать только при большом числе экспертов, при этом групповые оценки будут получены по шкале интервалов или отношений (в модели 3) или в шкале отношений (в модели 2).

Анализ достоверности групповых оценок

В методе попарного сравнения анализ достоверности групповых оценок осуществляется с использованием коэффициента согласия.

Для получения формулы коэффициента согласия воспользуемся общим его выражением:

$$E = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} R_{il}.$$

Коэффициент корреляции двух матриц попарного сравнения рассчитывается по формуле:

$$R_{il} = \frac{cov(\sigma_{jk}^{i}, \sigma_{jk}^{l})}{\vartheta_i \vartheta_l} = \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sigma_{jk}^{i} - M(\sigma_{jk}^{i})\right)\left(\sigma_{jk}^{l} - M(\sigma_{jk}^{l})\right)}{\sqrt{\sum_j \sum_k \left(\sigma_{jk}^{i} - M(\sigma_{jk}^{i})\right)^2}\sqrt{\sum_j \sum_k \left(\sigma_{jk}^{l} - M(\sigma_{jk}^{l})\right)^2}}. \qquad (94)$$

Это – известная формула коэффициента корреляции, только в ней матрица попарного сравнения рассматривается как вектор размерности n^2.

Как указывалось ранее, $\sigma_{jk}^{i} + \sigma_{kj}^{i} = 1$, поэтому $M(\sigma_{jk}^{i}) = \frac{1}{2}$, и значит $\sigma_{jk}^{i} - M(\sigma_{jk}^{i}) = -(\sigma_{kj}^{i} - M(\sigma_{kj}^{i}))$. Следовательно, в выражении (94) двойные суммы $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}$ можно заменить на суммы по верхней или нижней полуматрицы $\|\sigma_{jk}^{i}\|$:

$$R_{il}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=j+1}^{n}\left(\delta_{jk}^{i}-\frac{1}{2}\right)\left(\delta_{jk}^{l}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=j+1}^{n}\left(\delta_{jk}^{i}-\frac{1}{2}\right)^{2}}\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=j+1}^{n}\left(\delta_{jk}^{l}-\frac{1}{2}\right)^{2}}}. \quad (95)$$

В случае, когда все $\delta_{jk}^{i}=1$ или 0, то $\left(\delta_{jk}^{i}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ и выражение для R_{il} запишется в виде:

$$R_{il}=\frac{4}{C_n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n}\left(\delta_{jk}^{i}-\frac{1}{2}\right)\left(\delta_{jk}^{l}-\frac{1}{2}\right).$$

Подставляя выражение для R_{il} в формулу для E, получим:

$$E=\frac{1}{m^2}\frac{4}{C_n^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n}\left(\delta_{jk}^{i}-\frac{1}{2}\right)\left(\delta_{jk}^{l}-\frac{1}{2}\right)= \quad (96)$$

$$=\frac{4}{m^2C_n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\delta_{jk}^{i}-\frac{m}{2}\right)^2.$$

С учетом обозначения (89) последнее перепишем в виде:

$$E=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=j+1}^{n}\gamma_{jk}^{2}-m\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=j+1}^{n}\gamma_{jk}+\frac{1}{4}m^2C_n^2}{\frac{1}{4}m^2C_n^2}$$

$$E=\frac{4H}{m^2C_n^2}, \quad (97)$$

где

$$H=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n}\left(\gamma_{jk}^{2}-m\,\gamma_{jk}\right)+\frac{1}{4}m^2C_n^2. \quad (98)$$

Отметим, что в выражении для H стоят суммы по элементам верхней полуматрицы $\|\gamma_{jk}\|$, но можно использовать и суммы по нижней полуматрице.

Полному согласию экспертов соответствует полуматрица, элементы которой равны m или 0, при этом $H=\frac{m^2}{4}C_n^2$, а коэффициент согласия $E=1$.

Рассмотренный коэффициент согласия E отличается от коэффициента, предложенного Кендэлом [6], и связан с ним линейным преобразованием.

Выведем статистику для проверки значимости коэффициента согласия.

Из выражения (96) для коэффициента согласия видно, что при достаточно большом числе экспертов $\sum_{i=1}^{m}\delta_{jk}^{i}$ стремится к нормальному распределению, а значит линейное преобразование E распределено по χ^2.

В приложении 1 приведены выражения (130) (131) (136) для первых трех моментов коэффициента согласия. Для метода попарного сравнения число оценок экспертов $k=C_n^2$. Поэтому выражения для первых двух моментов коэффициента согласия примут вид:

$$M(E)=\frac{1}{m};$$

$$D(E)=\frac{2(m-1)}{(C_n^2-1)m^3}\approx\frac{2(m-1)}{m^3C_n^2}=\frac{4C_m^2}{m^4C_n^2}.$$

Так как распределение δ_{jk}^{i} симметрично, т.е. $\mu_3(\delta_{jk}^{i})=0$, то третий момент E будет вычисляться по формуле:

$$\mu_3(E)=\frac{8(m-1)(m-2)}{m^5(C_n^2-1)^2}\approx\frac{48}{m^6}\cdot\frac{C_m^3}{(C_n^2)^2}.$$

Для распределения χ^2: $M(\chi^2)=\nu$ (ν - число степеней свободы); $D(\chi^2)=2\nu$; $\mu_3(\chi^2)=8\nu$. Запишем линейное преобразование для E в следующем виде:

$$z=a(E-M(E))+\nu \tag{99}$$

$$M(z)=\nu;\quad D(z)=a^2D(E);\quad \mu_3(z)=a^3\mu_3(E).$$

Коэффициент a определим из условия $D(z)=D(\chi^2)$:

$$2\nu=a^2\frac{4C_m^2}{m^4C_n^2};$$

$$a=\sqrt{\frac{m^4C_n^2\cdot\nu}{2C_m^2}}. \tag{100}$$

Число степеней свободы определим из условия равенства соотношений:

$$\frac{\mu_3^2(\chi^2)}{D^3(\chi^2)}=\frac{64\nu^2}{8\nu^3}=\frac{\mu_3^2(z)}{D^3(z)};$$

$$\frac{8}{\nu}=\left[\frac{48C_m^3}{m^6(C_n^2)^2}\right]^2\cdot\left[\frac{m^4C_n^2}{4C_m^2}\right]^3. \tag{101}$$

После преобразования (101) выражение для ν примет вид:

$$\nu=C_n^2\frac{m(m-1)}{(m-2)^2}. \tag{102}$$

Подставляя (102) в (100), получим:

$$a=\sqrt{\frac{m^4C_n^2}{2C_m^2}\cdot C_n^2\frac{m(m-1)}{(m-2)^2}}=\frac{m^2C_n^2}{m-2}. \tag{103}$$

Таким образом, после подстановки выражений (102) и (103) в (99) статистика для проверки значимости коэффициента согласия примет вид:

$$\chi^2_{расч}=\frac{m^2C_n^2}{m-2}\left(E+\frac{1}{m(m-2)}\right). \tag{104}$$

При малом числе экспертов ($m\leq 6$) в качестве статистики используют величину H, вычисляемую по формуле (98). Таблицы распределения H приведены в приложении 6.

Решающими правилами, при которых коэффициент согласия значим, являются следующие неравенства:

$$\chi^2_{расч}\geq\chi^2_{табл} \quad \text{или} \quad H_{расч}\leq H_{табл}.$$

Группирование экспертов

При использовании алгоритма группирования на каждом шаге для проверки значимости коэффициента согласия используется выражение (104), число степеней свободы χ^2 определяется по формуле (102) с последующим округлением ν до ближайшего большего целого.

Так как статистика (102) и ν зависят от числа экспертов, то наиболее компактная подгруппа находится из условия

$$\max_q\left(\chi^2_{расч\,q}-\chi^2_{табл\,q}\right),$$

где $\chi^2_{расч\,q}$ – вычисленное значение статистики на q шаге, $\chi^2_{табл\,q}$ – табличное значение статистики на q шаге, соответствующая ν_q.

Уровень значимости α при проверке гипотезы о независимости оценок экспертов на всех шагах алгоритма должен быть одинаковым.

7. ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПО МЕТОДАМ, ОСНОВАННЫМ НА ШКАЛАХ ОТНОШЕНИЙ И ИНТЕРВАЛОВ

Как указывалось в п. 1, для измерения сложных свойств в шкале отношений могут использоваться несколько методов. Наиболее распространенными методами являются метод нормирования и парных сравнений. Процедуры обработки по этим методам отличаются только на этапе анализа оценок каждого эксперта.

Обработка результатов экспертного опроса, проведенного по методу нормирования

Результаты опроса, проведенного по методу нормирования, представляются в виде матрицы $\|W_j^i\|$ ($i=1,2,\ldots,m$ индекс столбцов, $j=1,2,\ldots,n$ – индекс строк).

Анализ оценок каждого эксперта. Оценки объектов, полученные по методу нормирования, проверить не представляется возможным. Но можно по оценкам эксперта определить его компетентность. В п. 2 указывалось, что одним из подходов к оценке компетентности является подход, основанный на учете оценок эксперта в экспертизе.

Суть этого подхода в том, что компетентным считают эксперта, оценки которого близки к групповым.

Критерием соответствия оценок эксперта i групповым оценкам является коэффициент корреляции:

$$R_{ir}=\frac{cov(W_j^i, W_j^r)}{\delta_i\ \delta_r}. \tag{105}$$

Но R_{ir} может принимать отрицательное значение, что затрудняет интерпретацию его в качестве коэффициента компетентности. Поэтому для характеристики компетентности экспертов как степени близости их оценок к групповым используется выражение (106), которое больше нуля при положительных W_j^i:

$$K_i=\sum_{j=1}^{n} W_j^i W_j^r. \tag{106}$$

Отметим, что коэффициент компетентности, вычисляемой по формуле (106), линейно связан с коэффициентом корреляции (105).

Групповые оценки объектов в методах, основанных на шкалах отношений или интервалов, вычисляются как среднее личных оценок экспертов, причем, если известны характеристики компетентности экспертов, то их личные оценки взвешиваются:

$$W_j^r=\frac{1}{\sum\limits_{\ell=1}^{m} K_\ell}\sum_{i=1}^{m} K_i W_j^i. \tag{107}$$

Выражение (107), как и среднее, является адекватной статистикой для шкал отношений и интервалов [1].

Для определения K_i используем итерационную процедуру, на каждом шаге t которой будем вычислять $W_j^{r(t)}$ по формуле (107), а затем $K_i^{(t)}$ путем подстановки $W_j^{r(t)}$ в (106).

Представив коэффициенты компетентности в виде вектора-столбца $\overline{K}$, а групповые оценки объектов в виде вектора-столбца $\overline{W}^r$, формулы (106) и (107) итерационной процедуры запишем в виде:

$$\overline{W}^{r(t)}=\frac{1}{\sum\limits_{\ell=1}^{m} K_\ell^{(t-1)}}\|W_j^i\|\,\overline{K}^{(t-1)}; \tag{108}$$

$$\overline{K}^{(t)}=\|W_j^i\|^T\,\overline{W}^{r(t)}, \tag{109}$$

где $\|W_j^i\|^T$ – транспонированная матрица $\|W_j^i\|$.

Обозначив $\sum\limits_{\ell=1}^{m} K_\ell^{(t-1)}$ через $\lambda^{(t-1)}$ и подставив (108) в (109), получим:

$$\lambda^{(t-1)}\overline{K}^{(t)}=\|W_j^i\|^T\|W_j^i\|\,\overline{K}^{(t-1)}. \tag{110}$$

Матрицу размерности $m\times m$, полученную произведением матриц $\|W_j^i\|^T$ и $\|W_j^i\|$, обозначим через $\|b_{i\ell}\|$, тогда (110) перепишется в виде:

$$\lambda^{(t-1)}\overline{K}^{(t)}=\|b_{i\ell}\|\,\overline{K}^{(t-1)}. \tag{111}$$

Отметим, что все элементы матрицы $\|b_{i\ell}\|$ положительны и вычисляются по формуле:

$$b_{i\ell}=\sum_{j=1}^{n} W_j^i W_j^\ell.$$

Векторное выражение (111) точно такое же, как и (87), для определения групповых оценок в методе попарного сравнения. Как указывалось в п. 6, при большом числе итераций эта процедура сходится, а результатом будет собственный вектор матрицы $\| b_{il} \|$, соответствующий максимальному действительному собственному числу.

Таким образом, коэффициенты компетентности экспертов определяются как собственный вектор матрицы $\| b_{il} \|$, полученной попарным скалярным произведением столбцов матрицы оценок объектов $\| W_j^i \|$.

Определение групповых оценок объектов. В методах, основанных на шкалах отношений и интервалов, определяются точечные и интервальные оценки объектов. Так как каждый эксперт может иметь свой коэффициент компетентности, который является характеристикой точности его оценок, то для определения групповых оценок используется аппарат обработки неравноточных наблюдений [8].

Точечная оценка групповой оценки объекта j вычисляется как средневзвешенная личных оценок:

$$W_j^r = \sum_{i=1}^{m} K_i W_j^i \Big/ \sum_{l=1}^{m} K_l \tag{112}$$

Точечная групповая оценка без указания точности и надежности малоопределенна, так как W_j^r следует рассматривать как случайную величину, зависящую от состава экспертов. Если представить гипотетическую ситуацию, когда опросили всех возможных экспертов (генеральную совокупность экспертов), то получим истинную оценку объекта $j - W_j^*$. Вычисленная же по формуле (112) W_j^r является оценкой W_j^*.

Для того чтобы получить представление о точности и надежности оценки W_j^r для W_j^*, определим интервал $(W_j^r - \Delta\ , W_j^r + \Delta\ )$, который будет включать W_j^* с заданной вероятностью P_g. Такой интервал называется доверительным интервалом, а P_g — доверительной вероятностью.

Для определения доверительного интервала W_j^* воспользуемся методикой расчета доверительного интервала среднего при неравноточных наблюдениях [8].

Сначала вычисляется оценка дисперсии $S^2_{W_j^*}$ в соответствии с выражением:

$$S^2_{W_j^*} = \frac{1}{(m-1)\sum_{l=1}^{m} K_l} \sum_{i=1}^{m} (W_j^i - W_j^r)^2 \cdot K_i \ ,$$

где W_j^r — определяется по формуле (112).

Случайная величина W_j^r распределена по закону Стьюдента с математическим ожиданием W_j^*, дисперсией $S^2_{W_j^*}$ и числом степеней свободы $\nu = m - 1$.

Задавшись доверительной вероятностью P_g (обычно $P_g > 0{,}70$), находим квантиль распределения Стьюдента t_{P_g} (в приложении 7 приведены квантили t для $M(t)=0$ и $\sigma(t)=1$), соответствующий $\alpha = P_g$. Тогда в интервал $[a, b]$ (рис. 6) с вероятностью P_g будут попадать все W_j. Если же построить симметричный относительно вычисленного по формуле (112) W_j^r такой же интервал (на рис. 6 он выделен), то можно утверждать, что с вероятностью P_g он будет включать W_j^*. Значит границы доверительного интервала будут определяться следующим выражением:

$$W_j^r - S_{W_j^*} t_{P_g} \le W_j^* \le W_j^r + S_{W_j^*} t_{P_g} .$$

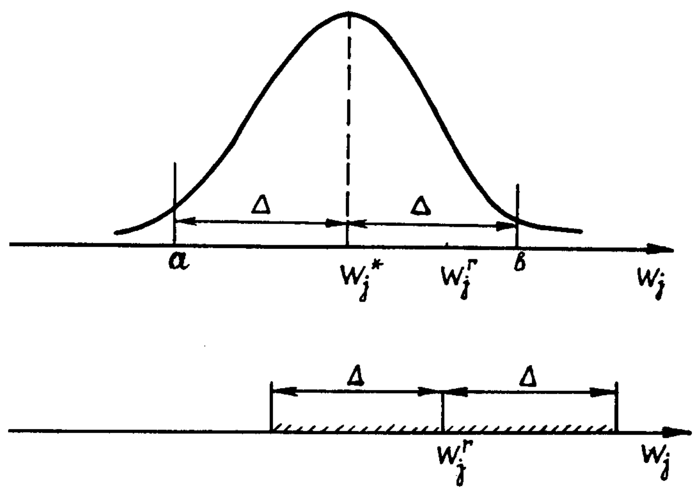


Рис. 6. Доверительный интервал групповой оценки объекта $(\Delta = t_{P_g} \cdot S_{W_j^*})$

Если доверительный интервал включает отрицательные значения (нижняя граница меньше нуля), то надежность групповой оценки этого объекта низка и системный аналитик должен сделать необходимые выводы: или исключить из рассмотрения этот объект, или уточнить у экспертов оценки объекта.

В заключение остановимся на вопросе приведения личных шкал измерения экспертов к единой шкале, так как групповые оценки объектов можно получить, используя оценки экспертов измеренные в одной шкале.

В п. 1 указывалось, что в большинстве случаев приведение личных шкал к единой осуществляется путем нормировки оценок каждого эксперта:

$$W_j^i = \frac{\rho_j^i}{\sum_{k=1}^{n} \rho_k^i}. \tag{113}$$

Это объясняется тем, что единая шкала измерения (шкала отношений) задается одним шкальным значением, равным 1, соответствующим гипотетическому объекту ($O_э$), у которого проявление измеряемого свойства равно суммарному проявлению свойства всех объектов:

$$O_э = O_1 \oplus O_2 \oplus \ldots \oplus O_n.$$

Используя тот же самый подход приведения личных шкал к единой, можно задать единую шкалу, указав шкальное значение одного из объектов, например, $m(O_1) = 1$. Тогда личные оценки эксперта i будут приводиться к единой шкале по формуле:

$$W_j^i = \frac{\rho_j^i}{\rho_1^i} \quad (j = 2, 3, \ldots, n). \tag{114}$$

Выбор единой шкалы не должен, в конечном итоге, отражаться на групповых оценках. Однако если использовать для нормировки оценок (113) или (114), то групповые оценки могут отличаться даже порядком. Например, пусть даны оценки двух равнокомпетентных экспертов:

	$Э_1$	$Э_2$
O_1	0,5	0,5
O_2	0,3	0,5
O_3	0,2	1,0

Если для приведения к единой шкале воспользоваться нормировкой (113), а затем определить групповые оценки объектов по формуле (112), то получим $W_1^г = 0{,}375$; $W_2^г = 0{,}275$; $W_3^г = 0{,}350$. При использовании формулы (114) для нормировки личных оценок получим: $W_1^г = 1{,}0$; $W_2^г = 0{,}80$; $W_3^г = 1{,}2$. При использовании различных единых шкал групповые оценки объекта 1 и 3 отличаются порядком.

Это объясняется тем, что личные шкалы экспертов не эквивалентны (в приведенном примере порядок объектов у экспертов различен), а значит и шкалы, в которых измеряются групповые оценки, не эквивалентны.

Следовательно, выбор формулы (113) для нормировки оценок экспертов должен быть специально обоснован, в противном случае ее использовать нельзя. Чтобы исключить проблему приведения личных шкал к единой, необходимо при опросе экспертов задать один объект-эталон, относительно которого осуществлять оценки других объектов (если осуществляется измерение по шкале отношений) или два эталона (если свойство измеряется по шкале интервалов).

На практике формулу (113) для нормировки используют в тех случаях, когда коэффициент согласия экспертов достаточно большой. В этом случае с некоторым приближением можно считать, что личные шкалы экспертов эквивалентны.

Анализ достоверности групповых оценок. Как указывалось выше, одной из оценок достоверности (надежности) групповых оценок являются доверительные интервалы. Помимо этого, достоверность может быть оценена через коэффициент согласия экспертов и устойчивость групповых оценок.

Оценка согласованности экспертов. Коэффициент согласия вычисляется в соответствии с общей формулой (1), которую запишем в виде:

$$E = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} R_{il} = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{\sum_{j=1}^{n} (W_j^i - M(W_j^i))(W_j^l - M(W_j^l))}{(n-1) \quad s^i s^l};$$

$$E = \frac{1}{(n-1)m^2} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \frac{W_j^i - M(W_j^i)}{s^i} \cdot \frac{W_j^l - M(W_j^l)}{s^l} \right) =$$
$$= \frac{1}{(n-1)m^2} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{W_j^i - M(W_j^i)}{s^i} \right)^2. \tag{115}$$

Получим статистику для проверки значимости коэффициента согласия. Иэ выражения (115) следует, что $\sum_{i=1}^{m} (W_j^i - M(W_j^i)) / s^i$ при достаточно большом числе экспертов ($m > 5$) стремится к нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией m. Тогда $\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{i=1}^{m} \frac{W_j^i - M(W_j^i)}{s^i} \right)^2$ распределено по закону χ^2 (Пирсона) с числом степеней свободы $\nu = n-1$ [3]. Следовательно, статистикой для проверки значимости E будет:

$$\chi^2_{расч} = m(n-1)E \ .$$

Решающим правилом для того, чтобы считать коэффициент согласия значимым и, соответственно, групповые оценки достоверными, является неравенство

$$\chi^2_{расч} \geq \chi^2_{табл} \ .$$

Отметим, что процедура проверки значимости коэффициента согласия в методе нормирования совпадает с процедурой в методе ранжирования, изложенной в п. 5.

Оценка устойчивости групповых оценок. В методах, основанных на шкалах отношений и интервалов, определение устойчивости групповых оценок, приведенное в п. 3, можно расширить. Дадим два определения устойчивости.

Определение 1. Устойчивость групповых оценок есть независимость порядка групповых оценок объектов от выборочной экспертной группы из генеральной совокупности экспертов. Как и при определении доверительных интервалов групповых оценок, предполагается существование генеральной совокупности экспертов, а опрошенные эксперты составляют выборку из этой генеральной совокупности. Для оценки устойчивости требуется определить вероятность (P_y) того, что порядок групповых оценок, определенный по оценкам заданной группы экспертов, например, $W_3^г > W_1^г > W_2^г > W_4^г$, совпадает с порядком $W_3^* > W_1^* > W_2^* > W_4^*$.

Определение 2. Устойчивость групповых оценок – сохранение порядка групповых оценок при исключении из заданной группы экспертов любой подгруппы численностью ℓ. Это определение совпадает с определением, данным в п. 3.

Остановимся на процедуре оценки устойчивости групповых оценок, соответствующей определению 1.

В упорядоченном ряду групповых оценок перенумеруем объекты их порядковыми номерами ($k = 1, 2, \ldots, n$). Тогда, ввиду независимости оценок объектов, искомая вероятность P_y будет определяться произведением вероятностей:

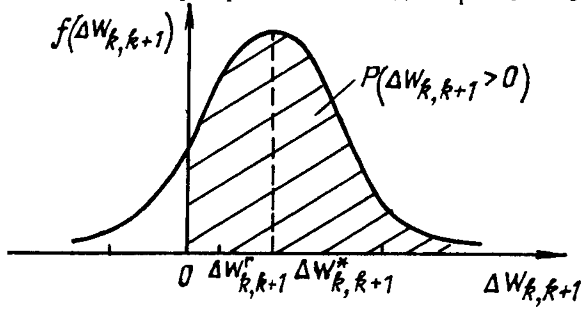
$$P_y = \prod_{k=1}^{n-1} P(W_k^* > W_{k+1}^*), \qquad (116)$$

где $P(W_k^* > W_{k+1}^*)$ – вероятность, что $W_k^* > W_{k+1}^*$.

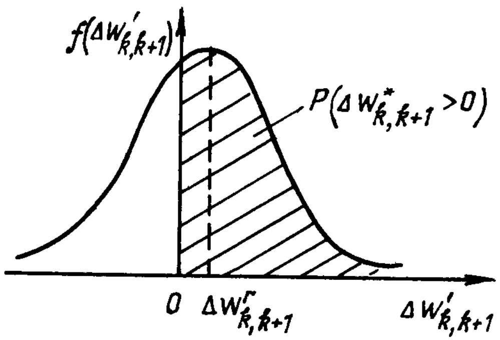
Введем обозначения $\Delta W^*_{k,k+1} = W_k^* - W_{k+1}^*$ и $\Delta W^г_{k,k+1} = W_k^г - W_{k+1}^г$. Как указывалось ранее, $W_k^г$ распределена по закону Стьюдента, поэтому и $\Delta W^г_{k,k+1}$ тоже распределена по закону Стьюдента (рис. 7,а) с математическим ожиданием $\Delta W^*_{k,k+1}$ и дисперсией, вычисляемой по формуле:

$$\sigma^2_{\Delta W^*_{k,k+1}} = \frac{1}{(m-1)\sum_{\ell=1}^{m} K_\ell} \sum_{i=1}^{m} K_i \left(W_k^i - W_{k+1}^i - \Delta W^г_{k,k+1}\right)^2.$$

Число степеней свободы распределения Стьюдента равно $m-1$.



а)



б)

Рис. 7. Определение вероятности $P(\Delta W^*_{k,k+1} > 0)$

Для определения вероятности $P(\Delta W^*_{k,k+1} > 0)$ перейдем к $\Delta W'_{j,j+1}$ (рис. 7,б):

$$\Delta W'_{k,k+1} = \Delta W_{k,k+1} - (\Delta W^г_{k,k+1} - \Delta W^*_{k,k+1}).$$

Тогда вероятностью $P(\Delta W^{*}_{kk+1}>0)$ будет единица минус значение функции распределения Стьюдента, соответствующая

$$t=\frac{-\Delta W^{r}_{kk+1}}{\delta_{\Delta W^{*}_{kk+1}}}=-\frac{W^{r}_{k}-W^{r}_{k+1}}{\delta_{\Delta W^{*}_{k,k+1}}}$$

Вероятности $P(\Delta W_{k,k+1}>0)$ характеризуют достоверность утверждения, что групповая оценка объекта k больше, чем объекта $k+1$ в упорядоченном ряду.

После вычисления всех $P(\Delta W_{k,k+1}>0)$ $j=1,2,\ldots,n-1$ и подстановки их в (116) получим искомую вероятность P_y.

Для оценки устойчивости групповых оценок, соответствующей определению 2, необходимо использовать статистический метод построения функции распределения $F(\ell)$ сохранения порядка групповых оценок при исключении из экспертной группы ℓ экспертов. Для этого после исключения из экспертной группы различные подмножества из ℓ экспертов, проверяется условие сохранения порядка групповых оценок. Можно предложить несколько алгоритмов, позволяющих сократить перебор различных комбинаций экспертов в подгруппе при отдельных закономерностях в оценках экспертов. В настоящем пособии эти алгоритмы не рассматриваются.

Группирование экспертов. Алгоритм группирования экспертов в методе нормирования совпадает с алгоритмом для метода ранжирования вплоть до статистики для проверки значимости коэффициента согласия на каждом шаге.

Обработка результатов экспертного опроса, проведенного по методу парных сравнений

Результаты опроса, по методу парных сравнений представляются в виде множества матриц $\|b^{i}_{jk}\|$ $(i=1,2,\ldots,m)$.

Метод парных сравнений следует рассматривать как процедуру неявной оценки объектов по шкале отношений. Если эксперт оценил объекты по методу нормирования $(W^{i}_{1},\ldots,W^{n}_{i})$, то матрицу парных сравнений он заполнит делением соответствующих оценок объектов $b^{i}_{jk}=W^{i}_{j}/W^{i}_{k}$. В этом случае $b^{i}_{jk}=1/b^{i}_{kj}$, кроме того:

$$b^{i}_{jk}\cdot b^{i}_{ks}=\frac{W^{i}_{j}}{W^{i}_{k}}\cdot\frac{W^{i}_{k}}{W^{i}_{s}}=\frac{W^{i}_{j}}{W^{i}_{s}}=b^{i}_{js}.$$

Матрица $\|b^{i}_{jk}\|$, обладающая указанными свойствами, называется сверхтранзитивной.

В том случае, когда эксперт заполняет матрицу парных сравнений без предварительной оценки объектов по методу нормирования, то матрица $\|b_{jk}\|$ в большинстве случаев не сверхтранзитивна.

Если матрица парных сравнений эксперта окажется все же сверхтранзитивной, то по ней легко найти оценки объектов в шкале отношений:

$$W^{i}_{j}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b^{i}_{jk}}\quad(j=1,2,\ldots,n). \tag{117}$$

Действительно:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}b^{i}_{jk}}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}W^{i}_{j}/W^{i}_{k}}=W^{i}_{j}\sqrt[n]{\frac{1}{\prod_{k=1}^{n}W^{i}_{k}}},$$

а так как $1/\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}W^{i}_{k}}$ не зависит от j, то этот множитель следует рассматривать как коэффициент преобразования личной шкалы измерения i эксперта.

Рассмотрим общий случай, когда матрица парных сравнений не сверхтранзитивна. В этом случае следует проверить оценки эксперта на транзитивность. Для этого от матрицы $\|b^{i}_{jk}\|$ переходят к матрице попарного сравнения $\|\delta^{i}_{jk}\|$, исходя из следующего очевидного правила:

$$\delta^{i}_{jk}=\begin{cases}1,\text{ если } & b_{jk}>1;\\ 0,\text{ если } & b_{jk}<1;\\ 1/2,\text{ если } & b_{jk}=1.\end{cases}$$

После этого вычисляется коэффициент транзитивности L_i по формуле (68) или (69) и осуществляется проверка его на значимость (см. п. 6).

Отметим, что если матрица $\|b^{i}_{jk}\|$ сверхтранзитивна, то $L_i=1$, но из $L_i=1$ не следует сверхтранзитивность матрицы парных сравнений.

Невыполнение свойств сверхтранзитивности матрицы парных сравнений указывает на наличие ошибок в оценках этого эксперта. Необходимо такую матрицу аппроксимировать некоторой сверхтранзитивной матрицей, т.е. необходимо из матрицы $\|b^{i}_{jk}\|$ получить вектор оценок объектов $\{W^{i}_{1},\ldots,W^{i}_{n}\}$, попарное деление элементов которого даст сверхтранзитивную матрицу.

Для аппроксимации матрицы $\| b^i_{jk} \|$ можно использовать различные подходы. В [5] описаны два алгоритма определения вектора $\{W^i_1, ..., W^i_n\}$. Можно определить W^i_j из условия, чтобы отношения W^i_j / W^i_k мало отличались от элементов матрицы $\| b^i_{jk} \|$, например, из условия минимума δ:

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln W^i_j - \ln W^i_k - \ln b^i_{jk} \right)^2 .$$

Рассмотрим один из алгоритмов аппроксимации матрицы парных сравнений, не требующих больших вычислений. Индекс эксперта (i) в дальнейшем опустим, так как будем рассматривать процедуру аппроксимации матрицы парных сравнений одного эксперта.

Ввиду того что в методе парных сравнений оценки объектов даются с использованием инвариантных отношений, то для задания шкалы измерений необходимо указать одно шкальное значение, например, $W_n = 1$.

Исходя из элементов n столбца матрицы $\| b_{jk} \|$, определим оставшиеся W_j ($j = 1, 2, ..., n-1$):

$W^{(n)}_j = b_{jn} W_n = b_{jn}$ (верхний индекс W_j указывает, что он вычислен с использованием W_n и, соответственно, n столбца $\| b_{jk} \|$).

Используя вычисленное $W^{(n)}_{n-1}$ и элементы $(n-1)$ столбца матрицы парных сравнений, определим $W^{(n-1)}_j$:

$$W^{(n-1)}_j = b_{j,n-1} W^{(n)}_{n-1} = b_{j,n-1} \cdot b_{n-1,n} \quad (j = 1,2,3 ..., n).$$

Используя все другие столбцы $\| b_{jk} \|$ и $W^{(n)}_k$, аналогично вычислим $W^{(k)}_j$:

$$W^{(k)}_j = b_{jk} W^{(n)}_k = b_{jk} b_{kn} . \tag{118}$$

Таким образом n раз вычисляются элементы искомого вектора $\{W_1, ..., W_n\}$, используя отдельные столбцы матрицы парных сравнений. Отметим, что если матрица $\| b_{jk} \|$ сверхтранзитивная, то все $W^{(k)}_j$, вычисляемые с использованием разных столбцов матрицы, будут одинаковы и равны b_{jn} . Если же $W^{(k)}_j$ ($k = 1,2,..., n$) отличаются друг от друга, то их следует усреднить по формуле:

$$W_j = \left(\prod_{k=1}^{n} W^k_j \right)^{1/n} .$$

С учетом (118) последнее выражение запишется в виде:

$$W_j = \left(\prod_{k=1}^{n} b_{jk} \cdot b_{kn} \right)^{1/n} = \left(\prod_{k=1}^{n} b_{jk} \right)^{1/n} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} b_{kn} \right)^{1/n} .$$

Обозначим $\alpha_n = \left(\prod_{k=1}^{n} b_{kn} \right)^{1/n}$, которая зависит только от элементов n столбца $\| b_{jk} \|$. Формула для вычисления элементов вектора $\{W_1, ..., W_n\}$ примет вид:

$$W_j = \alpha_n \left(\prod_{k=1}^{n} b_{jk} \right)^{1/n} . \tag{119}$$

Отметим, что описанная процедура инвариантна к выбору шкалы измерения, т.е. отношение W_j / W_k не изменится, если задать шкалу измерения указанием не $W_n = 1$, а любого другого $W_s = 1$. В этом случае в формуле (119) только α_n заменится на $\alpha_s = \left(\prod_{k=1}^{n} b_{ks} \right)^{1/n}$. Поэтому можно при вычислении W_j в формуле (119) принять $\alpha_n = 1$, и тогда она совпадет с выражением (117) для вычисления вектора оценок объектов при сверхтранзитивной матрице.

Вычислив W^i_j ($j = 1, 2, ..., n$), а затем элементы сверхтранзитивной матрицы, необходимо качественно и количественно сравнить полученную сверхтранзитивную матрицу с исходной для оценки выполнения свойств сверхтранзитивности в исходной матрице.

На всех последующих этапах обработки экспертных данных используются вычисленные оценки объектов W^i_j ($j = 1; 2, ..., n$) . Определение групповых оценок, анализ их достоверности, группирование экспертов осуществляются так же, как и в методе нормирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены процедуры обработки экспертных оценок, полученных по всем основным экспертным методам. Многообразие экспертных методов, основанных на шкалах отношений и интервалов, объясняется различной процедурой оценки объектов. Обработка экспертных данных по этим методам будет отличаться только процедурой определения шкальных значений объектов (W^i_j) по экспертным оценкам.

Определение групповых оценок объектов, статистическая оценка их достоверности требуют больших вычислений, поэтому для обработки экспертных оценок необходимо использовать ЭВМ.

Обработку результатов экспертного опроса осуществляет системный аналитик, знающий процедуры обработки. Специалисты, которые будут использовать результаты экспертизы, должны участвовать в обработке, задавая требования по надежности групповых оценок, интерпретируя результаты. В этой связи большое значение имеет простота и хорошая интерпретация используемых при обработке коэффициентов и понятий, которые бы легко воспринимались лицами без специального изучения экспертных методов.

Приложение 1

МОМЕНТЫ КОЭФФИЦИЕНТА СОГЛАСИЯ

Выведем формулы для определения первых трех моментов коэффициента согласия, когда оценки объектов, данные экспертами, независимы.

Обозначим через x_j^i оценки объектов, данные i экспертом, количество оценок k $(j=1,2,\dots,k)$. Отметим, что количество оценок не всегда совпадает с числом объектов n (обычно $n \geqslant k$). Будем считать, что математическое ожидание x_j^i равно нулю, а дисперсия единице, т.е. x_j^i – есть нормированная случайная величина и все x_j^i – независимы.

Формула для коэффициента согласия имеет вид:

$$E = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=1} R_{i\ell}.$$

Так как $R_{i\ell}=R_{\ell i}$, а $R_{ii}=D(x_j^i)=1$, то выражение для E преобразуется:

$$E=\frac{1}{m^2}\Big(\sum_{i=1}^{m} R_{ii}+2\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m} R_{i\ell}\Big)=\frac{1}{m}+\frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m} R_{i\ell}. \qquad (120)$$

Найдем выражения для первых трех моментов $R_{i\ell}$.

Для наглядности выкладок исключим индексы i и ℓ и обозначим x_j^i через x_j, а x_j^ℓ через y_j:

$$M(R_{i\ell})=M\Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j y_j\Big)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} M(x_j)M(y_j)=0; \qquad (121)$$

$$D(R_{i\ell})=M(R_{i\ell}^2)-\big[M(R_{i\ell})\big]^2=M(R_{i\ell}^2);$$

$$M(R_{i\ell}^2)=M\Big[\Big(\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} x_j y_j\Big)^2\Big]=\frac{1}{k^2}\Big\{\sum_{j=1}^{k} M(x_j^2 y_j^2)+ \qquad (122)$$

$$+2\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=j+1}^{k} M(x_j y_j x_s y_s)\Big\}.$$

Так как x_j и y_j независимы, то

$$M(R_{i\ell}^2)=\frac{1}{k^2}\big[k+k(k-1)M(x_j x_s)M(y_j y_s)\big]; \qquad (123)$$

$$M(x_j x_s)=\frac{2}{k(k-1)}\sum_{j=1}^{k}\sum_{s=j+1}^{k} x_j x_s=\frac{1}{k(k-1)}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j\Big)^2-\sum_{j=1}^{k} x_j^2\Big]$$

Из $M(x_j)=0$ следует, что $\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j\Big)=0$ и значит

$$M(x_j x_s)=\frac{-1}{k-1}\cdot\frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^2}{k}=-\frac{1}{k-1}D(x_j)=-\frac{1}{k-1}. \qquad (124)$$

Подставляя (124) в (123), получим

$$D(R_{i\ell})=M(R_{i\ell}^2)=\frac{1}{k^2}\Big[k+\frac{k(k-1)}{(k-1)^2}\Big]=\frac{1}{k-1}; \qquad (125)$$

$$\mu_3(R_{i\ell})=M(R_{i\ell}^3)=\frac{1}{k^3}M\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j y_j\Big)^3\Big].$$

Раскрыв $\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\Big)^3$ и учитывая независимость x_j и y_j, получим

$$\mu_3(R_{i\ell})=\frac{1}{k^3}\big[kM(x_j^3)M(y_j^3)+k(k-1)(k-2)M(x_j x_s x_\ell)M(y_j y_s y_\ell)+$$

$$+3k(k-1)M(x_j^2 x_s)M(y_j^2 y_s)\big]. \qquad (126)$$

Найдем отдельно $M(x_j^2 x_s)$ и $M(x_j x_s x_\ell)$:

$$M(x_j^2 x_s)=\frac{1}{k(k-1)}\Big[\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{k} x_j^2 x_s \pm \sum_{j=1}^{n} x_j^3\Big]=\frac{1}{k(k-1)}\Big[\sum_{j=1}^{k} x_j^2\Big(\sum_{s=1}^{k} x_s\Big)-\sum_{j=1}^{k} x_j^3\Big].$$

Так как $\sum_{s=1}^{n} x_s = 0 \; (M(x_s)=0)$, то последнее выражение примет вид

$$M(x_j^2 x_s) = -\frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^3}{k(k-1)} = -\frac{\mu_3(x_j)}{k-1}; \qquad (127)$$

$$M(x_j x_s x_\ell) = \frac{1}{k(k-1)(k-2)}\Big[\sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{s=1 \\ s\ne j}}^{k} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\ne s \\ \ell\ne j}}^{k} x_j x_s x_\ell \pm 3\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{s=1 \\ s\ne j}}^{k} x_j^2 x_s \pm \sum_{j=1}^{n} x_j^3\Big];$$

$$M(x_j x_s x_\ell) = \frac{1}{k(k-1)(k-2)}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j\Big)^3 - 3\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{s=1 \\ s\ne j}} x_j^2 x_s - \sum_{j=1}^{k} x_j^3\Big].$$

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{k} x_j = 0$, а $M(x_j^2 x_s)$ соответствует (127), получим:

$$M(x_j x_s x_\ell) = \frac{1}{k(k-1)(k-2)}\Big[\frac{3\cdot k(k-1)\cdot\mu_3(x_j)}{k-1} - k\mu_3(x_j)\Big] = \frac{2\mu_3(x_j)}{(k-1)(k-2)}. \qquad (128)$$

После подстановки (127) и (128) в (126) и преобразования получим:

$$\mu_3(R_{i\ell}) = \frac{[\mu_3(x_j)]^2}{(k-1)(k-2)}. \qquad (129)$$

Используя выражение (120) для коэффициента согласия, найдем его моменты:

$$M(E) = \frac{1}{m} + \frac{2}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m} M(R_{i\ell}). \qquad (130)$$

С учетом (121) $\quad M(E) = \frac{1}{m}.$

$$\text{Д}(E) = \frac{4}{m^4} M\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m} R_{i\ell}\Big)\Big]^2 = \frac{4}{m^4}\Big[\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m} M(R_{i\ell}^2) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum_{\substack{p=s+1 \\ s,p\ne i,\ell}}^{m} M(R_{i\ell} R_{sp})\Big].$$

Ввиду независимости оценок всех экспертов $M(R_{i\ell}R_{sp})=0$ и значит, с учетом (125), второй момент E будет вычисляться по формуле:

$$\text{Д}(E) = \frac{4}{m^4}\cdot\frac{m(m-1)}{2}\cdot\frac{1}{k-1} = \frac{2(m-1)}{m^3(k-1)}; \qquad (131)$$

$$\mu_3(E) = \frac{8}{m^6} M\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m} R_{i\ell}\Big)^3\Big].$$

Для сокращения записей и наглядности выкладок в дальнейшем двойную сумму $\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=i+1}^{m}$, насчитывающую $\frac{m(m-1)}{2}$ элементов, будем записывать через одну сумму и без индексов. Тогда

$$\mu_3(E) = \frac{8}{m^6} M\Big[\Big(\sum R_{i\ell}\Big)^3\Big] = \frac{8}{m^6}\Big[\sum M(R_{i\ell}^3) + \sum\sum\sum M(R_{i\ell} R_{sr} R_{pq})\Big]. \qquad (132)$$

Отметим, что $M(R_{i\ell}R_{sr}R_{pq})=0$, если только значения индексов не образуют замкнутой последовательности типа $i\ell, \ell r, ri$, или все индексы одинаковы:

$$M(R_{i\ell}R_{\ell r}R_{ri}) = \frac{1}{k^3} M\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^i x_j^\ell\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^\ell x_j^r\Big)\Big(\sum_{j=1}^{k} x_j^r x_j^i\Big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{k^3} M\Big\{\Big[\sum_{j=1}^{k} (x_j^\ell)^2 x_j^i x_j^r + \sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{s=1 \\ s\ne j}}^{k} x_j^\ell x_s^\ell x_j^i x_s^r\Big]\sum_{j=1}^{k} x_j^r x_j^i\Big\}.$$

Так как x_j^e независимы от x_j^i и x_j^r, то последнее запишется в виде:

$$M(R_{ie}R_{er}R_{ri})=\frac{1}{k^3}M\Big\{\Big[M(x_j^e)^2\sum_{j=1}^{k}x_j^i x_j^r+M(x_j^e x_s^e)\sum_{j=1}^{k}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{k}x_j^i x_s^r\pm$$

$$\pm M(x_j^e x_s^e)\sum_{j=1}^{k}x_j^i x_j^r\Big]\sum_{j=1}^{k}x_j^i x_j^r\Big\};$$

$$M(R_{ie}R_{er}R_{ri})=\frac{1}{k^3}M\Big\{\Big[\big(M(x_j^e)^2-M(x_j^e x_s^e)\big)\sum_{j=1}^{k}x_j^i x_j^r+$$

$$+M(x_j^e x_s^e)\Big(\sum_{j=1}^{k}x_j^i\sum_{s=1}^{k}x_s^r\Big)\Big]\sum_{j=1}^{k}x_j^i x_j^r\Big\}.$$

Учитывая, что $\sum_{s=1}^{k}x_s^r=0$, последнее запишем в виде:

$$M(R_{ie}R_{er}R_{ri})=\frac{1}{k^3}\big[M(x_j^e)^2-M(x_j^e x_s^e)\big]M\Big[\Big(\sum_{j=1}^{k}x_j^i x_j^r\Big)^2\Big]=$$

$$=\frac{1}{k}\big[1-M(x_j^e x_s^e)\big]M(R_{ir}^2); \qquad (133)$$

$$M(x_j^e x_s^e)=\frac{1}{k(k-1)}\Big[\sum_{\substack{j=1\\ s\neq j}}^{k}\sum_{s=1}^{k}x_j^e x_s^e\pm\sum_{j=1}^{n}(x_j^e)^2\Big]=-\frac{1}{k-1}. \qquad (134)$$

Подставляя (125) и (134) в (133), получим

$$M(R_{ie}R_{er}R_{ri})=\frac{1}{k}\Big[1+\frac{1}{k-1}\Big]\frac{1}{k-1}=\frac{1}{(k-1)^2}. \qquad (135)$$

Подставим (129) и (135) в выражение (132) для $\mu_3(E)$:

$$\mu_3(E)=\frac{8}{m^6}\Big(\frac{m(m-1)}{2}+m(m-1)(m-2)\frac{1}{(k-1)^2}\Big).$$

После преобразования получим

$$\mu_3(E)=\frac{8(m-1)}{m^5(k-1)}\Big[\frac{\mu_3}{2(k-2)}+\frac{m-2}{k-1}\Big]. \qquad (136)$$

Приложение 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ (R_{il}^{H}) ШКАЛЫ НАИМЕНОВНИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНОГО ЧИСЛА ОБЬЕКТОВ n И КОЛИЧЕСТВА КЛАССОВ S_H

Вероятность того, что данное значение $R_{il}^{H} = \frac{n-k}{n}$ будет достигнуто или превышено (знаки целой части вероятности P опущены, например, для $n=3$, $S=4$ и $R_{il}^{H} = \frac{2}{3}$ значение P равно 0; 156).

n = 2

S	n	n–1
3	111	556
4	063	438
5	040	360
6	028	306
7	020	265
8	016	234
9	012	210
10	010	190

n = 3

S	n	n–1	n–2
3	037	259	704
4	016	156	578
5	008	104	488
6	005	074	421
7	003	055	370
8	002	043	330
9	001	034	298
10	001	028	271

n = 4

S	n	n–1	n–2	n–3
3	012	111	407	802
4	004	051	262	684
5	002	027	181	590
6	001	016	132	518
7		010	100	460
8		007	079	414
9		005	064	376
10		004	052	344

n = 5

S	n	n–1	n–2	n–3	n–4
3	004	045	210	539	868
4	001	016	103	367	762
5		007	058	263	672
6		003	035	196	598
7		002	023	152	537
8		001	016	121	487
9		001	015	098	445
10			009	081	410

n = 6

S	n	n–1	n–2	n–3	n–4	n–5
3	001	018	100	320	649	912
4		004	038	169	466	822
5		002	017	099	345	738
6		001	009	062	263	651
7			005	042	207	603
8			003	029	167	551
9			002	021	137	507
10			001	016	114	469

n = 7

S	n–1	n–2	n–3	n–4	n–5	n–6
3	007	045	173	429	737	941
4	001	013	071	244	556	867
5		005	033	148	423	790
6		002	018	096	330	721
7		001	010	065	264	660
8			006	046	215	607
9			004	034	178	561
10			003	026	150	522

6-1192

n = 8

S	n–1	n–2	n–3	n–4	n–5	n–6	n–7
3	003	020	088	259	532	805	961
4		004	027	114	321	633	900
5		001	010	056	203	497	832
6			005	031	135	396	767
7			002	018	094	320	709
8			001	011	067	264	656
9			001	007	050	221	610
10				005	038	187	570

n = 9

S	n–1	n–2	n–3	n–4	n–5	n–6	n–7	n–8
3	001	008	042	145	350	623	857	974
4		001	010	049	166	399	700	924
5			003	020	086	262	564	866
6			001	009	048	178	457	806
7				005	029	126	376	750
8				002	018	092	313	699
9				001	012	069	264	654
10				001	008	053	225	613

n = 10

S	n–2	n–3	n–4	n–5	n–6	n–7	n–8	n–9
3	003	020	076	213	441	701	896	983
4		003	020	078	224	474	756	944
5		001	006	033	121	322	624	893
6			002	015	070	225	515	838
7			001	008	043	162	429	786
8				004	027	120	361	737
9				003	018	091	307	692
10				002	013	070	264	651

n = 11

S	n–2	n–3	n–4	n–5	n–6	n–7	n–8	n–9	n–10
3	001	009	039	122	289	527	766	925	988
4		001	008	034	115	287	545	803	958
5			002	012	050	161	383	678	914
6				005	025	096	273	569	865
7				002	013	060	200	480	817
8				001	007	039	150	408	770
9					004	026	114	350	726
10					003	019	090	302	681

n = 12

S	n–3	n–4	n–5	n–6	n–7	n–8	n–9	n–10	n–11
3	004	019	067	178	368	607	819	946	992
4		003	014	054	158	351	609	841	968
5			004	019	073	205	442	725	931
6			001	008	036	125	322	619	888
7				003	020	080	240	528	843
8				002	011	053	182	453	799
9				001	007	036	141	392	757
10					004	026	111	341	718

n = 13

S	n–3	n–4	n–5	n–6	n–7	n–8	n–9	n–10	n–11	n–12
3	002	009	035	103	241	448	678	861	961	995
4		001	006	024	080	206	416	667	873	976
5			001	007	030	099	252	498	766	945
6				002	013	051	158	372	664	907
7				001	006	028	103	281	573	865
8					003	016	069	215	496	824
9						002	010	048	169	432
10						001	006	034	134	379

n = 14

S	n–4	n–5	n–6	n–7	n–8	n–9	n–10	n–11	n–12	n–13
3	004	017	058	149	310	525	739	895	973	997
4		002	010	038	111	258	479	719	899	982
5			002	012	044	130	302	552	802	956
6				004	019	069	194	421	704	922
7				001	009	039	128	323	615	884
8				001	005	023	087	251	537	846
9					003	014	061	198	471	808
10					001	009	044	158	415	771

n = 15

S	n–4	n–5	n–6	n–7	n–8	n–9	n–10	n–11	n–12	n–13	n–14
3	002	009	031	088	203	382	596	791	921	981	998
4		001	004	017	057	148	314	539	764	920	987
5			001	004	018	061	164	352	601	833	965
6				001	007	027	090	232	468	740	935
7					003	013	052	156	365	653	901
8					001	007	031	108	287	576	865
9					001	004	020	076	228	509	829
10						002	013	056	184	451	794

ФУНКЦИЯ ВЕРОЯТНОСТИ $S^1(d^2)$ [6]

Знаки целой части у P опущены, например, для $n = 4$ и $S = 20$, значение P равно 0,042).

n = 4		n = 5		n = 6		n = 7		n = 8	
S	P	S	P	S	P	S	P	S	P
12	458	22	475	40	401	64	391	94	397
14	375	24	392	46	282	70	297	104	291
16	208	26	342	52	178	78	198	114	195
18	167	28	258	54	149	82	151	120	150
20	042	30	225	56	121	88	100	128	098
		32	175	58	088	96	044	138	048
		34	117	62	051	102	017	148	018
		36	067	66	017	104	012	152	011
		38	042	68	008	108	003	158	004
		40	008	70	001	110	001	162	001

Продолжение

n = 9		n = 10		n = 11		n = 12		n = 13	
S	P	S	P	S	P	S	P	S	P
134	388	182	393	240	398	310	400	394	396
146	290	198	292	260	298	336	294	424	296
160	193	216	193	282	201	364	196	458	197
168	146	226	148	296	150	380	149	478	149
178	097	240	096	314	096	400	100	504	098
192	048	258	048	336	050	430	049	540	049
206	018	276	019	360	020	460	020	576	020
212	011	286	010	374	010	478	010	598	010
218	005	296	004	386	005	494	005	620	005
228	001	308	001	404	001	518	001	652	001

Примечание. Поскольку распределение $S(d^2)$ является симметричным,

$$S(d^2)_{табл.\alpha} = S(d^2)_{max} - S^1(d^2)_{табл.\alpha}$$

Приложение 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ S [6]

Вероятность того, что данное значение S будет достигнуто или превзойдено, для n = 3 и m от 2 до 10 (знаки целой части вероятностей опущены).

S	m = 2	m = 3	m = 4	m = 5	m = 6	m = 7	m = 8	m = 9	m = 10
6	500	528	653	691	740	768	794	814	830
8	167	361	431	522	570	620	654	685	710
14		194	273	367	430	486	531	569	601
18		028	125	182	252	305	355	398	436
24			069	124	184	237	285	328	368
26			042	093	142	192	236	278	316
32			005	039	072	112	149	187	222
38				024	052	085	120	154	187
42				009	029	051	079	107	135
50				001	012	027	047	069	092
54					008	021	038	057	078
56					006	016	030	048	066
62					002	008	018	031	046
72						004	010	019	030
78						001	005	010	018
96							001	004	008
104									003
126									001

n = 4							n = 5	
S	m = 3	m = 5	S	m = 2	m = 4	m = 6	S	m = 3
19	342	561	14	375	649	772	36	347
21	300	521	18	167	508	668	40	291
27	175	408	20	042	432	609	44	236
29	148	372	26		324	512	48	172
33	075	298	32		200	386	52	127
37	033	226	38		141	317	56	096
41	017	210	42		094	256	60	063
43	002	162	50		052	194	64	045
45	002	141	56		019	127	68	028

Продолжение

n = 4							n = 5	
S	m = 3	m = 5	S	m = 2	m = 4	m = 6	S	m = 3
53		093	64		007	089	72	017
65		044	74		001	056	74	015
75		020	94			017	76	008
83		009	100			010	78	005
91		003	114			004	80	004
105		001	128			001	86	001

Приложение 5

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ d_i (знаки целой части P опущены)

n = 2		n = 3		n = 4		n = 5		n = 6	
d	P	d	P	d	P	d	P	d	P
0	1,000	1	250	1	625	1	883	4	792
				2	375	2	766	5	602
						3	531	6	491
						4	297	7	227
						5	023	8	081

Продолжение

n = 7		n = 8		n = 9		n = 10	
d	P	d	P	d	P	d	P
10	447	12	792	21	592	32	421
11	263	13	701	22	502	33	331
12	147	14	610	23	389	34	253
13	036	15	480	24	298	35	171
14	001	16	371	25	197	36	111
		17	232	26	118	37	059
		18	141	27	055	38	028
		19	051	28	020	39	008
		20	012	29	002	40	001

Приложение 6

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ H

Вероятность того, что значение H будет достигнуто или превышено при m = 3 и n от 2 до 8 (знаки целой части P опущены)

n = 2		n = 3		n = 4		n = 5		n = 6		n = 7		n = 8	
H	P	H	P	H	P	H	P	H	P	H	P	H	P
2,25	250	2,75	578	5,50	466	8,50	474	11,75	539	17,25	433	23	400
		4,75	156	7,50	169	10,50	224	13,75	314	19,25	256	25	250
		6,75	016	9,50	038	12,50	078	15,75	148	21,25	130	27	138
				11,50	005	14,50	020	17,75	057	23,25	056	29	068
						16,50	004	19,75	017	25,25	006	31	029
								21,75	004	27,25	002	33	011
								23,75	001			35	004
												37	001

Вероятность того, что значение H будет достигнуто или превышено при $m = 4$ и n от 2 до 6

n = 2		n = 3		n = 4		n = 5		n = 6	
H	P	H	P	H	P	H	P	H	P
1	625	4	330	7	410	11	413	27	014
4	125	5	277	8	278	12	327	28	009
		6	137	9	185	14	179	29	006
		8	043	10	137	15	127	30	004
		9	025	11	088	16	090	31	002
		12	002	12	044	18	038	32	001
				14	019	20	016		
				15	008	21	009		
				16	003	22	005		
				18	001	25	001		

Приложение 7

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЬЮДЕНТА

ν	0.50	0.20	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
4	0,74	1,53	2,13	2,78	4,60	5,60	8,61
5	0,73	1,48	2,02	2,57	4,03	4,77	6,87
6	0,72	1,44	1,94	2,45	3,71	4,32	5,96
7	0,71	1,42	1,90	2,37	3,50	4,03	5,41
8	0,71	1,40	1,86	2,31	3,36	3,83	5,04
9	0,70	1,38	1,83	2,26	3,25	3,69	4,78
10	0,70	1,37	1,81	2,23	3,17	3,58	4,59
11	0,70	1,36	1,80	2,20	3,11	3,50	4,44
12	0,70	1,36	1,78	2,18	3,06	3,43	4,32
13	0,69	1,35	1,77	2,16	3,01	3,37	4,22
14	0,69	1,35	1,76	2,15	2,98	3,33	4,14
15	0,69	1,34	1,75	2,13	2,95	3,29	4,07
16	0,69	1,34	1,75	2,12	2,92	3,25	4,02
17	0,69	1,33	1,74	2,11	2,90	3,22	3,97
18	0,69	1,33	1,73	2,10	2,88	3,20	3,92
19	0,69	1,33	1,73	2,09	2,86	3,17	3,88

Приложение 8

КВАНТИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИРСОНА (χ^2)

ν	0.30	0.20	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
6	7,2	8,6	10,6	12,6	16,8	18,5	22,5
7	8,4	9,8	12,0	14,1	18,5	20,3	24,3
8	9,5	11,0	13,4	15,5	20,1	22,0	26,1
9	10,7	12,2	14,7	16,9	21,7	23,6	27,9
10	11,8	13,4	16,0	18,3	23,2	25,2	29,6
11	12,9	14,6	17,3	19,7	24,7	26,8	31,3
12	14,0	15,8	18,5	21,0	26,2	28,3	32,9
13	15,1	17,0	19,8	22,4	27,7	29,8	34,5
14	16,2	18,2	21,1	23,7	29,1	31,3	36,1
15	17,3	19,3	22,3	25,0	30,6	32,8	37,7

Приложение 9

ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)	X	Ф(X)
0,0	0,500	0,8	0,789	1,6	0,946	2,4	0,992
0,1	0,540	0,9	0,816	1,7	0,956	2,5	0,994
0,2	0,580	1,0	0,842	1,8	0,965	2,6	0,996
0,3	0,618	1,1	0,865	1,9	0,972	2,7	0,997
0,4	0,656	1,2	0,885	2,0	0,978	2,8	0,998
0,5	0,692	1,3	0,904	2,1	0,983	3,0	0,999
0,6	0,726	1,4	0,920	2,2	0,987		
0,7	0,758	1,[illegible]	0,934	2,3	0,990		

Примечание. $\Phi(X)$ для $X<0$ определяется из выражения:

$$\Phi(X)=1-\Phi(-X)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е л т а р е н к о Е. А. Элементы теории измерений. – М.: МИФИ, 1979.

2. В е н т ц е л ь Е. С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969.

3. М и ш у л и н а О. А. Вероятностные основы кибернетики. – М.: МИФИ, 1973.

4. Б е ш е л е в С. Д., Г у р в и ч Ф. Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. – М.: Статистика, 1980.

5. М и р к и н Б. Г. Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974.

6. К е н д э л М. Ранговые корреляции. – М.: Статистика, 1975.

7. И н д л и н Ю. А. Модель облучаемого наблюдателя в ситуации обнаружения и различения. В сб. "Проблемы принятия решений". – М.: Наука, 1976.

8. С м и р н о в Н. В., Д у н и н - Б а р к о в с к и й И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
1. Экспертные методы измерения сложных свойств 4
2. Этапы проведения экспертизы по измерению сложных свойств. 9
3. Этапы статистической обработки экспертных оценок . . 14
4. Обработка экспертных оценок, полученных по методу классификации 21
5. Обработка экспертных оценок, полученных по методу ранжирования 31
6. Обработка экспертных оценок, полученных по методу попарного сравнения 44
7. Обработка экспертных оценок по методам, основанным на шкалах отношений и интервалов 61
Заключение 73
Приложения 74
Список литературы 93